Héctor Gamarra Morales

ARITMÉTICA

Teoría y práctica

- Exámenes UNI desarrollados por temas y con claves
- Actualizado según últimos prospectos
- Desarrollo completo de todo el curso
- Nuevos problemas resueltos y propuestos tipo UNI
- Claves para todos los problemas propuestos

COLECCIÓN UNICIENCIA SAPIENS

Editorial San Marcos

ARITMÉTICA
Teoría y práctica

Héctor Gamarra Morales

ARITMÉTICA

Teoría y práctica

Editorial San Marcos

Aritmética: Teoría y práctica
Colección Uniciencia Sapiens
Hector Gamarra Morales

Asesoría académica: Salvador Timoteo V.

Jr. Dávalos Lissón 135, Lima, Lima, Lima
Teléfono: 331-1522
RUC: 20260100808
E-mail: informes@editorialsanmarcos.com

Diseño de portada: Gustavo Tuppia
Composición de interiores: Lidia Ramírez
Responsable de edición: Alex Cubas

Primera edición: 2008
Segunda edición: diciembre 2015
Tiraje: 2000 ejemplares

Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú
N.° 2015-17915
ISBN: 978-612-315-275-8
Registro de proyecto editorial N.° 31501001501403

Impreso en el Perú / *Printed in Peru*

Pedidos:
Jr. Dávalos Lissón 135, Lima
Teléfono: 433-7611
E-mail: ventas@editorialsanmarcos.com
www.editorialsanmarcos.com

Impresión:
Editorial San Marcos de Aníbal Jesús Paredes Galván
Av. Las Lomas 1600, Urb. Mangomarca, San Juan de Lurigancho, Lima, Lima
RUC: 10090984344
Marzo 2016

"Este trabajo lo dedico a mi esposa Magda por su valiosa colaboración y a mi hija Nathaly por su comprensión".

ÍNDICE

CAPÍTULO 05: DIVISIBILIDAD

CAPÍTULO 06: NÚMEROS PRIMOS

CAPÍTULO 07: MÁXIMO COMÚN DIVISOR (MCD) Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (MCM)

CAPÍTULO 08: POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN

CAPÍTULO 09: NÚMEROS RACIONALES

CAPÍTULO 10: RAZONES Y PROPORCIONES

CAPÍTULO 11: PROPORCIONALIDAD

CAPÍTULO 12: REGLA DE TRES

CAPÍTULO 13: REGLA DE PORCENTAJE

CAPÍTULO 14: REGLA DE INTERÉS

CAPÍTULO 15: REGLA DE DESCUENTO

CAPÍTULO 16: REPARTO PROPORCIONAL

CAPÍTULO 17: PROMEDIOS

CAPÍTULO 18: REGLA DE MEZCLA Y ALEACIÓN

CAPÍTULO 19: ESTADÍSTICA

CAPÍTULO 20: TEMAS SELECTOS

PRESENTACIÓN

La presente obra: *Aritmética* de la Colección Uniciencia Sapiens, comprende los temas exigidos en los prospectos de admisión de las principales universidades del país, en especial el de la Universidad Nacional de Ingeniería (UNI), y el desarrollo de temas selectos tratados al final del libro. Asimismo, es una valiosa fuente de consulta para docentes de la especialidad de Aritmética y Razonamiento Matemático.

En cada capítulo se ha puesto énfasis en realizar una amplia teoría, ejemplos básicos de cada concepto y resolución de problemas tipos, basados según su dificultad, utilizando estrategias adecuadas para la fácil comprensión de los estudiantes que se preparan en el nivel preuniversitario. Además, pretende una comunicación directa con el lector, y garantiza un aprendizaje progresivo, revisando exhaustivamente los problemas resueltos para que pueda abordar con éxito todos los problemas propuestos.

Entre las grandes ventajas de este libro están el desarrollo de temas selectos de una manera minuciosa y didáctica, numerosos ejemplos, y problemas tipos resueltos en cada capítulo y que han sido explicados detalladamente, teniendo en cuenta las reglas básicas de las operaciones para su fácil comprensión y entendimiento por parte de los alumnos; además, al final de cada capítulo, el alumno encontrará problemas propuestos con sus respectivas claves.

El libro contiene 20 capítulos. En los capítulos del 1 al 9 se ha desarrollado la aritmética general, que consiste en: teoría de conjuntos, sistemas de numeración, conteo de números, cuatro operaciones, divisibilidad, números primos, máximo común divisor (MCD) y mínimo común múltiplo (MCM), potenciación y radicación, números racionales. En los capítulos del 10 al 18 se desarrolla la aritmética mercantil, que comprende el estudio y análisis de las magnitudes: razones y proposiciones, proporcionalidad, regla de tres, porcentaje, regla de interés, regla de descuento, reparto proporcional, promedios, regla de mezcla y aleación. En el capítulo 19 se toca el tema de estadística y el capítulo 20 contiene los temas selectos. En este último capítulo se ha desarrollado los siguientes temas: longitud geográfica y tiempo, fracciones continuas, raíz cúbica, raíces cuadradas y cúbicas de números racionales en menos de una unidad o en menos de 1/n, aritmética modular: congruencias, teoría de los números, algunas conjeturas para números primos, definición de paradoja, sucesión de Fibonacci y aritmética recreativa.

Lo que pretende este libro es que los alumnos aprendan a analizar, recopilar datos y elaborar estrategias adecuadas para solucionar cualquier tipo de problema. La constancia en su preparación es importante para obtener buenos resultados. Estamos seguros de que esta obra responderá a sus expectativas.

El Editor

Teoría de conjuntos

01 capítulo

John Venn nació en 1834 en Hull, Inglaterra. Su madre, Martha Sykes, provenía de Swanland y murió mientras John era aún muy pequeño. Su padre era el reverendo Henry Venn, quien en la época en que nació John era el rector de la parroquia de Drypool, cerca de Hull. Henry Venn venía de una familia distinguida.

El área de mayor interés para Venn era la lógica y destacó por sus investigaciones en lógica inductiva y sus diagramas fueron utilizados para mostrar visualmente las operaciones más elementales de la teoría de conjuntos. Publicó tres textos sobre el tema: *The Logic of Chance* (Lógica del azar), que introdujo la teoría de la frecuencia de la probabilidad, en 1866; *Symbolic Logic* (Lógica simbólica), que presentaba los diagramas de Venn, en 1881; y *The Principles of Empirical Logic* (Los principios de la Lógica Empírica) en 1889.

En 1883, Venn fue elegido miembro de la Royal Society. En 1897, escribió una historia de su vida universitaria, llamada *The Biographical History of Gonville and Caius College, 1349-1897.*

Falleció en 1923 a la edad de 88 años en Cambridge y fue sepultado en el cementerio de la Iglesia Trumpington.

Fuente: Wikipedia

IDEA DE CONJUNTO

Intuitivamente, un conjunto es una lista, agrupación o colección de objetos homogéneos o heterogéneos con posibilidades reales o abstractas, que reciben el nombre de elementos.

Notación

Los conjuntos se denotan con letras mayúsculas: A; B; C; ...; mientras que los elementos del conjunto se denotan con letras minúsculas: a; b; c; ..., encerrados entre signos de colección (llaves).

Ejemplos:

- $A = \{a; b; c\}$ • $P = \{\pi; \sqrt{2}; e; \sqrt{3}\}$ • $B = \{3; \{3\}\}$

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Los conjuntos numéricos que estudia la Aritmética son:

Números naturales ($\mathbb{N}$)

Son todos los números enteros positivos.

$$N = \{1; 2; 3; ...\}$$

Números enteros ($\mathbb{Z}$)

Son números positivos, negativos y el cero.

$$\mathbb{Z} = \{...; -2; -1; 0; 1; 2; ...\}$$

- Este conjunto se subdivide entre enteros positivos ($\mathbb{Z}^+$) y enteros negativos ($\mathbb{Z}^-$).

  $\mathbb{Z}^+ = \{1; 2; 3; ...\}$ $\mathbb{Z}^- = \{...; -3; -2; -1\}$

- El cero es un número entero que no es ni positivo ni negativo.

Números racionales ($\mathbb{Q}$)

Son aquellos números que resultan de dividir dos números enteros, excepto de dividirlos por cero.

$$\mathbb{Q} = \left\{...; -1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{2}{3}; 1; ...\right\}$$

Números irracionales ($\mathbb{I}$)

Son aquellos números no racionales cuya cantidad de cifras decimales es indeterminada.

$$\mathbb{I} = \{-\sqrt{5}; \sqrt{2}; e; \pi; ...\}$$

Números reales ($\mathbb{R}$)

Son aquellos números que provienen de la reunión de los números racionales e irracionales. Estos números están asociados a un punto de la recta numérica, denominada "recta real".

−2,5 1,5 e π

$-\infty$ −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 $+\infty$

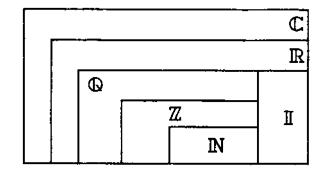
Números complejos ($\mathbb{C}$)

Son aquellos números que contienen una parte real y otra imaginaria. La unidad imaginaria es $i = \sqrt{-1}$.

$$\mathbb{C} = -2 + i; 3i; 4 + i/2; \text{etc.}$$

Ejemplo:

Haciendo un diagrama:



DETERMINACIÓN DE UN CONJUNTO

Determinar un conjunto, consiste en indicar con precisión todos los elementos de dicho conjunto. Un conjunto se puede determinar por extensión o por comprensión.

Por extensión

Un conjunto queda determinado por extensión, cuando se nombran explícitamente a los elementos de dicho conjunto.

Ejemplo:

- $A = \{a; e; i; o; u\}$ • $B = \{-2; -1; 0, 1; 2; 3\}$

Por comprensión

Un conjunto queda determinado por comprensión, cuando se enuncia las propiedades comunes que caracterizan a los elementos de dicho conjunto.

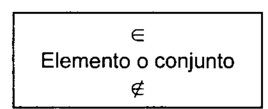
Ejemplo:

- A = {x/x es una vocal}
- B = {x/x es entero, comprendido entre −3 y 4}

No todos los conjuntos se pueden determinar por extensión y por comprensión.

RELACIÓN DE PERTENENCIA

Es una relación exclusiva entre un elemento y un conjunto. Se dice que un elemento pertenece ($\in$) a un conjunto, si éste forma parte o es agregado de dicho conjunto, en caso contrario, se dice que no pertenece ($\notin$) al conjunto.



Ejemplo:

Dado el conjunto M = {a; b; {b; c}}

Podemos deducir lo siguiente:

- $b \in M$ • $a \in M$
- $\{b; c\} \in M$ • $b \notin \{b; c\}$ (b y {b; c} son elementos de M)
- $\{b\} \notin M$ • $2 \notin M$

NÚMERO CARDINAL DE UN CONJUNTO

El cardinal del conjunto A, denotado por n(A), indica el número de elementos que posee el conjunto A.

Ejemplo:
Indicar el número de elementos de los siguientes conjuntos:

- A = {a; b; c} $\Rightarrow$ n(A) = 3
- B = {3; 4; {5}; {3;4}} $\Rightarrow$ n(B) = 4
- C = {p; a; r; a; d; a} $\Rightarrow$ n(C) = 4
- D = {x/x $\in$ ℕ $\wedge$ 4 < x < 5} $\Rightarrow$ n(D) = $\varnothing$

CLASES DE CONJUNTOS

Conjunto vacío o nulo
Es el conjunto que no posee elementos y se denota por { } o $\varnothing$.

Ejemplo:
M = {x/x es número natural $\wedge$ 3 < x < 4}

Conjunto unitario
Es el conjunto que consta de un solo elemento, también se le denomina **singletón.**

Ejemplo:
B = {x/x es un número par $\wedge$ 7 < x < 9}

Conjunto finito
Es el conjunto con limitado número de elementos, es decir, se pueden contar sus elementos.

Ejemplo:
S = {x/x es un número natural de dos cifras}

Conjunto infinito
Es el conjunto con ilimitada cantidad de elementos. Por lo general se determinan por comprensión.

Ejemplo:
G = {x/x es una estrella del firmamento}

Conjunto universal
Es un conjunto referencial que contiene a todos los elementos de una situación particular y se denota por U.

Ejemplo:
De los conjuntos numéricos, el conjunto de los números complejos representa al universo de los números.

RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

Inclusión
Se dice que el conjunto A está incluido en otro conjunto B, sí y solo sí, todo elemento de A es también un elemento de B.

Notación matemática: $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$

Significado de: A $\subset$ B

"A es subconjunto de B" "A está incluido en B"
"A es parte de B" "B es superconjunto de A"

Observaciones

i. Todo conjunto está incluido en sí mismo.

$A \subset A; \forall A$

ii. Convencionalmente, el conjunto vacío se considera incluido en cualquier conjunto.

$\varnothing \subset A; \forall A$

iii. Si el conjunto A está incluido en B y es distinto de B, entonces el conjunto A es subconjunto propio de B.

Ejemplo:
Dado el conjunto: A = {3; 4; 5}
Determinar:
a) Subconjuntos de A
b) Subconjuntos propios de A

Resolución:

a) Hallamos los subconjuntos de A:

$\underbrace{\varnothing}_{\text{Vacío}}$; $\underbrace{\{3\}; \{4\}; \{5\}}_{\text{Unitarios}}$; $\underbrace{\{3; 4\}; \{3; 5\}; \{4; 5\}}_{\text{Binarios}}$; $\underbrace{\{3; 4; 5\}}_{\text{Ternario}}$

Son 8 subconjuntos. ($8 = 2^3$)

b) Hallamos los subconjuntos propios de A:

$\underbrace{\varnothing}_{\text{Vacío}}$; $\underbrace{\{3\}; \{4\}; \{5\}}_{\text{Unitarios}}$; $\underbrace{\{3; 4\}; \{3; 5\}; \{4; 5\}}_{\text{Binarios}}$

Son 7 subconjuntos propios. ($2^3 - 1$)

En general:
Si el conjunto A tiene "n" elementos, entonces tendrá "2^n" subconjuntos y "$2^n - 1$" subconjuntos propios.

Ejemplo:
Si el conjunto A tiene 1024 subconjuntos y tiene 3 elementos más que B, determinar:

a) El número de subconjuntos de B.
b) El número de subconjuntos propios de B.

Resolución:
Hallamos el número de elementos de A.
A tiene $1024 = 2^{10}$ subconjuntos $\Rightarrow$ n(A) = 10
Luego: n(B) = 10 − 3 = 7

a) Número de subconjuntos de B:
$2^7 = 128$ subconjuntos

b) Número de subconjuntos propios de B:
$2^7 - 1 = 127$ subconjuntos propios

Igualdad de conjuntos
Se dice que dos conjuntos son iguales, si éstos tienen los mismos elementos.

Notación matemática: $(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$

Ejemplo:
Sean los conjuntos:
A = {a; e; i; o; u}; B = {x/x es una vocal}

Los conjuntos A y B tienen los mismos elementos.

$\therefore$ A = B

Conjuntos disjuntos

Dos conjuntos son disjuntos cuando no tienen elementos comunes.

Ejemplo:

Sean los conjuntos:

A = {x/x es un número par}; B = {x/x es un número impar}

Luego, los conjuntos A y B no tienen los mismos elementos, por lo tanto, son disjuntos.

Conjunto potencia

El conjunto "potencia de A", denotado por P(A) o Pot(A), es el conjunto formado por todos los subconjuntos de A.

Ejemplo:

Dado el conjunto A = {a; b; c}

Los subconjuntos de A:

$\varnothing$; {a}; {b}; {c}; {a; b}; {a; c}; {b; c}; {a; b; c}

Luego, el conjunto potencia de A, será:

P(A) = { {$\varnothing$}; {a}; {b}; {c}; {a; b}; {a; c}; {b; c}; {a; b; c}}

Del ejemplo anterior, podemos deducir:

i) b es elemento de A: $b \in A$
ii) {b} está incluido en A: $\{b\} \subset A$
iii) {b} es elemento de Pot(A): $\{b\} \in P(A)$
iv) {{b}} está incluido en la potencia de A: $\{\{b\}\} \subset P(A)$

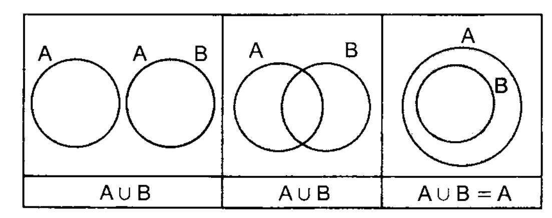
◀ OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Unión o reunión: $A \cup B$

El conjunto "A unión B", es el conjunto formado por los elementos de "A" o los elementos de "B".

Notación matemática: $A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$

Gráficamente:

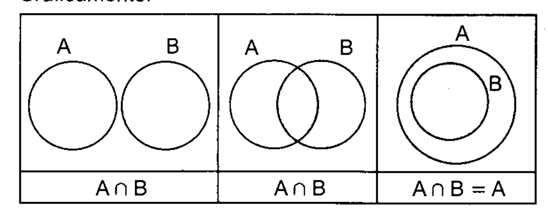


Intersección: $A \cap B$

El conjunto "A intersección B", es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a "A" y pertenecen a "B".

Notación matemática: $A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$

Gráficamente:

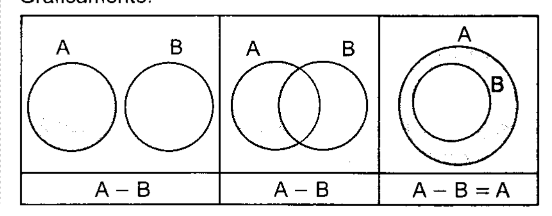


Diferencia: A – B

El conjunto "A menos B", es el conjunto formado por los elementos de "A" que no están en "B".

Notación matemática: $A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$

Gráficamente:

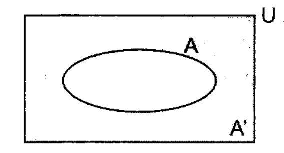


Complemento de A: A'; A^c; $\complement A$; $\overline{A}$

El conjunto "complemento de A", es el conjunto formado por los elementos del universo que no están en A.

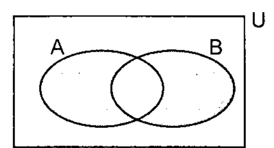
Notación matemática: $A' = \{x/x \notin A\}$

Gráficamente:



Diferencia simétrica: $A \Delta B$

I. $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$
II. $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$



Conjunto producto: $A \times B$

El conjunto "A por B", es el conjunto formado por los pares ordenados (a; b), donde la primera componente "a" es elemento de A y la segunda componente "b" es elemento de B.

Notación matemática: $A \times B = \{(a;b) \,/\, a \in A \wedge b \in B\}$

Ejemplo:

Sean los conjuntos: A = {4; 5; 6}; B = {3; 1}

Hallar el conjunto A × B.

Resolución:

Hallamos los elementos de $A \times B$.

$A = \{4; 5; 6\}$, $B = \{3; 1\}$

Luego: $A \times B = \{(4; 3), (4; 1), (5; 3), (5; 1), (6; 3), (6; 1)\}$

I. El número de elementos del conjunto $A \times B$, es igual al producto del número de elementos de A por el número de elementos de B.

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$$

II. El conjunto $A \times B$ es diferente del conjunto $B \times A$, a menos que A y B sean iguales.

$$A \times B \neq B \times A$$

LEYES Y PROPIEDADES DEL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

Idempotencia:

$A \cup A = A$; $A \cap A = A$

Conmutativa:

$A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$; $A \Delta B = B \Delta A$

Asociativa:

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

Distributiva:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Elementos neutros:

$A \cup U = U$; $A \cap U = A$

$A \cup \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$

Complemento:

$A \cup A' = U$

$U' = \varnothing$; $\varnothing' = U$; $(A')' = A$

Leyes de Morgan:

$(A \cup B)' = A' \cap B'$; $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Diferencia de conjuntos:

$A - B = A \cap B'$; $A - B = B' - A'$

Absorción:

$A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$

Número cardinal de la unión de conjunto:

Son dos resultados notables:

I. Para dos conjuntos:
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

II. Para tres conjuntos:
$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Sea: $M = \left\{ \left(\frac{x^2+1}{2}\right) \in \mathbb{Z} / x \in \mathbb{Z} \wedge -7 \leq x \leq 9 \right\}$

Indicar la suma de los elementos de M.

Resolución:

Como: $x \in \mathbb{Z} \wedge -7 \leq x \leq 9$

Los valores de x serán: $x = \{-7; -6; ... ; 8; 9\}$

Para que la expresión: $\left(\frac{x^2+1}{2}\right)$ sea un número entero, los valores de x son: $-7; -5; -3; ... ; 7; 9$ (solo números impares).

Reemplazando cada uno de los valores de x, los elementos diferentes de M, son:

$M = \{25; 13; 5; 1; 41\}$

$\therefore \Sigma$ elementos $= 25 + 13 + 5 + 1 + 41 = 85$

2. Determinar por comprensión el siguiente conjunto:

$$D = \left\{\frac{4}{7}; \frac{9}{12}; \frac{16}{19}; \frac{25}{28}; ...; \frac{400}{403}\right\}$$

Resolución:

Los elementos en forma equivalente:

$$\left\{\frac{2^2}{2^2+3}; \frac{3^2}{3^2+3}; \frac{4^2}{4^2+3}; ...; \frac{20^2}{20^2+3}\right\}$$

$\therefore$ El conjunto D, por comprensión, es:

$$D = \left\{ \left(\frac{x^2}{x^2+3}\right) / x \in \mathbb{Z} \wedge 2 \leq x \leq 20 \right\}$$

3. Se define la operación "*" entre conjuntos:

$$A * B = \overline{A} \cap B$$

Si: $U = \{x \in \mathbb{Z} / -2 \leq x \leq 2\}$, conjunto universal;
$M = \{(x-2) / 3 < x \leq 4; x \in \mathbb{Z}\}$,
$N = \{x \in \mathbb{Z} / 1 \leq x + 2 \leq 3\}$,
$P = \varnothing$

Hallar: $P * (M * N)$

Resolución:

Los respectivos elementos:

$U = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$, $M = \{2\}$,

$N = \{-1; 0; 1\}$, $P = \varnothing$

La operación: $A * B = \overline{A} \cap B = B - A$

Luego: $M * N = N - M = N$

Finalmente: $P * \underbrace{(M * N)}_{N} = N - P = \underset{\varnothing}{N}$

∴ Resulta: N.

4. ¿Cuántos tipos de jugo surtido se pueden preparar, si se dispone de 6 clases de fruta?

Resolución:

Sea el conjunto que contiene 6 clases de fruta:

$F = \{f_1; f_2; ...; f_6\} \Rightarrow n(F) = 6$

Hallamos el total de jugos surtidos:

$2^6 - \underset{\varnothing}{1} - \underset{\text{Unitario}}{6} = 57$

∴ Son 57 tipos de jugo surtido.

5. Se tiene "n" pinturas de "n" colores básicos y se desea obtener 1013 nuevos tonos, combinando partes iguales de 2; 3; 4; 5; ...; n colores. Hallar "n".

Resolución:

Con "n" colores básicos, la cantidad de nuevos tonos, son: $2^n - \underset{\varnothing}{1} - \underset{\text{Unitario}}{n}$

Por dato: $2^n - 1 - n = 1013$

$2^n - n = 1014 = 2^{10} - 10 \quad \therefore n = 10$

6. Se define el operador # de la siguiente forma:

$A \# B = \{x/x \in A' \wedge x \notin (B - A)\}$; A y B son conjuntos no nulos. Determinar si las siguientes proposiciones son V o F.

I. $A \# U = A'$

II. $A \# \varnothing = \varnothing$

III. $A \# (B \# C) = (A \# B) \# C$

IV. $A \cap (B \# C) = [(A \cup B) \# (A \cup C)] \cap (B \cup C)$

Resolución:

Como: $A \# B = \{x/x \in A' \wedge \underbrace{x \notin (B - A)}_{x \in (B - A)'}\}$

Luego: $x \in [A' \cap (B - A)'] \Rightarrow x \in (A' \cap \underbrace{(B \cap A')'}_{})$

$A' \cap (B' \cup A)$

$\underbrace{(A' \cap B')}_{(A \cup B)'} \cup \underbrace{(A' \cap A)}_{\varnothing}$

$\Rightarrow A \# B = (A \cup B)'$

Analizando cada proposición:

I. $A \# U = A'$

$(A \cup U)' = (U)' = \varnothing \neq A'$; (F)

II. $(A \# \varnothing) = \varnothing$

$(A \cup \varnothing)' = (A)' \neq \varnothing$; (F)

III. $A \# (B \# C) = (A \# B) \# C$

$A' \cap (B \cup C)' \neq (A \cup B) \cap C'$; (F)

IV. Efectuando: $A \cap B' \cap C' \neq \varnothing$; (F)

7. Un conjunto P tiene "n" elementos y un conjunto Q que tiene "2n" elementos, origina 992 subconjuntos más que P. ¿Cuántos subconjuntos tiene el complemento de P, si se sabe que "P ∩ Q" tiene 3 elementos y que el complemento de Q tiene 64 subconjuntos?

Resolución:

Por datos: $n(P) = n$; $n(Q) = 2n$

También: subc. Q − subc. P = 992

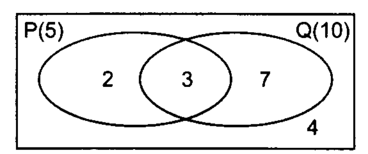
$2^{2n} - 2^n = 992$

$2^n(2^n - 1) = 32(31) = 2^5(2^5 - 1) \Rightarrow n = 5$

$\Rightarrow n(P) = 5; n(Q) = 10$

Además: $Q' = 64 = 2^6$ subc. $\Rightarrow n(Q') = 6$

Luego:



Vemos que: $n(P') = 11$

∴ P' tiene $2^{11} = 2048$ subconjuntos.

8. Dados los conjuntos:

$A = \{2; 3; 5; 6; 8\}$; $B = \{0; 1; 2; 4; 5; 7; 9\}$

Si "m" es el número de subconjuntos no vacíos de A que son disjuntos con B y "n" el número de subconjuntos no vacíos de B que son disjuntos con A. Hallar: m + n.

Resolución:

Subconjuntos no vacíos de A, disjuntos con B:

$A - B = \{3; 6; 8\} \Rightarrow m = 2^3 - 1 = 7$ subconjuntos.

Subconjuntos no vacíos de B, disjuntos con A:

$B - A = \{0; 1; 4; 7; 9\}$

$\Rightarrow n = 2^5 - 1 = 31$ subconjuntos

∴ $m + n = 38$

9. Dados los conjuntos:

$A = \{2^n; m^2 - 5\}$; $B = \{2^n + 3; 5^n\}$;

$C = \{x \in \mathbb{N} / n < x < m + n\}$

Siendo: $A = B$ y $m > n$

¿Qué podemos afirmar del conjunto C?

A) Es un conjunto vacío.
B) Es un conjunto singletón.
C) El cardinal es 2.
D) El cardinal es 3.
E) No se puede afirmar nada.

Resolución:

Como: A = B

Tenemos: $2^n = 5^n \Rightarrow n = 0$;

Por tanto: $m^2 - 5 = 2^0 + 3 \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow m = \pm 3$

De: $C = \{x \in \mathbb{N} / n < x < m + n\}$

$C = \{x \in \mathbb{N} / 0 < x < 3\} = \{1; 2\}$

∴ $n(C) = 2$

10. Dados los conjuntos A, B y C subconjuntos del conjunto de los números naturales:

$A = \{2x/x \in \mathbb{N}, x < 6\}$; $B = \left\{\frac{y+4}{2}/y \in A\right\}$;

$C = \left\{\frac{2m+1}{3}/m \in B\right\}$

¿Cuántos elementos tiene C?

Resolución:

De: $A = \{2x/x \in \mathbb{N} \wedge x < 6\}$

Los valores de x: $x = \{1; 2; ... ; 5\}$

Los elementos de A: $A = \{2; 4; 6; 8; 10\}$

Hallamos B, si $y \in A$: $y = \{2; 4; 6; 8; 10\}$

Hallamos los elementos de B: $B = \{3; 4; 5; 6; 7\}$

Hallamos C, si $m \in B$: $m = \{3; 4; 5; 6; 7\}$

Los valores de m que hacen $\frac{2m+1}{3}$ un número natural: $m = \{4; 7\}$

Luego, los elementos de C: $C = \{3; 5\}$

$\therefore$ n(C) = 2

11. Sean a, b y c números enteros tales que:

$k = a + b + c$.

Si: $\{a^2 + 9; b - c - 5\} = \{-1; -6a; a^2 + b^2 - 7\}$

hallar la suma de todos los valores de k.

Resolución:

De la igualdad de conjuntos, tenemos:

- $a^2 + 9 = -6a \Rightarrow a^2 + 6a + 9 = 0$
  $(a + 3)^2 = 0 \Rightarrow a = -3$
- $a^2 + 9 = a^2 + b^2 - 7$
  $16 = b^2 \Rightarrow b = \pm 4$
- $b - c - 5 = -1$
  $b - c = 4$
  Si: $b = 4 \Rightarrow 4 - c = 4 \Rightarrow c = 0$
  Si: $b = -4 \Rightarrow -4 - c = 4 \Rightarrow c = -8$

Luego, las soluciones de:

i) $a = -3$; $b = 4$; $c = 0 \Rightarrow k_1 = -3 + 4 + 0 = 1$

ii) $a = -3$; $b = -4$; $c = -8 \Rightarrow k_2 = -3 - 4 - 8 = -15$

$\therefore$ Suma de los valores de k: $1 - 15 = -14$

12. Dados los conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{N} / 1 \leq x < 6\}$; $B = \{-2; -1; 0; 5; 6\}$

Hallar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

I. $\forall\ x \in A; \exists\ y \in B / x + y < 3$

II. $\exists\ y \in B; \forall\ x \in A / x - y > 1$

III. $\forall\ x \in B; \exists\ y \in A$, si se cumple: $x < y \Rightarrow x^2 < y^2$

IV. $\exists\ x \in A, \exists\ y \in B / (x - y) \in A$.

Resolución:

De A:

$A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; $B = \{-2; -1; 0; 5; 6\}$

Analizando los valores de verdad:

I. $\forall\ x \in A; \exists\ y \in B / x + y < 3$: (F)
El único $y \in B$ ($y = -2$) no cumple con todos los de A.

II. $\exists\ y \in B; \forall x \in A / x - y > 1$: (V)
Al menos $y = -1 \in B$ cumple con todos los de A.

III. $\forall\ x \in B; \exists\ y \in A$, si se cumple: $x < y \Rightarrow x^2 < y^2$: (F)
No todos los $x \in B$ cumplen ($36 < 25$)

IV. $\exists\ x \in A; \exists\ y \in B / (x - y) \in A$: (V)
Si: $x = 4$; $y = -1 \Rightarrow x - y = 5 \in A$

13. Sean los conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{Z} / x = (-1)^n; n \in \mathbb{Z}\}$;

$B = \{y \in \mathbb{Z} / y^2 = (y - 3)^2 - 3\}$;

$C = \{z \in \mathbb{Z} / \frac{3z}{2} + 3 = 2z + \frac{7}{2}\}$

¿Qué relación se cumple entre ellos?

Resolución:

De A: $\{x \in \mathbb{Z} / x = (-1)^n; n \in \mathbb{Z}\}$

Si: n = par $\Rightarrow (-1)^n = 1$
Si: n = impar $\Rightarrow (-1)^n = -1$ $\Big\}$ $A = \{-1; 1\}$

De B: $\{y \in \mathbb{Z} / y^2 = (y - 3)^2 - 3\}$

Resolvemos:

$y^2 = y^2 - 6y + 9 - 3 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow B = (1)$

$y = 1 \Rightarrow B = \{1\}$

De C: $\left\{z \in \mathbb{Z} / \frac{3z}{2} + 3 = 2z + \frac{7}{2}\right\}$

Resolvemos:

$\frac{3z}{2} + 3 = 2z + \frac{7}{2} \Rightarrow z = -1 \Rightarrow C = \{-1\}$

$\therefore A = B \cup C$

14. Los conjuntos A y B están incluidos en un conjunto universal de 12 elementos, cumpliéndose que: $n[P(A)'] = 128$ y $n[P(B - A)] = 16$.

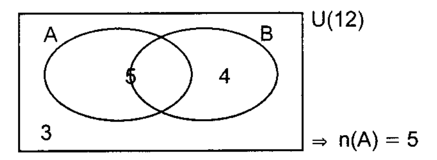
¿Cuántos subconjuntos tiene el conjunto A?

Resolución:

De: $n[P(A')] = 128 = 2^7 \Rightarrow n(A') = 7$ ...(1)

De: $n[P(B - A)] = 16 = 2^4 \Rightarrow n(B - A) = 4$ ...(2)

De (1) y (2):



$\Rightarrow n(A) = 5$

$\therefore$ n.° de subconjuntos de A: $2^5 = 32$

15. Dado: $A = \left\{\left(\frac{4x+3}{5}\right)/x \in \mathbb{Z} \wedge -2 \leq x \leq 2\right\}$ donde $\textcircled{x}$ indica el menor número entero mayor que x. Calcular la suma de los elementos de A.

Resolución:

Hallamos la expresión: $\frac{4x+3}{5}$

De: $-2 \leq x \leq 2$

Por 4: $-8 \leq 4x \leq 8$

Sumando 3: $-5 \leq 4x + 3 \leq 11$

Entre 5: $-1 \leq \frac{4x+3}{5} \leq 3{,}6$ ...(1)

Pero: $\left(\frac{4x+3}{5}\right)$ es el número entero que se encuentra a su derecha.

De (1): $A = \{0; 1; 2; 3\}$

$\therefore$ Σ elementos: 6

16. Si los pares ordenados $(a^2 + 9; 6)$ y $(-6a; a^2 + b^2 - 7)$ son iguales, determinar la relación.

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 / x = a + b \wedge y = a - b\}$$

Resolución:

Como: $(a^2 + 9; 6) = (-6a; a^2 + b^2 - 7)$

Tenemos:

$a^2 + 9 = -6a \Rightarrow a^2 + 6a + 9 = 0$

$\Rightarrow (a + 3)^2 = 0 \Rightarrow a = -3$

$\Rightarrow a^2 + b^2 - 7$

$6 = a^2 + b^2 - 7 \Rightarrow 6 + 7 = (-3)^2 + b^2$

$\Rightarrow 13 - 9 = b^2 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2$

Pero:

$$x = a + b \Rightarrow x = \begin{cases} -3 + 2 = -1 \\ -3 - 2 = -5 \end{cases} \Rightarrow x = \{-1; -5\}$$

$$y = a - b \Rightarrow y = \begin{cases} -3 - 2 = -5 \\ -3 + 2 = -1 \end{cases} \Rightarrow y = \{-1; -5\}$$

Luego, la relación será:

$R = \{(-1; -1), (-1; -5), (-5; -1), (-5; -5)\}$

17. Si: $n[P(A \cap B)] = 128$; $n[P(A - B)] = 64$; $n[A \times B] = 195$; hallar: $n[B - A]$

Resolución:

De: $n[P(A \cap B)] = 128 = 2^7 \Rightarrow n(A \cap B) = 7$ ...(1)

De: $n[P(A - B)] = 64 = 2^6 \Rightarrow n(A - B) = 6$ ...(2)

De (1) y (2): $n(A) = 13$

De: $n(A \times B) = 195 \Rightarrow \underbrace{n(A)}_{13} \times n(B) = 195$

$\Rightarrow n(B) = 15$ ...(3)

De (1) y (3): $n[B - A] = 15 - 7 = 8$

$\therefore$ $n[B - A] = 8$

18. Sean: $A = \{1; 2; 4\}$; $B = \{3; 4; 5; 6\}$;

$$R = \{(x; y) \in A \times B \;/\; y = x + 2\}$$

Hallar el número de subconjuntos propios de R.

Resolución:

Hallamos los elementos de: $A \times B$.

$A \times B = \{(1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (2; 6), (4; 3), (4; 4), (4; 5), (4; 6)\}$

Hallamos los elementos de R, tal que: $y = x + 2$

La solución será:

$R = \{(1;3), (2;4), (4;6)\} \Rightarrow n(R) = 3$

$\therefore$ R tiene: $2^3 - 1 = 7$ subconjuntos propios.

19. Dados los conjuntos A y B, se sabe que:

$n(A) + n(B) = 50$; $\dfrac{n(B)}{n(A)} = \dfrac{7}{18}$; además:

$n(A - B) = 2n(B)$; hallar: $n(A \cup B)$

Resolución:

De: $n(A) + n(B) = 50$ ...(1)

y: $\dfrac{n(B)}{n(A)} = \dfrac{7}{18}$ ...(2)

Tenemos: $n(A) = 36$; $n(B) = 14$

Además: $n(A - B) = 2(14) = 28$

$\Rightarrow n(A \cap B) = 36 - 28 = 8$

Pero: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$\therefore$ $n(A \cup B) = 36 + 14 - 8 = 42$

20. Se tiene un conjunto de 7 elementos. ¿Cuántos subconjuntos no ternarios y diferentes se podrán formar?

Resolución:

Sea A el conjunto, tal que:

$n(A) = 7 \Rightarrow$ subconjuntos de $A = 2^7 = 128$

Hallamos el número de subconjuntos ternarios:

$$\binom{n}{3} = \frac{7!}{3!.4!} = 35$$

$\therefore$ Número de subconjuntos no ternarios:

$128 - 35 = 93$.

21. Hallar el número de elementos que tiene el conjunto A, sabiendo que: El número de sus subconjuntos ternarios, excede en 14 a su número de subconjuntos binarios.

Resolución:

Sea "n" el número de elementos del conjunto A.

Por dato:

$$\left(\begin{matrix}\text{n.° subconjunt.}\\ \text{ternarios de A}\end{matrix}\right) - \left(\begin{matrix}\text{n.° subconjunt.}\\ \text{binarios de A}\end{matrix}\right) = 14$$

Reemplazando:

$$\binom{n}{3} - \binom{n}{2} = 14 \Rightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!} - \frac{n!}{2!(n-2)!} = 14$$

Efectuando:

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{6(n-3)!} - \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = 14$$

Reduciendo:

$n(n - 1)(n - 5) = 84 = 7(6)(2) \Rightarrow n = 7$

$\therefore$ El conjunto A tiene 7 elementos.

22. Si los números cardinales de los conjuntos: A; B y C forman una progresión aritmética, hallar el número de elementos que puede tener como máximo el conjunto potencia de:

$(A \cup B \cup C)$; si: $n[P(A)] + n[P(B)] + n[P(C)] = 672$

Resolución:

Sean, los números cardinales en PA:

$n(A) = a$; $n(B) = a + r$; $n(C) = a + 2r$

pero: $n[P(A)] + n[P(B)] + n[P(C)] = 672$

Reemplazando: $2^a + 2^{a+r} + 2^{a+2r} = 672$
Factorizando:
$2^a[1 + 2^r + 2^{2r}] = 32(21) \Rightarrow a = 5; r = 2$
Luego: n(A) = 5; n(B) = 7; n(C) = 9
El número máximo de:
$n(A \cup B \cup C) = 5 + 7 + 9 = 21$
$\therefore$ El máximo de: $n[Pot(A \cup B \cup C)] = 2^{21}$

23. En una ciudad el 40% de la población fuma, el 35% de la población bebe y el 70% de los que fuman, beben. ¿Qué porcentaje de la población no fuma ni bebe?

Resolución:

Sea 100 el total de la población:
Fuman: n(F) = 40; Beben: n(B) = 35
Fuman y beben: $n(F \cap B) = 70\%(40) = 28$
Fuman o beben: $n(F \cup B) = 40 + 35 - 28 = 47$
No fuman ni beben $n(F \cup B)' = 100 - 47 = 53$
$\therefore$ El 53% de la población no fuma ni bebe.

24. En una reunión se observa que el 70% de las personas hablan castellano, 120 inglés; y el 10% de las personas hablan inglés y castellano. ¿Cuántas personas hablan solamente castellano?

Resolución:

Sea 100 el total de personas. (Falsa suposición)
Hablan castellano: n(C) = 70
Hablan inglés: n(I) = ?
Hablan inglés y castellano: $n(I \cap C) = 10$
Pero:
$n(I \cup C) = 100 \Rightarrow n(I) + n(C) - n(I \cap C) = 100$
$\Rightarrow n(I) + 70 - 10 = 100 \Rightarrow n(I) = 40$
Hablan solo castellano: $n(C - I) = 60$
Comparando:

	Hablan inglés	Hablan solo castellano
F.S.:	40 ———	60
Real:	120 ———	x

$$\Rightarrow \frac{120(60)}{40} = 180$$

$\therefore$ 180 personas hablan solamente castellano.

25. Determinar: $n[Pot(A \cap B)]$, si:

$$A = \left\{\left(\frac{3x+1}{4}\right) \in \mathbb{Z} \;/\; 20 \le x^2 \le 100;\; x \in \mathbb{Z}\right\};$$

$$B = \left\{y = \frac{x+2}{3} \;/\; y \in \mathbb{Z}^+ \wedge 5 \le x \le 10\right\}$$

Resolución:

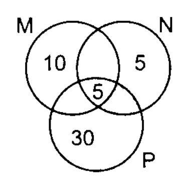
De A: $20 \le x^2 \le 100 \wedge x \in \mathbb{Z}$
Valores de x: $x = \pm\{5; 6; 7; 8; 9; 10\}$
Hallamos los elementos de A, reemplazando los valores de x en $\left(\frac{3x+1}{4}\right) \in \mathbb{Z}$: A = {4; 7; −5}

De B: $5 \le x \le 10 \Rightarrow \frac{7}{3} \le \frac{x+2}{3} \le 4$
Hallamos los elementos de B:
$B = \{3; 4\} \Rightarrow A \cap B = \{4\}$
$\therefore n[Pot(A \cap B)] = 2^1 = 2$ subconjuntos.

26. Sean M, N y P tres conjuntos contenidos en un universo finito de 60 elementos. Si: $(M - N) \cup (P - N)$ tiene 40 elementos; el conjunto $M - (N \cup P)$ tiene 10 elementos; la intersección de los tres conjuntos tiene 5 elementos; el conjunto $(N \cap P) - M$ es vacío. ¿Cuántos subconjuntos propios tiene $M^C \cap N^C \cap P^C$, si $N - P$ tiene 5 elementos?

Resolución:

Haciendo el diagrama de Venn:



Vemos que: $n(M \cup N \cup P) = 50$
Pero:
$M^C \cap N^C \cap P^C = (M \cup N \cup P)^C$. (Ley de De Morgan)
$n(M \cup N \cup P)^C = 60 - 50 = 10$
$\therefore$ Cantidad de subconjuntos propios: $2^{10} - 1 = 1023$

27. Si: M = {a + b; 12; 2a − 2b + 4} es un conjunto unitario.
Además: $S = \{x/x = ak;\ k \in \mathbb{Z}\}$; $G = \{x/x = bk;\ k \in \mathbb{Z}\}$
Hallar: $S \cap G$

Resolución:

Como:

$$n(M) = 1 \begin{cases} a + b = 12 & \text{...(1)} \\ 2a - 2b + 4 = 12 \Rightarrow a - b = 4 & \text{...(2)} \end{cases}$$

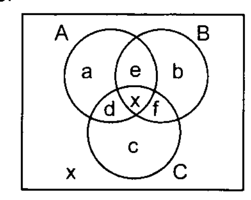
De (1) y (2): a = 8; b = 4
En: $S = \{x/x = 8k;\ k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow$ múltiplos de 8
En: $G = \{x/x = 4k;\ k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow$ múltiplos de 4
$S \cap G$ = {múltiplos de 8} $\cap$ {múltiplos de 4}
$S \cap G$ = {múltiplos de 8}
$\therefore S \cap G = \{x/x = 8k;\ k \in \mathbb{Z}\}$

28. Se rindió 3 exámenes para aprobar un curso y se observó lo siguiente: el número de los que aprobaron los 3 exámenes es igual al número de los que desaprobaron los 3 exámenes e igual a 1/3 de los que aprobaron solo 2 exámenes e igual a 1/5 de los que aprobaron solo un examen. ¿Qué porcentaje del total de los alumnos aprobaron el curso, si para aprobarlo es necesario que aprueben por lo menos 2 exámenes?

Resolución:

Sea 100 el total de alumnos:

Por datos:



Aprobaron exactamente dos exámenes

$$d + e + f = 3x$$

Aprobaron exactamente un examen:

$$a + b + c = 5x$$

Además: $\underbrace{a + b + c}_{5x} + \underbrace{d + e + f}_{3x} + 2x = 100 \Rightarrow x = 10$

Aprobaron por lo menos 2 cursos:

$\underbrace{d + e + f}_{3x} + x = \underset{\downarrow \atop 10}{4x} \Rightarrow 40$

∴ El 40% aprobó al menos 2 cursos.

29. Si: $A = \{1; 2; \{3\}\}$ y $B = \{\{3\}; 1; 4; \{1; 2\}\}$ encontrar el cardinal de C, donde:

$C = \{ x/x \in P(A); x \subset B; x \neq \varnothing \}$

Resolución:

De: $C = \{ x/x \in P(A), x \subset B; x \neq \varnothing \}$

Los elementos de "C"; cumplen:

- Subconjuntos de A
- Subconjuntos de B
- No vacío

Entonces: $A \cap B = \{1; \{3\}\}$

Subconjuntos no vacíos de: $A \cap B = 2^2 - 1 = 3$

∴ $n(C) = 3$

30. Nathaly comenta: "El 70% de los profesores son simpáticos, el 70% son excelentes y el 70% son jóvenes". ¿Cuál es, como mínimo, el porcentaje de profesores simpáticos, excelentes y jóvenes?

Resolución:

Sea 100 el número de profesores, tal que:

Profesores simpáticos (S): $n(S) = 70$

Profesores excelentes (E): $n(E) = 70$

Profesores jóvenes (J): $n(J) = 70$

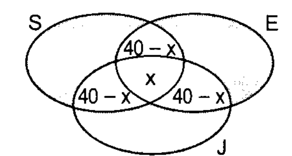
Hallamos el número de profesores que tienen dos de las cualidades mencionadas:

$n(S \cap E) = 70 + 70 - 100 = 40$

$n(S \cap J) = 70 + 70 - 100 = 40$

$n(E \cap J) = 70 + 70 - 100 = 40$

Haciendo un diagrama:



Sea x, el menor número de profesores que tienen las 3 cualidades, entonces:

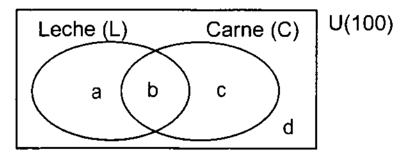
$(40 - x)3 + x = 100 \Rightarrow x = 10$

∴ El % mínimo de profesores simpáticos, excelentes y jóvenes: 10%.

31. En un censo se determinó que: el 60% de los niños de una ciudad toma leche, el 70% no come carne; los que toman leche y comen carne sumados con los que no toman leche ni comen carne son el 40%, y 9000 niños comen carne pero no toman leche. ¿Cuántos niños hay en dicha ciudad?

Resolución:

Sea 100 el número de niños:



Del enunciado:

Toman leche: $a + b = 60$

No comen carne: $a + d = 70$

Toman L y C, con los que no toman L ni comen C.: $b + d = 40$

Sumando m.a.m.:

$2(a + b + d) = 170 \Rightarrow a + b + d = 85$ ...(1)

$a + b + c + d = 100$ ...(2)

De (1) y (2): $c = 15$

	comen carne	comen carne pero no toman leche
F.S.:	100 ———	15
Real:	x ———	9000

$$\Rightarrow x = \frac{100(9000)}{15} = 60\,000$$

32. Según las preferencias de 420 personas que ven los canales A, B o C, se observa que 240 no ven el canal A; 180 no ven el canal B, 150 no ven el canal C, los que ven por lo menos 2 canales son 230. ¿Cuántos ven los 3 canales?

Resolución:

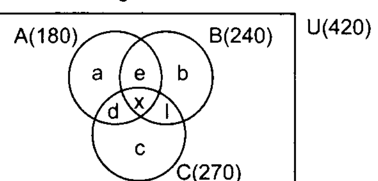
Se tiene: $n(U) = 420$

Además: $n(A') = 240 \Rightarrow n(A) = 420 - 240 = 180$

$n(B') = 180 \Rightarrow n(B) = 420 - 180 = 240$

$n(C') = 150 \Rightarrow n(C) = 420 - 150 = 270$

Haciendo un diagrama:



Tenemos: $a + b + c + d + e + f + x = 420$ ...(1)
Además: $d + e + f + x = 230$ ... (2)

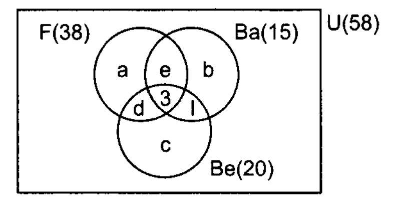
(2) en (1):
$a + b + c + 230 = 420 \Rightarrow a + b + c = 190$

También:
$$a + d + e + x = 180$$
$$b + e + f + x = 240$$
$$c + d + f + x = 270$$
$$\underbrace{a + b + c}_{190} + 2(\underbrace{d + e + f + x}_{230}) + x = 690 \Rightarrow x = 40$$

$\therefore$ 40 personas ven los 3 canales

33. Un determinado colegio tiene 38 jugadores de fútbol, 15 de básquet y 20 de béisbol. Si el número de jugadores es 58 y solo tres de ellos figuran en los tres deportes, ¿cuántos figuran exactamente en un deporte?

Resolución:



Del enunciado:
Se tiene: $a + b + c + d + e + f = 55$ ...(1)
También:
$$a + d + e = 35$$
$$b + e + f = 12$$
$$c + d + f = 17$$
$$(a + b + c + d + e + f) + d + e + f = 64$$
$$\Rightarrow 55 + d + e + f = 64 \Rightarrow d + e + f = 9$$

En (1): $a + b + c = 55 - 9 = 46$

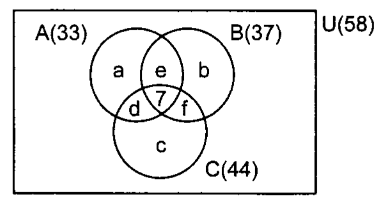
$\therefore$ Figuran exactamente en un deporte: 46 jugadores.

34. Para estudiar la calidad de un producto se consideran tres defectos A; B y C como los más importantes. Se analizaron 100 productos con el siguiente resultado:

33 productos tienen el defecto A
37 productos tienen el defecto B
44 productos tienen el defecto C
53 productos tienen exactamente 1 defecto
7 productos tienen exactamente 3 defectos

¿Cuántos productos tienen exactamente 2 defectos?

Resolución:
Haciendo un diagrama:



Tienen exactamente un defecto: $a + b + c = 53$
Tienen exactamente dos defectos: $d + e + f = ?$

Vemos que: $a + b + c + d + e + f = 93$
También:
$$a + d + e = 26$$
$$b + e + f = 30$$
$$c + d + f = 37$$
$$(a + b + c) + 2(d + e + f) = 93$$
$$53 + 2(d + e + f) = 93$$
$$\Rightarrow d + e + f = 20$$

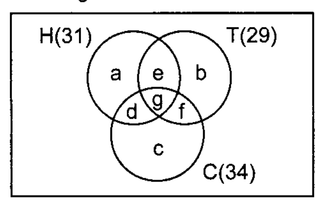
$\therefore$ 20 productos tienen exactamente dos defectos.

35. De un grupo de turistas:

- 31 visitaron Huaraz.
- 29 visitaron Trujillo.
- 34 visitaron Cuzco.
- 38 visitaron solo y nada más que un lugar.
- 22 visitaron exactamente 2 lugares.

¿Cuántos visitaron los 3 lugares y cuántos eran en total?

Resolución:
Haciendo un diagrama:



Visitaron exactamente un lugar: $a + b + c = 38$
Visitaron exactamente dos lugares: $d + e + f = 22$
Además:
$$a + d + e + g = 31$$
$$b + e + f + g = 29$$
$$c + d + f + g = 34$$
$$(a + b + c) + 2(d + e + f) + 3g = 94$$

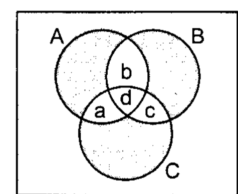
$\Rightarrow 38 + 2(22) + 3g = 94 \Rightarrow g = 4$

Hallamos el total:
$(a + b + c) + (d + e + f) + g \Rightarrow 38 + 22 + 4 = 64$

$\therefore$ Visitan los 3 lugares: 4, y en total son: 64 turistas

36. De 100 personas que leen por lo menos 2 de 3 revistas A, B y C; se observa que: 40 leen la revista A y B, 50 leen B y C y 60 leen A y C. ¿Cuántas personas leen las 3 revistas?

Resolución:



Del enunciado, leen
Por lo menos 2 de 3 revistas.

Vemos que: $a + b + c + d = 100$

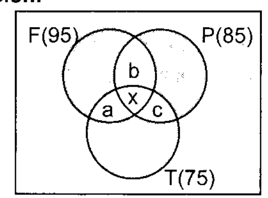
$$n(A \cap B) = 40 \Rightarrow b + d = 40$$
$$n(B \cap C) = 50 \Rightarrow c + d = 50$$
$$n(A \cap C) = 60 \Rightarrow a + d = 60$$
$$\overline{(a + b + c + d) + 2d = 150}$$

$\Rightarrow 100 + 2d = 150 \Rightarrow d = 25$

$\therefore$ 25 personas leen las 3 revistas.

37. De 110 jugadores, 95 se dedican al fútbol, 85 al polo y 75 al tenis. ¿Cuál es la mínima cantidad de deportistas que se dedican a los tres deportes mencionados?

Resolución:



Para que el número de deportistas que practican los tres deportes sea mínimo: $a + b + c + x = 110$

Además:
$$a + b + x = 95$$
$$b + c + x = 85$$
$$a + c + x = 75$$
$$\overline{2(a + b + c + x) + x = 255}$$

$\Rightarrow 2(110) + x = 255 \Rightarrow x = 35$

$\therefore$ Se dedican a los tres deportes, como mínimo, 35 deportistas.

38. De 500 postulantes que se presentaron a UNI y/o a Católica, 300 lo hicieron a Católica, igual número a UNI; ingresando la mitad del total de postulantes. Los no ingresantes se presentaron a San Martín; de éstos, 90 no se presentaron a UNI y 130 no se presentaron a Católica. ¿Cuántos postulantes ingresaron a UNI y a Católica?

Resolución:

Hallamos el número de postulantes que se presentaron a UNI y a Católica:

$n(\text{UNI} \cap \text{Católica}) = 300 + 300 - 500 = 100$

De los no ingresantes (250):

Como: $n(\text{UNI})' = 90 \Rightarrow n(\text{UNI}) = 250 - 90 = 160$

Como: $n(\text{Católica})' = 130$

$\Rightarrow n(\text{Católica}) = 250 - 130 = 120$

Hallamos los que postularon a UNI y a Católica:

$n(\text{UNI} \cap \text{Católica}) = 160 + 120 - 250 = 30$

$\therefore$ Ingresaron a UNI y a Católica: $100 - 30 = 70$.

39. En un salón de clase de 100 alumnos, hay 40 hombres provincianos, 30 mujeres limeñas y el número de mujeres provincianas excede en 10 al número de hombres limeños. ¿Cuántos hombres hay en el aula?

Resolución:

Del enunciado:

	Hombres	Mujeres
Provincianos	40	a + 10
Limeños	a	30

$\Rightarrow 40 + a + a + 10 + 30 = 100 \Rightarrow a = 10$

$\therefore$ Número de hombres: $40 + 10 = 50$

40. De 60 personas sabemos que:

- 6 hombres tienen 20 años.
- 18 hombres no tienen 21 años.
- 22 hombres no tienen 20 años.
- Tantas mujeres tienen 20 años como hombres tienen 21 años.

¿Cuántas mujeres no tienen 20 años?

Resolución:

Usando el diagrama de Carrol:

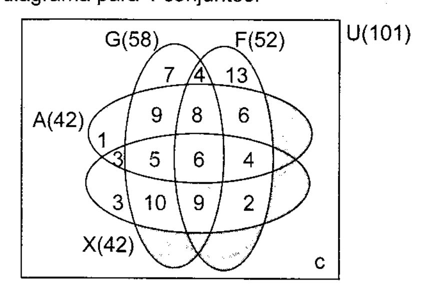
	Hombres	Mujeres
Tiene 20 años	6	10
Tiene 21 años	10	
No tienen ni 20 ni 21 años	12	22
	↓ 28	↓ 32

$\therefore$ 22 mujeres no tienen 20 años

41. Si en un salón se evaluó sus rendimientos llegando a la conclusión que 42 alumnos dominan Aritmética; 42 Álgebra; 58 Geometría; 52 Física; 18 Aritmética y Álgebra; 28 Aritmética y Geometría; 30 Álgebra y Geometría; 21 Álgebra y Física; 27 Física y Geometría; 30 Álgebra y Geometría; 24 Física y Aritmética; 11 Aritmética, Álgebra y Geometría; 10 Aritmética, Álgebra y Física; 15 Álgebra, Física y Geometría; 14 Aritmética, Física y Geometría, y 6, dominan los 4 cursos. ¿Cuántos no dominan ninguno de los 4 cursos, si el salón tiene 101 alumnos?

Resolución:

El diagrama para 4 conjuntos:



Vemos que: $n(A \cup X \cup G \cup F) = 90$

Luego: $90 + c = 101 \Rightarrow c = 101 - 90 = 11$

$\therefore$ No dominan ninguno de los 4 cursos: 11

42. En un hospital, al menos el 75% de los enfermos padecen la enfermedad A; al menos el 80% la enfermedad B; al menos el 85% la enfermedad C y al menos el 90% la enfermedad D. ¿Cuál es el menor porcentaje de enfermos que padecen las 4 enfermedades?

Resolución:

Sea 100 el total de enfermos.

Luego: $n(A) = 75$; $n(B) = 80$; $n(C) = 85$; $n(D) = 90$

Los que tienen D, padecen la enfermedad A, B y C:

$n(A \cap D) = 90 + 75 - 100 = 65$;

$n(B \cap D) = 80 + 90 - 100 = 70$;

$n(C \cap D) = 85 + 90 - 100 = 75$

De los 90 enfermos, que padecen además de 2 enfermedades, son:

$n(A \cap B) = 65 + 70 - 90 = 45$;

$n(A \cap C) = 65 + 75 - 90 = 50$;

$n(B \cap C) = 70 + 75 - 90 = 55$

Sea x, el menor número de enfermos que padecen las 4 enfermedades, se tiene:

$45 - x + 50 - x + 55 - x + x = 90 \Rightarrow x = 30$

$\therefore$ Padecen las 4 enfermedades como mínimo: 30%.

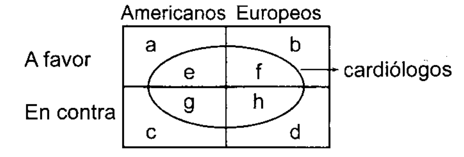
43. En un congreso internacional de Medicina, se debatió el problema de la eutanasia, planteándose una moción:

- 115 europeos votaron a favor.
- 75 cardiólogos votaron en contra.
- 60 europeos votaron en contra.
- 80 cardiólogos votaron a favor.

Si el número de cardiólogos europeos excede en 30 al número de americanos de otras especialidades y no hubo abstenciones; ¿cuántos médicos participaron en el congreso?

Resolución:

Del enunciado, tenemos:



Luego:

$b + f = 115$ ...(1)

$g + h = 75$ ...(2)

$h + d = 60$ ...(3)

$e + f = 80$ ...(4)

$(f + h) - (a + c) = 30$ ...(5)

(1) + (3):

Total de europeos: $b + d + f + h = 175$

(2) + (4):

Total de cardiólogos: $e + f + g + h = 155$

Total de americanos: $a + g + e + c = 125$

$\therefore$ Total de médicos: $175 + 125 = 300$.

44. Un estudiante salió de vacaciones por "n" días, tiempo durante el cual:

I. Llovió 7 veces en la mañana o en la tarde.

II. Cuando llovía en la tarde, estaba despejada la mañana.

III. Hubo 5 tardes despejadas.

IV. Hubo 6 mañanas despejadas.

Según esto, ¿cuántos días de vacaciones fueron?

Resolución:

Sea: L: llueve; D: despejado

mañana		tarde
L	a	D
D	b	L
D	c	D
L	d	L

Del enunciado:

Llovió en la mañana o en la tarde: $a + b = 7$

Tardes despejadas: $a + c = 5$

Mañanas despejadas: $b + c = 6$

Sumando: $2(a + b + c) = 18$

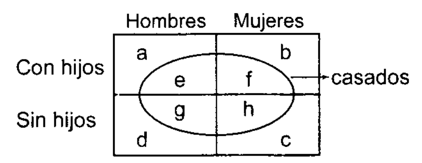
$\Rightarrow a + b + c = 9$

$\therefore$ Las vacaciones duraron: $n = 9$ días.

45. En una reunión donde hay 100 personas se sabe que 40 no tienen hijos, 60 son hombres, 10 mujeres están casadas, 25 personas casadas tienen hijos, hay 5 madres solteras. ¿Cuántos hombres son padres solteros?

Resolución:

Usando el diagrama de Carrol:



Del enunciado:

Tienen hijos:

$a + b + e + f = a + 5 + 25 = 100 - 40 = 60$

$\Rightarrow a = 30$

$\therefore$ Son 30 padres solteros.

46. Si se cumple:

$A = \{x^2/x \in \mathbb{N} \wedge 1 < 2x - 3 \leq 9\}$

$B = \{-x^3/x \in \mathbb{N} \wedge 11 \leq 3x + 2 \leq 17\}$

¿Cuántos subconjuntos propios tiene $(A \Delta B)$?

Resolución:

En A:

$1 < 2x - 3 \leq 9 \Rightarrow 4 < 2x \leq 12 \Rightarrow 2 < x \leq 6$

$x = 3; 4; 5; 6$

$A = \{9; 16; 25; 36\} \Rightarrow n(A) = 4$

En B:

$11 \leq 3x + 2 \leq 17 \Rightarrow 9 \leq 3x \leq 15 \Rightarrow 3 \leq x \leq 5$

$x = 3; 4; 5$

$B = \{-27; -64; -125\} \Rightarrow n(B) = 3$

$m(A \triangle B) = 7$

$\therefore$ N.° subconjuntos propios (A) $= 2^7 - 1 = 127$

47. Sean los conjuntos M y P unitarios, calcule (a + b).

$M = \{\sqrt[3]{a}; 4\}$

$P = \{\sqrt{a} + 3\sqrt{b};\ 17\}$

Resolución:

$\sqrt[3]{a} = 4 \Rightarrow a = 64$ (en el conjunto M)

$\sqrt{64} + 3\sqrt{b} = 17 \Rightarrow b = 9$ (en el conjunto P)

$\therefore a + b = 73$

48. Sean: A, B y C tres conjuntos contenidos en U.

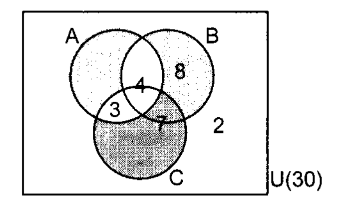
$n(U) = 30$; $n[B - (A \cup C)] = 8$; $n(A \cap B) = 4$

$n(C - A) = 7$; $n[(A \cap C) - B] = 3$; $n[A^c \cap B^c + C^c] = 2$

Calcule $n[A - (B \cup C)]$

Resolución:

Sea el diagrama:



$(A^c \cap B^c \cap C^c) = A \cup B \cup C)^c$

$n[A - (B \cup C)] = x$

$\Rightarrow x + 3 + 4 + 7 + 8 + 2 = 30$

$x = 6 \Rightarrow n[A - (B \cup C)] = 6$

49. De 3 conjuntos A, B y C contenidos en U.

Se sabe:

- $n(P(A + B)) = 1$
- $n(A) = 2n(B)$
- $n[C - (A \cup B)] = 10$
- $n(P(B)) = 1024$
- $n(U) = 50$

Calcule $n[A^c \cap B^c \cap C^c]$

Resolución:

- $n(P(B)) = 2^{n(B)} = 1024 = 2^{10}$

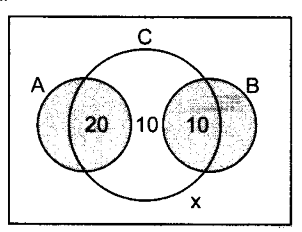
  $n(B) = 10 \Rightarrow n(A) = 20$

- $n(P(A \cap B)) = 2^{n(A \cap B)} = 1 = 2^0$

  $\Rightarrow n(A \cap B) = 0$

$\therefore$ A y B son disconjuntos

Diagrama:



$20 + 10 + 10\ x = 50 \Rightarrow x = 10$

$n[A^c \cap B^c \cap C^c] = n[(A \cup B \cup C)^c] = x = 10$

50. En una conferencia asistieron empresarios peruanos y extranjeros, observándose que estos estaban en la relación de 5 a 3, respectivamente; además:

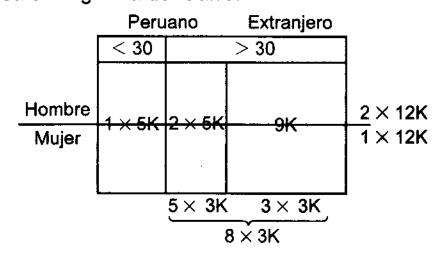
- Los varones y mujeres estaban en la relación de 2 a 1.
- Los peruanos menores de 30 años son la mitad de los peruanos mayores de 30 años
- Hay 76 personas mayores de 30 años

Calcule cuántos varones asistieron, si todo extranjero es mayor de 30 años.

Nota: Ninguna persona tiene 30 años.

Resolución:

Sea el diagrama del Carrol



Personas mayores de 30 años

$10K + 9K = 19K = 76 \Rightarrow K = 4$

Número de hombres: $24K = 24(4) = 96$

51. Si la proposición compuesta $\{[(p \wedge q) \Rightarrow r] \vee [p \Rightarrow (q \wedge \sim q)]\}$ es falsa, hallar los valores de verdad de p, q y r, respectivamente.

Resolución:

$\{\underbrace{[(p \wedge q) \Rightarrow r]}_{F} \vee \underbrace{[p \Rightarrow (q \wedge \sim q)]}_{F}\} \equiv F$

i) Si $\underbrace{(p \wedge q)}_{V} \Rightarrow \underbrace{r}_{F} \equiv F \quad \therefore r = F$

ii) Como $\underbrace{p}_{V} \wedge \underbrace{q}_{V} \equiv V \quad \therefore p = V$

$q = V$

$\therefore$ El valor de p, q, r es VVF.

52. Considere el conjunto A = {5; 4; 3; 2} y las siguientes proposiciones:

I. $\exists x \in A; \exists y \in A / x + y < 6$
II. $\forall x \in A; \exists y \in A / x + y < 10$
III. $\exists x \in A / \forall y \in A: x + y < 10$
IV. $\forall x \in A; \forall y \in A: x + y < 10$

Hallar los correspondientes valores de verdad.

Resolución:

A = {2; 3; 4; 5}

I. $\exists x \in A, \exists y \in A / x + y < 6$
Es verdad, para x = 2, y = 3 (V)

II. $\forall x \in A; \exists y \in A / x + y < 10$
Es verdad, pues: $\forall x \in A; x \leq 5$
$\Rightarrow \forall x \in A: \exists y = 2 / x + y = x + 2 \leq 7$
$\Rightarrow \forall x \in A: \exists y = 2 / x + y < 10$ (V)

III. $\exists x \in A / \forall y \in A: x + y < 10$
Es verdad, pues es equivalente a la proposición anterior
Proposición anterior (V)

IV. $\forall x \in A; \forall y \in A: x + y < 10$
No es cierto, pues para $x = 5 \wedge y = 5$
$5 + 5 = 10 < 10$ es falso (F)

$\therefore$ VVVF

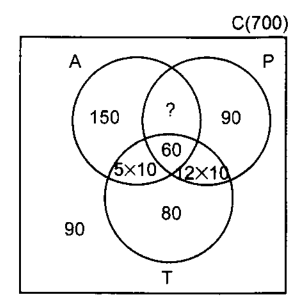
53. La empresa encuestadora IMASEN quiso sondear la preferencia por las comidas: arroz con pollo (A), papa a la huancaína (P), tallarín con pollo (T) y ceviche (C). Al encuestar a 700 personas se obtiene:

- 90 prefieren solo C
- La cantidad de persona que prefieren solo A y C, solo C y P y las que prefieren las 4 comidas son 150, 90 y 60 respectivamente.
- Por cada 5 que prefieren solo A, T y C hay 12 que prefieren solo P, T y C,
- Los que prefieren P, T y C son 180 y de estos la tercera parte también prefieren A.
- Si todos prefieren ceviche y 80 prefieren T y C.

¿Cuántos prefieren solo A, P y C?

Resolución:

Si todos prefieren ceviche en el gráfico sería con los datos dispuestos.



Luego, los que prefieren solo A, P y C son:
700 − (150 + 90 + 60 + 120 + 80 + 50 + 90) = 60

54. Si se cumple que:

$A = \{(x^2 + 1) \in \mathbb{Z} / -2 \leq x < 5\}$
$B = \{(y^2 - 1) / y \in \mathbb{Z}, -3 < y \leq 7\}$
Determinar la suma de elementos de A+B

Resolución:

$A = \{(x^2 + 1) \in \mathbb{Z} / -2 \leq x < 5\}$
$-2 \leq x < 5 \Rightarrow 1 \leq x^2 + 1 < 26$
A = {1; 2; 3; 4; ...; 25}
$B = \{(y^2 - 1) / y \in \mathbb{Z}, -3 < y \leq 7\}$
Reemplazando valores de $-3 < y \leq 7$ que sean enteros en $y^2 - 1$
B = {−1; 0; 3; 8; 15; 24; 35; 48}
Entonces: $A \cap B$ = {3; 8; 15; 24}
Luego nos piden:
3 + 8 + 15 + 24 = 50

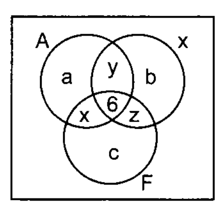
55. En un examen de conocimiento donde se evaluó a una cierta cantidad de alumnos sobre las materias de Aritmética, Álgebra, Física, arrojó los siguientes resultados:

- 15 aprobaron Aritmética
- 14 aprobaron Física
- 8 aprobaron solamente dos cursos
- 12 aprobaron Álgebra
- 6 aprobaron los tres cursos

Calcular la cantidad de alumnos que participaron en la evaluación si todos aprobaron por lo menos en 1 curso.

Resolución:

Haciendo el gráfico:



Por dato:
a + x + y + 6 = 15 ...(α)
b + z + y + 6 = 12 ...(β)
c + x + z + 6 = 14 ...(θ)
También: x + y + z = 8
Sumando (α) + (β) + (θ): a + b + c + 2(8) + 18 = 41
$\Rightarrow$ a + b + c = 7
Nos piden:
(a + b + c) + (x + y + z) + 6 = 7 + 8 + 6 =21

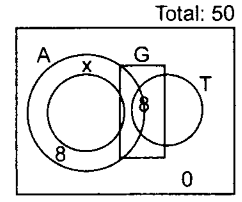
56. De un aula de 50 alumnos, se observa lo siguiente:

- A todos los alumnos que le gusta Álgebra también les gusta Aritmética.

- A los que les gusta Álgebra no les gusta Trigonometría.
- Los que gustan de Aritmética y Trigonometría gusta de Geometría.
- 19 alumnos gustan de Geometría pero no de Trigonometría.
- Los que les gusta solo Aritmética y los que les gusta Geometría y Trigonometría son unos tantos como otros, e igual a 8.

¿Cuántos gustan solo de Aritmética y Álgebra o solo de Trigonometría, sabiendo además que esta cantidad es máxima?

Resolución:



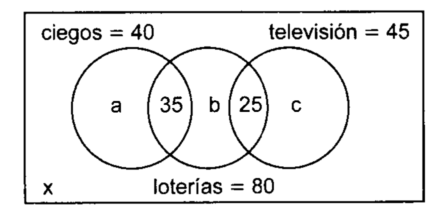
En la zona □ hay 19 elementos

$\therefore$ 50 – (19 + 16) = 15

57. En una encuesta realizada por el jirón de la Unión se observó que de 150 transeúntes, 40 eran ciegos, 45 veían televisión y 80 vendían loterías, de estos últimos 35 eran ciegos y 25 veían televisión ¿Cuántos de los que no veían televisión no eran ciegos ni vendían loterías?

Resolución:

Haciendo el gráfico:



Del problema:

$a + 35 = 40 \Rightarrow a = 5$

$b + 35 + 25 = 80 \Rightarrow b = 20$

$c + 25 = 45 \Rightarrow c = 20$

Del total: $x + a + b + c + 35 + 25 = 150$

$x + 45 + 35 + 25 = 150 \quad \therefore x = 45$

58. A que es igual: $\{[(A - B) \cap B] \cap [(A \cup B) \cap C]\}'$

Resolución:

Por propiedad: $(A - B) \cap B = \varnothing$, y además $\varnothing \cap A = \varnothing$

Con lo cual: $\{[(A - B) \cap B] \cap [(A \cup B) \cap C]\}'$

$\{\varnothing \cap [(A \cup B) \cap C]\}' \Rightarrow \{\varnothing\}' = U$

59. Decir cuántas de las proposiciones siguientes son falsas:

- $n(\varnothing) = \varnothing$ • $\varnothing \in \{\varnothing\}$ • $n(\varnothing) = 0$
- $\varnothing \in \{\ \}$ • $\{\varnothing\} = 0$ • $\varnothing \in P(M)$

Resolución:

Por la teoría deducimos que;

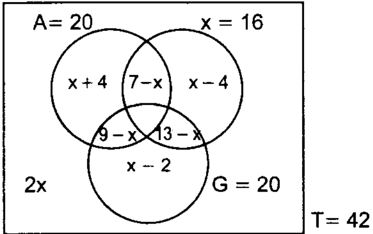
- $n(\varnothing) = \varnothing$ (F) • $\varnothing \in (\varnothing)$ (V)
- $n(\varnothing) = 0$ (V) • $\varnothing \in \{\ \}$ (F)
- $\{\varnothing\} =$ (F) • $\varnothing \in P(M)$ (V)

$\therefore$ 3 falsas

60. Se tiene un salón de clases de 42 alumnos donde 20 aprobaron Aritmética, 16 aprobaron Álgebra; 20 aprobaron Geometría, 7 aprobaron Aritmética y Álgebra, 13 aprobaron Álgebra y Geometría y 9 aprobaron Aritmética y Geometría. Si los que aprobaron los tres cursos es la mitad de los que no aprobaron ninguno de los 3 cursos, ¿cuántos aprobaron solo Aritmética?

Resolución:

Haciendo el gráfico:



Del gráfico:

$20 + x - 4 + 13 - x + x - 2 + 2x = 42$

$3x = 15 \Rightarrow x = 5$

Nos piden: $x + 4 = 9$

61. En una reunión de la tercera edad, se realiza una encuesta a 56 abuelitas sobre sus preferencias en el lavado, planchado y en la cocina, obteniéndose:

- De la que tienen menos de 70 años, a 12 les gusta lavar, a 6 solo cocinar y a 8 solo planchar.
- De las que tienen 70 años o más, a 5 les gusta cocinar pero no planchar, a 10 solo lavar y a 4 solo planchar.

Si a 5 abuelitas no les gusta realizar ninguna de las 3 actividades y a ninguna abuelita que le gusta lavar, le gusta planchar. ¿A cuántas abuelitas les gusta planchar?

Resolución:

Sean:

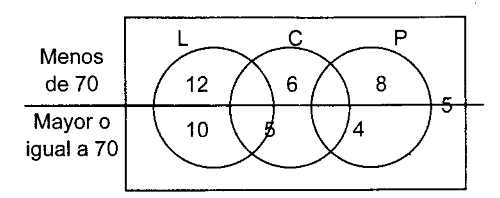
L = {Abuelitas que les gusta lavar}

C = {Abuelitas que les gusta cocinar}

P = {Abuelitas que les gusta planchar}

Como a ninguna abuelita que le gusta lavar, le gusta planchar,: L y P son conjuntos disjuntos.

Representando gráficamente los datos del problema.



Total = 56

$12 + 10 + 6 + 5 + 5 + \square = 56$

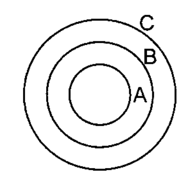
$\Rightarrow \square : 18$

62. Si: A, B y C son conjuntos tales que $A \subset B \subset C$. Simplificar:

$[(A \cap C) \cup (B - C)] \cup [(A \cup B \cup C) \cap (B - A)]$

Resolución:

Graficamos los conjuntos:



Dado que:

$[(A \cap C) \cup \underbrace{(B - C)}_{\varnothing}] \cup \underbrace{[(A \cup B \cup C)}_{} \cap (B - A)]$

$(A \cap C) \cup [C \cap (B - A)]$

$(A \cap C) \cup (B - A) = A \cup (B - A) = B$

63. Considere el conjunto A = {1; 2; 3; 4; 5} y las siguientes proposiciones:

I. $\exists x \in A / x^2 = 9$ II. $\exists x \in A / x + 5 < 4$

III. $\exists x \in A / x + 3 > 5$ IV. $\forall x \in A: x + 3 < 9$

V. $\forall x \in A: x^2 - 2x - 1 > 0$ VI. $\forall x \in A: x^2 > 1$

Si M es el número de proposiciones lógicas verdaderas.

N es el número de proposiciones lógicas falsas.

Hallar la relación correcta entre los valores de M y N.

Resolución:

A = {1; 2; 3; 4; 5}

I. $\exists x = 3 \in A / x^2 = 3^2 = 9$ (V)

II. $\forall x \in A: x \geq 1 \Rightarrow \forall x \in A: x + 5 \geq 6$
$\Rightarrow \{\forall x \in A: x + 5 \geq 4\}$ es verdadera
Por lo que: $\sim\{\forall x \in A: x + 5 \geq 4\}$ es falsa, esto es: $\exists x \in A / \sim(x + 5 \geq 4)$
Es falsa, es decir:
$\exists x \in A / x + 5 < 4$ es falsa (F)

III. $\exists x = 4 \in A / x + 3 = 4 + 3 > 5$ (V)

IV. $\forall x \in A: x \leq 5 \Rightarrow \forall x \in A: x + 3 \leq 8$
$\Rightarrow \{\forall x \in A: x + 3 < 9\}$ es verdad (V)

V. $\{\forall x \in A: x^2 - 2x - 1 > 0\}$ es falso
pues para x = 1; $1^2 - 2.1 - 1 > 0$ es falso (F)

VI. $\{\forall x \in A: x^2 > 1\}$ también es falso
pues para x = 1: $1^2 > 1$ no es cierto (F)

Luego: $M = 3 \wedge N = 3$

$\therefore M = N$

64. Si A, B y C son conjuntos definidos por:

$A = \{\varnothing; \{\varnothing; 0\}; \{0; \varnothing\}$

$B = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 - 4 = 0 \vee x^2 - \sqrt{2}x = 0\}$

$C = \{x \in \mathbb{N} / x^2 + 5 = 0 \vee x^2 + 2x = 0\}$

Hallar la relación correcta entre los valores de n(A), n(B) y n(C).

Resolución:

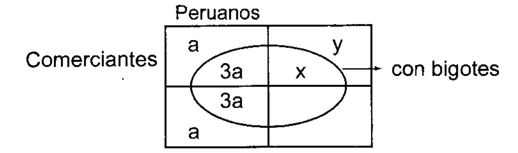
- $A = \{\varnothing; \{\varnothing; 0\}; \{0; \varnothing\}\}$
  como: $\{\varnothing; 0\} = \{0; \varnothing\} \Rightarrow A = \{\varnothing; \{\varnothing; 0\}\}$
  $\Rightarrow n(A) = 2$
- $B = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 - 4 = 0 \quad \vee \quad x^2 - \sqrt{2}x = 0\}$
  $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 2) = 0$
  $\Rightarrow x = 2 \quad \vee \quad x = -2$
  $x^2 - \sqrt{2}x = 0 \Rightarrow x(x - \sqrt{2}) = 0$
  $\Rightarrow x = 0 \quad \vee \quad (x = \sqrt{2} \notin \mathbb{Z})$
  $\Rightarrow B = \{-2; 0; 2\} \Rightarrow n(B) = 3$
- $C = \{x \in \mathbb{N} / x^2 + 5 = 0 \quad \vee \quad x^2 + 2x = 0\}$
  $\forall x \in \mathbb{N}: x^2 \geq 1 \Rightarrow x^2 + 5 \geq 6 \neq 0$
  Es decir: $x^2 + 5 = 0$ no tiene solución natural
  También: $x^2 + 2x = 0$ no tiene solución natural
  Con lo cual: $C = \varnothing \Rightarrow n(C) = 0$

$\therefore n(A) + 1 = n(B) = n(C) + 3$

65. Entre los varones que llegaron en un avión internacional: 40 eran peruanos y 60 eran comerciantes. De los peruanos el 75% tenían bigotes y la mitad de los peruanos eran comerciantes, 5 de cada 6 comerciantes tenían bigotes. De los peruanos con bigotes la mitad eran comerciantes. Determinar el número de peruanos o comerciantes con bigote.

Resolución:

Haciendo un diagrama con los datos:



40 son peruanos: $8a = 40 \Rightarrow a = 5$

60 son comerciantes: $4a + x + y = 60$

$\Rightarrow 4(5) + x + y = 60 \Rightarrow x + y = 40$

5 de cada 6 comerciantes tenían bigotes.

$\Rightarrow 3a + x = 5(a + y)$

$\Rightarrow x - 5y = 2a \Rightarrow x - 5y = 10$

Luego: $x = 35 \quad \wedge \quad y = 5$

Por lo tanto, el número de peruanos o comerciantes con bigotes es: $8a + x = 75$

66. Si A, B y D son subconjuntos del conjunto universal U, entonces indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $[A \cap (D - B) \in P(A)$
II. $(A \Delta B) \in P(A \cap B)$
III. $[(A - B) - B^c] \in P(\varnothing)$

Resolución:

I. Tenga en cuenta que:
$B \subseteq A \Rightarrow B \in P(A)$
$A \cap (D - B) \subseteq A \Rightarrow A \cap (D - B) \in P(A)$ (V)

II. $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$
$\Rightarrow A \Delta B \subseteq (A \cap B) \Rightarrow A \Delta B \subseteq P(A \cap B)$ (F)

III. $(A - B) - B^c = (A \cap B^c) \cap (B^c)^c = (A \cap B^c) \cap B$
$= A \cap (B^c \cap B) = A \cap \varnothing = \varnothing$
$\Rightarrow (A - B) - B^c = \varnothing \in P(\varnothing)$ (V)

$\therefore$ VFV

67. Considere el conjunto A = {2; 3; 5; {2}} y las siguientes proposiciones:

I. $\{2\} \in A$ II. $\{3\} \in A$ III. $\{3; 5\} \subset A$
IV. $\{2\} \subset A$ V. $\{3\} \subset A$ VI. $(2; 3; 5\} \subset A$

Si M es el número de proposiciones lógicas verdaderas.
N es el número de proposiciones lógicas falsas.
Hallar la relación correcta entre los valores de M y N.

Resolución:

A = {2; 3; 5; {2}}

I. $\{2\}$ es elemento de A $\Rightarrow \{2\} \in A$ (V)
II. $3 \in A \Rightarrow \{3\} \subset A$ (F)
III. $3 \in A \ \wedge \ 5 \in A \Rightarrow \{3; 5\} \subset A$ (V)
IV. $2 \in A \Rightarrow \{2\} \subset A$ (V)
V. $\{3\} \subset A$, por II (V)
VI. $2 \in A \wedge 3 \in A \wedge 5 \in A \Rightarrow \{2; 3; 5\} \subseteq A$ (V)

Luego: $M = 5 \ \wedge \ N = 1$, por lo que: $M^2 - N^2 = 24$

68. Si A, B y D son conjuntos contenidos en el universo U, entonces al simplificar la siguiente operación:
$[(A \cap B^c) \cup B]^c \cup \{A \cap [(A^c - D^c)^c \cap A]\}^c \cup$ se obtiene:

Resolución:

A, B, D subconjuntos de U.
$M = [(A \cap B^c) \cup B]^c = [(A \cup B) \cap (B^c \cup B)]^c$
$M = [(A \cup B) \cap U]^c = (A \cup B)^c$
$N = \{A \cap [(A^c - D^c) \cap A]\}^c = A^c \cup [(A^c - D^c)^c \cap A]^c$
$N = A^c \cup [(A^c - D^c) \cup A^c] = (A^c \cup A^c) \cup (A^c - D^c)$
$N = A^c \cup (A^c - D^c) \Rightarrow N = A^c$, pues $A^c - D^c \subseteq A^c$

Luego:
$[(A \cap B^c) \cup B]^c \cup \{A \cap [(A^c - D^c)^c \cap A]\}^c$
$= M \cup N = (A \cup B)^c \cup A^c = [(A \cup B) \cap A]^c = [A]^c = A^c$
Puesto que: $A \subset A \cup B$

69. Dado el conjunto: A = {1; {1; 1}, ∅, {∅}}, indique cuál(es) de las siguientes proposiciones son correctas.

I. $\{1; \{\varnothing\}\} \subset A$ II. $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \subset A$ III. $\{1\} \in A$

Resolución:

No olvide: la relación entre elemento y conjunto es mediante el símbolo $\in$, y entre conjunto y conjunto es mediante el símbolo $\subset$.
Con esto: (I) es V; (II) es V; (III) es F
$\therefore$ I y II son correctas.

70. Indique el valor de verdad de las proposiciones siguientes:

I. $(A \cap B)^c \cap (A^c \cup B) = A^c$
II. $(A \cap B) \cup (A \cup B^c)^c = B$
III. $(A - B) \cup (B^c - A^c) = A - B$

A, B, C son conjuntos del universo U.

Resolución:

I. $(A \cap B)^c \cap (A^c \cup B)$
$= (A^c \cup B^c) \cap (A^c \cup B)$
$= A^c \cup (B^c \cap B) = A^c \cup \varnothing = A^c$
$\Rightarrow$ (I) es V

II. $(A \cap B) \cup (A \cup B^c)^c$
$= (A \cap B) \cup (A^c \cap B) = (A \cup A^c) \cap B$
$= U \cap B = B \Rightarrow$ (II) es V

III. $(A - B) \cup (B^c - A^c) =$
$=(A \cap B^c) \cup (B^c \cap A)$
$= (A \cap B^c) \cup (A \cap B^c) = A \cap B^c$
$= A - B \Rightarrow$ (III) es V

$\therefore$ VVV

71. Dado el conjunto: A = {2; 3; {2}; ∅; {2; 3}; (∅}},
Indique cuántas de las proposiciones siguientes son correctas:

I. $\{2; 3\} \in A$ II. $\varnothing \in A$
III. $\{\varnothing\} \subset P(A)$ IV. $\{2; 3\} \subset A$
V. $\{\varnothing\} \subset A$ VI. $\{2; 3; \{3\}\} \in P(A)$

Resolución:

Recuérdese que: el conjunto potencia de A denotado por P(A) es el conjunto que está formado por todos los subconjuntos posibles que se puede formar con los elementos de A.
Con esto: (I) es V; (II) es V; (III) es F; (IV) es V; (V) es V; (VI) es F
$\therefore$ 4 proposiciones son correctas.

72. Si $E \subset A$, entonces simplificar:
$[A - (B - E)] \cup [(A - B)^c \cap E^c]$

Resolución:

Dato: $E \subset A \Rightarrow A \cap E =$

Sea: $M = [A - (B - E)] \cup [(A - B)^c \cap E^c]$
$M = [A - (B \cap E^c)] \cup [(A - B) \cup E]^c$
$M = [A \cap (B \cap E^c)^c] \cup [(A \cap B^c) \cup E]^c$
$M = [A \cap (B^c \cup E)] \cup [A \cap B^c) \cup E]^c$
$M = [(A \cap B^c) \cup (A \cap E)] \cup [(A \cap B^c) \cup E]^c$
$M = [(A \cap B^c) \cup E] \cup [(A \cap B^c) \cup E]^c$ $\therefore M = U$

73. Dados tres conjuntos no vacíos: A, B y C, simplifique: $[A^c \cap (B - C^c)^c]^c \cup (B \triangle C)$

Resolución

Sea: $E = [A^c \cap (B - C^c)^c]^c \cup (B \triangle C)$

$= [A \cup (B - C^c)] \cup [(B \cup C) \cap (B \cap C)^c]$

$= [A \cup (B \cap C] \cup [(B \cup C) \cap (B \cap C)^c]$

$= A \cup \underbrace{\{(B \cap C) \cup [(B \cup C) \cap (B \cap C)^c]\}}_{\text{Aplicamos absorción}}$

$= A \cup \underbrace{[(B \cap C) \cup (B \cup C)]}$

$= A \cup \quad (B \cup C)$

$\therefore\ E = (A \cup B) \cup C$

74. Indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. $(A - B)^c \cup A = A \cup B$

II. $A^c \subset (A \cup B) \Rightarrow B^c \subset A$

III. Si $A = \{\varnothing ; \{\varnothing\}\}$ entonces $\varnothing \in P(A)$

Resolución:

I. $(A - B)^c \cup A$

$= (A^c \cup B) \cup A = (A^c \cup A) \cup B = U \cup B = U$

$\Rightarrow$ (I) es $\varnothing$

II. Grafiquemos: (A, U = B)

$A^c \subset (A \cup B) \Rightarrow$

De aquí: $B^c = \varnothing \Rightarrow B^c \subset A$

$\Rightarrow$ (II) es V

III. Si $A = \{\varnothing; \{\varnothing\}\}$

$\Rightarrow P(A) = \{\varnothing; \{\varnothing\}; \{\{\varnothing\}\}; \{\varnothing; \{\varnothing\}\}\}$

Obs: $\varnothing$ es P(A) $\Rightarrow$ (III) es V

$\therefore$ FVV

75. Sean A, B y C tres conjuntos del universo U, tal que:

$M = \{[(A^c \cup B^c) \cap (B \cup C)] - (A \cap C)\} \cap C^c - B$; simplificando se obtiene:

Resolución:

Sea: $T = [(A^c \cup B^c) \cap (B \cup C)] - (A \cap C) \cap C^c - B$

$T = [(A^c \cup B^c) \cap (B \cup C) \cap (A \cap C)^c] \cap C^c - B$

$T = (A^c \cup B^c) \cap (B \cup C) \cap (A^c \cup C^c) \cap C^c - B$

$T = \{[A^c \cup (B^c \cap C^c)] \cap (C^c \cap B) - B$

$T = [A^c \cup (B^c \cap C^c)] \cap (C^c \cap B) \cap B^c$

$T = [A^c \cup (B^c \cap C^c] \cap C^c \cap (B \cap B^c)$

$T = [A^c \cup (B^c \cap C^c] \cap C^c \cap \varnothing = \varnothing$

76. Si A, B y C son conjuntos y $A \cap C = \varnothing$, hallar el conjunto: $\{[(C \cup B) \cap A] \cup C^c\} \cap B$

Resolución:

Dato: $A \cap C = \varnothing$

Sea $E = \{[(C \cup B) \cap A] \cup C^c] \cap B$

$E = \{(C \cap A) \cup (B \cap A) \cup C^c\} \cap B$

$E = \{(B \cap A) \cup C^c\} \cap B$

$E = \{(B \cup C^c) \cap (A \cup C^c)\} \cap B$

$E = \{(B \cup C^c) \cap C^c\} \cap B$

Por absorción:

$E = C^c \cap B = B \cap C^c$

77. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $(A \cap B) \subset D \Rightarrow A^c \subset D^c \vee B^c \subset D^c$

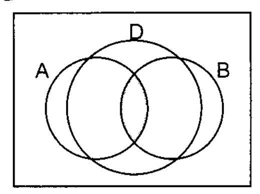
II. $(A \cap B) \subset D \cup E \Rightarrow A \subset D \vee B \subset E$

III. $A \subset (D \cup E) \wedge B \subset (D \cap E) \Rightarrow (A \cup B) \subset (D \cup E)$

Resolución:

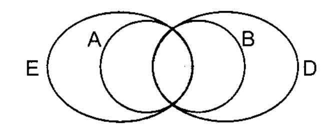
Resolviendo gráficamente:

I. $A \cap B \subset D$



Obs.: $A^c \not\subset D^c$; $B^c \not\subset D^c \Rightarrow$ (I) es F

II. $(A \cap B) \subset (D \cup E)$



Obs. $A \not\subset D$; $B \subset E \Rightarrow$ (II) es F

III. $A \subset (D \cup E) \wedge B \subset (D \cap E)$

Pero $(D \cap E) \subset (D \cup E)$

$\Rightarrow A \subset (D \cup E) \wedge B \subset (D \cup E)$

$\Rightarrow (A \cup B) \subset (D \cup E) \Rightarrow$ (III) es V

$\therefore$ FFV

78. Simplificar:

$(A \cap B) \cup (C \cap B \cap A) \cup [(A \cap C)^c \cup (B^c \cup D^c)]^c$

A, B, C conjuntos del universo U.

Resolución:

$E = (A \cap B) \cup (C \cap B \cap A) \cup [(A \cap C)^c \cup (B^c \cup D^c)]^c$

$E = (A \cap B) \cup [(A \cap C) \cap (B \cap D)]$

$E = (A \cap B) \cup [(A \cap B) \cap (C \cap D)] \quad \therefore\ E = A \cap B$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

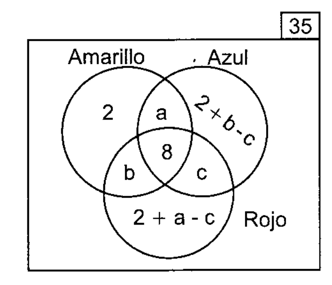
PROBLEMA 1 (UNI 2001 - I)

En un colegio hay 35 niños. Cada uno de ellos tiene una bandera que puede ser monócroma, bicolor o tricolor, habiéndose usado únicamente tres colores: rojo, amarillo y azul. El número de banderas bicolor es el doble del número de banderas monócromas, mientras que el número de banderas que tienen el color rojo es igual al número de banderas que tienen el color azul e igual al número de banderas que tienen el color amarillo. Si solo ocho niños tienen banderas tricolor y dos alumnos banderas de color amarillo, ¿cuántas banderas bicolor rojo-azul hay?

A) 2 B) 3 C) 5
D) 7 E) 10

Resolución:

Nos piden: c



Por condición:

$a + b + c = 2[(2) + (2 + b - c) + (2 + a - c)]$

$a + b + c = 2(6 + a + b - 2c)$

$a + b = 5c - 12$ ...(1)

También:

$(10 + a + b) + (2 + b) + (2 + a - c) = 35$

$2a + 2b - c = 21$

$a + b = \frac{1}{2}(21 + c)$ ...(2)

De (1) y (2): $c = 5$

Clave: C

PROBLEMA 2 (UNI 2002 - I)

Al simplificar:

$\{A \cap [(B - C^c) \cup (B - C)]^c\} - \{A \cap [B - (C - A)]^c \cap B^c\}$

se obtiene:

A) $(A \cap B)^c$ B) $A \cup B$ C) $\varnothing$
D) B^c E) $A \cap B^c$

Resolución:

Sabemos:

$A - B \equiv A \cap B^c$; $A \cap (B \cup C) \equiv (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup A^c \equiv U$; $A \cap A^c \equiv \varnothing$; $A \cap U = A$;

$A \cup \varnothing \equiv A$

Aplicando:

$H = [A \cap [(B \cap C) \cup (B - C)]^c\} - \{A \cap [B \cap (C \cap A^c)^c]^c \cap B^c\}$

$H = \{A \cap B^c\} - \{A \cap B^c \cap [B \cap (C \cap A^c)^c]^c\}$

Recordando:

$(A \cap B)^c \equiv A^c \cup B^c$

Luego:

$H = \{A \cap B^c\} - \{A \cap B^c \cap [B^c \cup (C \cap A^c)]\}$

$H = \{A \cap B^c\} - \{B^c \cap [(A \cap B^c) \cup (A \cap A^c \cap C)]\}$

$H = \{A \cap B^c\} - \{B^c \cap [(A \cap B^c) \cup \varnothing]\}$

$H = \{A \cap B^c\} - \{B^c \cap A \cap B^c\}$

$H = \{A \cap B^c\} - \{A \cap B^c\}$

$H = \varnothing$

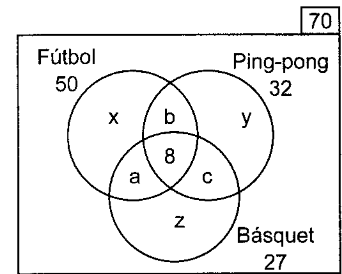
Clave: C

PROBLEMA 3 (UNI 2002 - II)

En un club deportivo hay 70 jugadores. De estos, 50 juegan fútbol, 32 juegan ping-pong y 27 juegan básquet. Si solo 8 practican los 3 deportes, ¿cuántos practican exactamente un deporte?

A) 36 B) 37 C) 38 D) 39 E) 40

Resolución:



Del dato tenemos:

$$\begin{cases} x + b + a = 42 \\ y + b + c = 24 \\ z + a + c = 19 \end{cases}$$

Sumamos las tres ecuaciones:

$x + y + z + 2(a + b + c) = 85$ ...(α)

Del gráfico:

$x + y + z + a + b + c = 62$ ...(β)

De (α) y (β) tenemos:

$a + b + c = 23$

Luego: $x + y + z = 39$

Clave: D

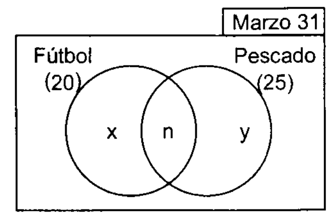
PROBLEMA 4 (UNI 2003 - I)

Carlos debe almorzar pollo o pescado (o ambos) en su almuerzo de cada día del mes de marzo. Si en su almuerzo durante 20 días hubo pollo y durante 25 días hubo pescado, entonces el número de días que almorzó pollo y pescado es:

A) 18 B) 16 C) 15 D) 14 E) 13

Resolución:

Del problema tenemos:



Luego:

$x + y + n = 31$ ...(1)

$x + n = 20$ ...(2)

$y + n = 25$ ...(3)

(2) + (3):

$x + y + 2n = 45$ ...(4)

(4) − (1): $n = 14$

Clave: D

PROBLEMA 5 (UNI 2003 - I)

Una orquesta está formada por 20 músicos que ejecutan instrumentos de cuerda, de viento y de percusión. Hay algunos que ejecutan de cuerda y viento a la vez, pero los que ejecutan de percusión no ejecutan otro instrumento. Sabiendo que 15 no ejecutan de percusión, hallar el número de los que ejecutan de cuerda y viento a la vez si se conocen las siguientes informaciones:

I. 10 ejecutan de cuerda.
II. 8 ejecutan de viento.

Para resolver el problema, señale la afirmación correcta:

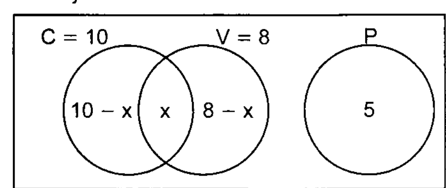
A) La información I es suficiente.
B) La información II es suficiente.
C) Cada información por separada, es suficiente.
D) Son necesarias ambas informaciones.
E) Las dos informaciones son insuficientes.

Resolución:

- Total de personas es 20.
- Quince no ejecutan instrumentos de percusión.

Entonces serán 5 los que ejecutan instrumentos de percusión.

Dato I: 10 ejecutan de cuerda.
Dato II: 8 ejecutan de viento.



Por condición:

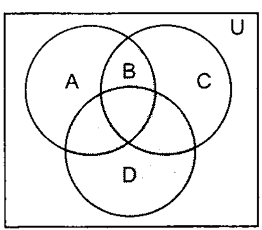
$10 - x + x + 8 - x = 5 \Rightarrow x = 3$

Por lo tanto, ambas informaciones son necesarias.

Clave: D

PROBLEMA 6 (UNI 2005 - I)

Dado el diagrama:



De las siguientes afirmaciones:

I. $A \cap C$ contiene a $B - D$.
II. La intersección de B con el complemento de $C - D$ es $\varnothing$.
III. $C(A) \cup C(B) \cup C(B \cap D) = U$.

Son verdaderas:

A) Todas B) Solo II C) I y II
D) I y III E) II y III

Resolución:

I. Nótese que B y D son disjuntos, entonces $B - D = B$ y además $(A \cap C)$ contiene a B $\Rightarrow$ verdadera

II. Se observa que $B \subset (C - D)$, entonces $B \cap (C - D)^c = Q \Rightarrow$ verdadera

III. Del gráfico: $B \cap D = \varnothing$ (son disjuntos B y D), entonces $(B \cap D)^c = U$

Luego:

$(A)^c \cup (B)^c \cup (B \cap D)^c = U$

$(A)^c \cup (B)^c \cup U = U \Rightarrow$ verdadera

Clave: A

PROBLEMA 7 (UNI 2005 - II)

Sean P y Q conjuntos tales que si $p \in P$, entonces $p \in Q$. Luego se puede afirmar:

A) Si $-3 \in Q$, entonces $-3 \in P$
B) Si $13 \notin P$, entonces $13 \notin Q$
C) Si $10 \notin Q$, entonces $10 \notin P$
D) Si $0{,}10 \in Q$, entonces $0{,}10 \notin P$
E) Si $1 \notin Q$, entonces $1 \in P$

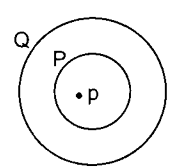
Resolución:

Del enunciado del problema:

Si: $p \in P \Rightarrow p \in Q$ quiere decir que: $p \notin Q \Rightarrow p \notin P$

Esto es equivalente a: $P \subset Q$

Gráficamente:



De las alternativas:

A) Si $-3 \in Q \Rightarrow -3 \in P$ (falsa)
B) Si $13 \notin P, \Rightarrow 13 \notin Q$ (falsa)
C) Si $10 \notin Q, \Rightarrow 10 \notin P$ (verdadera)

D) Si $0{,}10 \in Q, \Rightarrow 0{,}10 \notin P$ (falsa)
E) Si $1 \notin Q, \Rightarrow 1 \in P$ (falsa)

$\therefore$ la alternativa B es verdadera

Clave: C

PROBLEMA 8 (UNI 2006 - II)

Indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F):

I. Si $A = \{\varnothing\}$, entonces $A \subset P(A)$; P(A) potencia de A.
II. $A \Delta B \in P(A \cup B)$
III. Si $A \setminus B = \varnothing$, entonces $A = B$

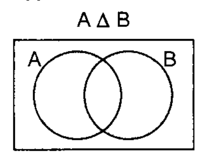
A) VVV B) VVF C) VFV
D) VFF E) FFF

Resolución:

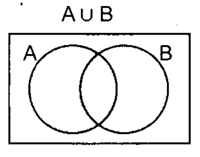
Vamos a analizar las proposiciones:

- Con la primera proposición:
  SI $A = \{\varnothing\}$ y $P(A) = \{\varnothing; \{\varnothing\}\}$, entonces $A \subset P(A)$ es verdadera.
- Con la segunda proposición:
  Sabemos por teoría
  $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ y $(A \cup B) \subset P(A \cup B)$
  Tenemos:

$A \Delta B$



$A \cup B$



  Luego, observamos de ambas gráficas:
  $A \Delta B \subset (A \cup B)$ es verdadera.

- Con la tercera proposición:
  Si $A \setminus B = A - B = \varnothing$, entonces $A \neq B$ es falsa.

Clave: B

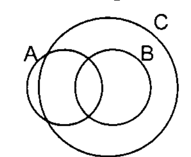
PROBLEMA 9 (UNI 2008 - I)

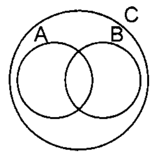
Dados tres conjuntos A, B y C, tales que $(A \cup B) \subset (A \cup C)$ y $(A \cap B) \subset (A \cap C)$ entonces:

A) $B \subset C$ B) $B = C$ C) $C \subset B$
D) $(A \cup C) \subset B)$ E) $(A \cup B) \subset C$

Resolución:

- De las condiciones: $(A \cap B) \subset (A \cap C)$ y $(A \cup B) \subset (A \cup C)$
- Tenemos los siguientes gráficos que verifican:





- Luego, en ambos casos se cumplen que $B \subset C$.

Clave: A

PROBLEMA 10 (UNI 2008 - II)

Señale la alternativa que presenta la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

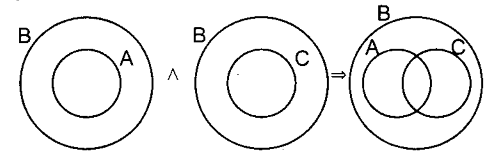
I. $A \subset B \wedge C \subset B$, entonces $A \cup C = B$.
II. Si $A \Delta B \subset A \cup B \wedge C \subset A \cup B$, entonces: $C \subset A \setminus B \vee C \subset B \setminus A$.
III. Si $B \setminus A \subset C^c$, entonces $C \subset A \cap B$.

A) VVV B) VFV C) FVF
D) FFV E) FFF

Resolución:

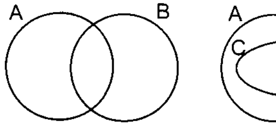
Analizando cada proposición:

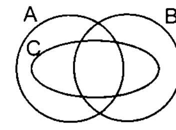
I. $A \subset B \wedge C \subset B$, entonces $A \cup C = B$
   Representando por medio de diagramas los conjuntos:



   Se observa que no necesariamente $A \cup C = B$ (falsa).

II. Si $A \Delta B \subset A \cup B \wedge C \subset A \cup B$, entonces $C \subset A \setminus B \vee C \subset B \setminus A$
   Representando por medio de diagramas los conjuntos:

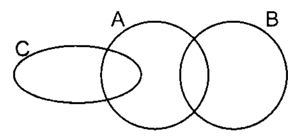




   Se observa que no necesariamente:
   $C \subset A \setminus B \vee C \subset B \setminus A$ (falsa).

   Dato: $A \setminus B = A - B \wedge B \setminus A = B - A$

III. Si: $B \setminus A \subset C^c$, entonces $C \subset A \cap B$
   Representando por medio de diagramas los conjuntos:



   Se observa que no necesariamente $C \subset A \cap B$. (falsa)

   Luego la secuencia correcta es: FFF

Clave: E

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Sea el conjunto: A = {a; b;{{a}}; {a; c}}
Determinar cuántas son verdaderas.
I. $a \in A$ II. $\{a\} \in A$ III. $\{\{a\}\} \in A$
IV. $\{a; c\} \in A$ V. $\varnothing \in A$ VI. $\{a\} \subset A$
VII. $\{\{a\}\} \subset A$ VIII. $\{\{\{a\}\}\} \subset A$ IX. $\{a; b\} \subset A$
X. $\varnothing \subset A$

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) N.A.

2. Determinar el conjunto potencia de A = {2; 4; 7} y hallar cuáles son verdaderas.
I. $2 \in P(A)$
II. $\{2; 4\} \in P(A)$
III. $\{\{2\}; \{2; 4; 7\}; \varnothing\} \subset P(A)$
IV. $\{\{2\}; \{2; 4\}; \{\varnothing\}\} \subset P(A)$

A) II y III B) I, II y IV
C) II, III y IV D) III y IV
E) N. A.

3. Dados los conjuntos:
$A = \{x/x \in \mathbb{N};\ 0 < x < 10\}$
$B = \{x/x \in \mathbb{N};\ 0 < x < 7\}$
$C = \{x^2/x \in \mathbb{N};\ 0 < x < 4\}$
Hallar: $C - \{(A \cup B) - (A \cap B)'\}$

A) {1; 3} B) {2; 4} C) {1; 4}
D) {1; 3; 4} E) {1; 5}

4. Simplificar:
$\{[(A \Delta B) \cap (A \cup B)'] \cup [(A' \cap B) \cup (A \cap B')]\}'$

A) $A \Delta B$ B) $A \cup B$ C) $(A \cup B)'$
D) $\varnothing$ E) $(A \Delta B)'$

5. Hallar el cardinal del conjunto A, sabiendo que tienen 2016 subconjuntos más que el conjunto B, que tiene 5 elementos.

A) 10 B) 11 C) 8
D) 9 E) 12

6. Sea el conjunto: A = {a; {{a}}; {a; c}}
Determinar cuáles son verdaderas.

I. $a \in A$ II. $\{a\} \in A$ III. $\{a; c\} \in A$
IV. $\varnothing \in A$ V. $\{\{a; c\}\} \in A$ VI. $\{\{a\}\} \in A$

A) I, II y III B) I, III y IV
C) II, III y IV D) I, III y VI
E) N. A.

7. De las siguientes afirmaciones:

I. $3{,}14 \notin \mathbb{Q}$ II. $\sqrt{-2} \in \mathbb{Q}'$

III. $\left(\frac{1}{7}\right)^{-1} \in \mathbb{Z}$ IV. $\sqrt[3]{-8} \in \mathbb{R}$

V. $\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{7}} \in \mathbb{R}$ VI. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \notin \mathbb{Q}$

VII. $(\sqrt{-2})^2 \notin \mathbb{Q}$ VIII. $\frac{\sqrt{3}}{3} \in \mathbb{Q}'$

son verdaderas:

A) II y IV B) III, IV, V, VIII
C) IV, V, VII D) IV y V
E) N. A.

8. Una señora sale a pasear todos los días con dos o más de sus perritos. Con mucho cuidado, procuró llevar cada día a un grupo diferente. Si en total tiene 10 perritos, ¿al cabo de cuántos días tendrá que llevar necesariamente a un grupo repetido?

A) 1010 B) 1013 C) 1016
D) 1018 E) 1023

9. El conjunto A tiene 31 subconjuntos propios y n(A)n(B) es igual a 35. ¿Cuántos subconjuntos propios tiene B?

A) 7 B) 8 C) 64 D) 127 E) 128

10. Determinar la suma de los elementos del conjunto:
$$A = \{x^2/x \in \mathbb{Z};\ -5 < x < 5\}$$

A) 12 B) 18 C) 22
D) 30 E) 60

11. Determinar cuántos de los siguientes conjuntos son nulos.
$M = \{x/x \notin x\}$; $N = \{0\}$; $O = \{\varnothing\}$;
$P = \{x/x \text{ sea natural};\ x^2 = 5\}$;
$Q = \{x/x \text{ sea natural};\ x^2 = 1296\}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

12. Hallar la suma de los elementos del siguiente conjunto:
$$\left\{\left(\frac{x+1}{3}\right) \in \mathbb{Z} \ /\ x \in \mathbb{N} \wedge 13 \leq 2x + 5 \leq 39\right\}$$

A) 18 B) 19 C) 20
D) 21 E) 22

13. Determinar el conjunto M = {–1; 1; 4} por comprensión:

A) $M = \{x/x \in \mathbb{Z} \wedge -1 \leq x \leq 4\}$
B) $M = \{x/x \in \mathbb{Z} \wedge -2 \leq 3x + 1 \leq 13\}$
C) $M = \{(2x-3)/x \in \mathbb{N} \wedge 0 < x < 4\}$
D) $M = \{(x^2 - 1)/x \in \mathbb{N} \wedge x < 4\}$
E) $M = \{x/(x^3 - 4x^2 - x + 4) = 0\}$

14. Determinar por comprensión el conjunto:
$$G = \{2; 6; 12; 20; ...; 600\}$$

A) $G = \{2x/x \in \mathbb{N} \wedge 0 < x < 300\}$
B) $G = \{(4x-2)/x \in \mathbb{Z} \wedge 0 < x < 152\}$

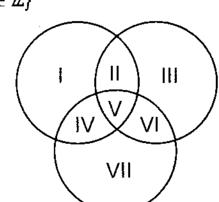
C) $G = \{(x^2 + x)/x \in \mathbb{Z}^+ \wedge x \leq 25\}$
D) $G = \{(n^2 + n)/n \in \mathbb{Z}^+ \wedge n < 25\}$
E) Imposible

15. Determinar por comprensión el conjunto:

$A = \{15; 35; 63; 99; ...; 399\}$

A) $A = \{n(n + 2)/n \in \mathbb{Z}^+ \wedge n < 22\}$
B) $A = \{(n^2 + 2n)/n \in \mathbb{Z} \wedge 2 < x < 21\}$
C) $A = \{(n^2 + 2n)/n \in \mathbb{Z} \wedge 2 < n < 20\}$
D) $A = \{(n^2 + 2n)/n \in \mathbb{Z} \wedge 1 < n < 20\}$
E) $A = \{(n^2 + 2n)/n \in \mathbb{Z}^+ \wedge n < 20\}$

16. Sean los conjuntos: A; B y C, tal que:
$A = \{(2x)/x \in \mathbb{N}\}$; $B = \{(2x + 1)/x \in \mathbb{N}\}$;
$C = \{x^2/x \in \mathbb{Z}\}$



De las zonas del gráfico:
son vacías:

A) II y V B) IV y VI C) V y VII
D) II; V y VII E) I, III, VII

17. Si: P = conjunto de personas altas;
Q = conjunto de personas atractivas;
R = personas de buen corazón;
K = Alberto Fujimori

Expresar:
"Alberto es bajo, poco atractivo, pero de gran corazón"

A) $K \in (P \cap Q \cap R)$ B) $K \notin (P \cap Q \cap R)$
C) $K \in (P \cap Q' \cap R)$ D) $K \in (P \cap Q' \cap R')$
E) $K \in (P' \cap Q' \cap R)$

18. Simplificar la expresión:
$M = \{[(A \cup B') \cap (A \cap B)] \cup (A \cap B')\} \cup (C - A)$

A) $A' \cap C$ B) $A \cap B$ C) $A \cup C$
D) $A \cup B$ E) A

19. Sabiendo que: $n[P(A)] \times n[nP(B)] \times n[P(C)] = 4096$
Además: $n(A) + n(B) = n(C)$
¿Cuál es el menor número de elementos de: $A \cup B \cup C$?

A) 3 B) 4 C) 6 D) 8 E) N. A.

20. Un niño desea comprar un helado a un tipo que vende de 4 sabores: fresa, chocolate, vainilla y lúcuma. Si su pedido puede incluir dos o tres sabores, ¿de cuántas maneras puede hacerlo?

A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 14

21. El conjunto A tiene (n + 1) elementos y un conjunto B tiene (2n) elementos. Si se sabe que el conjunto potencia de B tiene 224 elementos más que el conjunto potencia de A; hallar "n".

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) Absurdo

22. Dado el conjunto: $A = \{\varnothing ; \{\varnothing\}; 0\}$
Analizar la veracidad de las siguientes afirmaciones e indicar cuántas son correctas.
I. $\varnothing \subset A$ II. $\varnothing \in A$ III. $\{\varnothing\} \subset A$
IV. $3x \in A/x \neq \varnothing$ V. $n(A) = 2$ VI. $A \cap \varnothing = A$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

23. Dado el conjunto: $\left\{x/x \in \mathbb{N}, 3 < \frac{2x-1}{3} < 5\right\}$

Indicar lo correcto:

A) Es vacío.
B) Es unitario.
C) Posee dos elementos.
D) La suma de sus elementos es 9.
E) El producto de sus elementos es 1680.

24. Si $A \subset B$, simplificar: $[(A \cap B) \cup (A' \cap B)] \cap [A \cup B]$

A) A B) B C) $\varnothing$ D) A' E) B'

25. Si: $A \subset B$ y $C \cap A = \varnothing$
Simplificar: $[A \cup (B - C)] \cap [B \cup (C - A)]$

A) $A \cap B$ B) $A - B$ C) $B - A$
D) $B - C$ E) $C - B$

26. Dado el conjunto: $C = \{a; \{b\}; \{b; \{c\}\}\}$. ¿Cuántas de las siguientes proposiciones son verdaderas?

- $n(C) = 3$
- $\{b\} \subset \{b; \{c\}\}$
- $\varnothing \in P(C)$
- $\{\{b; \{c\}\}\} \in P(C)$
- $n[P(C)] = 16$
- $\varnothing \subset C$
- $\varnothing \subset P(C)$
- $\{a; \{b\}\} \subset P(C)$

A) 3 B) 6 C) 5 D) 4 E) N.A.

27. Dado el conjunto: $A = \{1; 2; 3; \{4; 5\}\}$
¿Cuántas de las siguientes proposiciones son verdaderas?
I. $4 \in A$ II. $\{4; 5\} \in A$
III. $\{1; 2; 3\} \subset A$ IV. $\{4; 5\} \in P(A)$
V. $\varnothing \subset \{4; 5\}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

28. Si: $A = \{x/x \in \mathbb{Z} \wedge x^2 < 5\}$;
$B = \{x/x \in A \wedge x + 1 > 0\}$

hallar el cardinal de: $(A \cap B) \times A$

A) 12 B) 9 C) 18
D) 15 E) 10

29. Sea: $A = \{x \in \mathbb{N}/x \leq 9\}$;
$B = \{(x; y) \in A^2 / y = x^2\}$;

$C = \{(x; y) \in A^2 / y = 2x\}$;
$D = \{(x; y) \in A^2 / x < 4 \wedge y > 7\}$

Determinar: n(B) + n(C) + n(D)

A) 12 B) 83 C) 11
D) 10 E) 14

30. Dado el conjunto: $A = \{4; \{6; 2\}; \{4\}; 6; \varnothing\}$
¿Cuántas de las siguientes proposiciones no son falsas?

A) $\{4\} \subset A$ B) $\{\{6\}\} \subset A$ C) $2 \in A$
D) $\{6\} \in A$ E) $\{4\} \in A$ F) $\varnothing \subset A$
G) $\{6\} \subset A$ H) $\{\varnothing\} \subset P(A)$

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) Todas

31. Si A tiene 16 subconjuntos, B tiene 8 subconjuntos y $(A \cup B)$ tiene 32 subconjuntos; ¿cuántos subconjuntos tiene $(A \cap B)$?

A) 1 B) 2 C) 4
D) 8 E) No se puede conocer.

32. Dado el conjunto: S = {2; 5; 6; 7; m; n; p}
Sea:

a: La cantidad de subconjuntos de S formado solo por números.
b: La cantidad de subconjuntos de S formado solo por letras.

Hallar: a + b

A) 7 B) 127 C) 22
D) 12 E) 24

33. Luego de combinar "n" frutas distintas, para preparar jugo surtido, se obtuvo 247 de tales jugos. Hallar "n".

A) 10 B) 9 C) 8
D) 7 E) N. A.

34. Sabiendo que: n(S) − n(T) = 3. Además entre S y T tienen 2304 subconjuntos. Hallar: n(S) + n(T).

A) 17 B) 18 C) 19
D) 20 E) N. A.

35. Sabiendo que los conjuntos binarios A y B son iguales, donde:

$A = \{a^2 + b; b^2 + a; a - b - 2\}$;

$B = \left\{\frac{a^2 + b^2}{2} - 4; 6b + a\right\}$

Hallar: a + b

A) 8 B) 10 C) 12
D) 14 E) 16

36. Se define la operación * de la siguiente manera:
$A * B = A' \cap B$

Determinar si las siguientes proposiciones son V o F.

I. $A' * B = A \cap B$
II. $(A * B) * (B * A) = A - B$
III. $A * (A * B') = (A \cup B)'$

A) VFV B) FVF C) VFF
D) VVV E) FVV

37. Dados los conjuntos no vacíos A, B y C que cumplen:

$B - A = \varnothing$; $B \cap C \neq \varnothing$ y $A \cap C \neq \varnothing$

Indicar qué proposiciones son siempre verdaderas:

I. $(C - A) \cap (C - B) \neq \varnothing$ II. $[B - (A \cap C)] \neq \varnothing$
III. $(C - A) \cap B = \varnothing$

A) Solo I B) Solo II C) II y III
D) I y II E) Solo III

38. Sabiendo que:
A = {x/x es un número de 3 cifras de base 5}
B = {x/x es un número de 3 cifras de base 6}
Hallar: $n(A \Delta B)$

A) 102 B) 101 C) 100
D) 99 E) 98

39. Si: $\frac{n(P)}{n(Q)} = \frac{3}{4}$, además la suma de los subconjuntos de P con los subconjuntos de Q es 320. Además, P y Q tienen 2 elementos comunes. Calcular el cardinal de la unión de P con Q.

A) 12 B) 18 C) 40
D) 52 E) 30

40. El círculo A contiene a las letras: c, d, e, f y g. La letra del cuadrado B que no está en A es a. Las letras del cuadrado C que no están en A son h y b; también las letras a, d y c están en B pero no en C. Además las letras e y g están en el círculo A solamente. ¿Cuántas letras están en la parte sombreada?

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

41. Si: n(U) = 200; n(A) = 80;
n(B) = 82; n(C) = 78;
$n(A \cap B) = 36$; $n(A \cap C) = 34$;
$n(B \cap C) = 32$; $n[(A \cup B) - (A \cup C)] = 21$

calcular: $A \cap B \cap C$

A) 4 B) 5 C) 7
D) 11 E) 3

42. Dados tres conjuntos: A, B y C. Sabiendo que:

- n(B) = 3[n(A)]
- n(C) = n(A) − 1

- $n(A) = 2[n(A \cap B)] = 4[n(A \cap C)]$
- $n(B \cap C) = 2$
- $n(A \cap B \cap C) = 1$
- $n[(A \Delta B) - C] = 121$

calcular: $n[C - (A \cup B)]$

A) 20 B) 30 C) 31
D) 32 E) 43

43. Se hizo una encuesta a 88 personas sobre preferencias respecto a las revistas A y B, se observa que el número de los que prefieren las 2 revistas a la vez, es la tercera parte de los que prefieren A, la cuarta parte de los que prefieren B y la quinta parte de los que no prefieren ninguna de las 2 revistas. ¿Cuántas prefieren la revista A?

A) 28 B) 24 C) 30
D) 16 E) 36

44. Del total de damas de una oficina los 2/3 son gringas, 1/5 tienen ojos azules y 1/6 son gringas con ojos azules. ¿Qué fracción no son gringas ni tienen los ojos azules?

A) 4/9 B) 3/10 C) 2/9
D) 3/8 E) 2/7

45. De un grupo de 100 alumnos, 49 no llevan el curso de aritmética, 53 no llevan álgebra y 27 no llevan álgebra ni aritmética. ¿Cuántos alumnos llevan uno de los cursos?

A) 44 B) 45 C) 46
D) 47 E) 48

46. En una reunión, el 44% de los asistentes toman y el 37% fuman. Si el 25% de los que toman también fuman y 84 personas no toman ni fuman. Hallar el número total de asistentes a dicha reunión.

A) 350 B) 240 C) 280
D) 120 E) 210

47. En una encuesta realizada a 100 personas sobre preferencias respecto a 3 idiomas: inglés, francés y alemán se observó que 18 prefieren solo alemán, 23 prefieren alemán pero no inglés, 8 prefieren alemán y francés, 27 prefieren alemán, 48 francés, 8 francés e inglés, 24 ninguno de los 3 idiomas. ¿Cuántos prefieren inglés?

A) 11 B) 18 C) 15
D) 20 E) 22

48. En un salón de clases de 50 alumnos: 8 aprobaron solo Aritmética, 7 solo Álgebra, 6 sólo Geometría, 6 aprobaron los 3 cursos. De los que aprobaron Aritmética, 18 aprobaron Álgebra o Geometría; de los que aprobaron Geometría, 13 aprobaron Aritmética o Álgebra; de los que aprobaron Álgebra, 17 aprobaron Aritmética o Geometría. ¿Cuántos no aprobaron ninguno de los 3 cursos?

A) 4 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

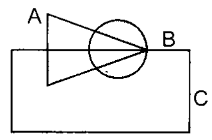
49. Se tienen 2 conjuntos A y B, tales que: $n(A) = 5$ y $n(B) = 4$. ¿Cuál es el máximo valor que puede tomar: $M = n[Pot(A) \cup Pot(B)]$?

A) 47 B) 48 C) 49
D) 50 E) 51

50. Si el conjunto potencia de A tiene 512 elementos más que el conjunto potencia de B, ¿cuántos elementos podría tener como mínimo el conjunto $(A \cup B)$?

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

51. Indicar la operación conjuntista que representa la siguiente región sombreada.



Si: $M = A \cap B \cap C$

A) $M' \cup (B \cap C)$ B) $M' \cap (B - C)$
C) $M' \cap (B \cup C)$ D) $(M \Delta B) \cup (M \Delta C)$
E) $(B - M) \cup [(A \cap C) - M]$

52. Para 3 conjuntos A, B y C contenidos en un universo U. Donde $C \subset B$, se cumple que:

$n(A - C) = 5$; $n(B - C) = 4$; $n(A - B) = 3$; $n(A \cup B) = 10$

¿Cuántos subconjuntos propios posee C?

A) 15 B) 63 C) 7
D) 3 E) 31

53. Si el conjunto M tiene 16 subconjuntos y el conjunto P tiene 32 subconjuntos, calcular el cardinal de $(M \cap P)$, si además se sabe que $(M \cup P)$ tiene 256 subconjuntos.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

54. Sobre dos conjuntos A y B se sabe que:
$n(A - B) = 7$; $n(A \cap B) = n(B - A) + 3$ y $n(A \cup B) = 34$.
Hallar: $n(A)$

A) 17 B) 19 C) 21
D) 22 E) 23

55. De 90 artistas se sabe que 12 bailan, cantan y declaman, hay 56 que bailan, 49 que declaman y 25 solo bailan. Además, todos los que cantan saben bailar, y 8 artistas no bailan, no cantan y no declaman. ¿Cuántos bailan y declaman, pero no cantan?

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

56. Se lanzan dos dados juntos. ¿Cuántos pares ordenados se pueden formar con los números de la cara superior?

A) 36 B) 24 C) 6 D) 8 E) 12

57. De un grupo de 590 alumnos se observó que 200 no postulan a UNI, 300 no postulan a San Marcos y 50 no postularon a ninguna de estas dos universidades. ¿Cuántos postularon a ambas universidades?

A) 70 B) 90 C) 50
D) 140 E) 160

58. De un grupo de 1800 estudiantes, el número de los que solo rindieron el segundo examen, es la mitad de los que rindieron el primero. El número de los que rindieron solo el primer examen es el triple de los que rindieron ambos exámenes e igual al de los que no rindieron ningún examen. ¿Cuántos rindieron al menos un examen?

A) 1000 B) 1100 C) 1300
D) 1500 E) 1200

59. En cierto instituto de Ciencias Administrativas se requiere que todos los estudiantes del último ciclo cursen Matemática, Contabilidad o Economía. Si se sabe que de 600 de estos estudiantes, 400 cursan Matemática, 300 Contabilidad, 250 Economía, 240 Economía y Matemática, 90 Contabilidad y Matemática y 50 Contabilidad y Economía. ¿Cuántos cursan las tres materias?

A) 20 B) 120 C) 30
D) 130 E) 80

60. En una encuesta a 100 televidentes sobre los programas de TV se obtuvo los siguientes resultados:

45 ven el programa A.
50 ven el programa B.
20 ven solamente los programas B y C.
10 ven solamente el programa C.

Además el número de encuestados que ven los tres programas es igual a la mitad de los que solo ven los programas A y B y 1/3 de los que ven solo el programa B. También el número de televidentes que ven solo los programas A y C es el doble de los que ven solo el programa A. Hallar el número de encuestados que no ven ninguno de los 3 programas.

A) 10 B) 20 C) 40
D) 80 E) 12

61. En un grupo de 80 estudiantes se encuentra que las cantidades que estudiaban las diversas lenguas son en número 72, distribuidos de la siguiente manera:

- Alemán solamente 25
- Español solamente 12
- Francés pero no alemán ni español 15
- Alemán y francés 10
- Alemán y español 8

Además los que estudiaban español y francés eran tantos como los que estudiaban alemán y español. Determinar cuántos estudiaban 2 lenguas solamente o estudiaban las 3 lenguas.

A) 14 B) 20 C) 12
D) 8 E) N. A.

62. De 120 personas se observa que 25 de ellas fuman y no usan reloj; 13 mujeres fuman; 15 mujeres no fuman ni usan reloj; 32 personas usan reloj, pero no fuman; 80 son hombres y 60 no usan reloj. ¿Cuántos hombres que usan reloj no fuman?

A) 20 B) 22 C) 24
D) 26 E) 28

63. De un total de 100 personas, de las cuales 30 eran mujeres se notó que: 25 no tenían reloj y 60 hombres tenían reloj. ¿Cuántos hombres usaban anteojos y terno si eran igual al número de mujeres que tenían reloj?

A) 5 B) 10 C) 15
D) 20 E) 25

64.. En un ómnibus interprovincial viajan 45 pasajeros entre los cuales hay personas del "norte" y "sur" del país; si hay 13 personas de sexo femenino que son del sur, 11 personas del sexo masculino del norte, 7 niñas sureñas, 5 niños del norte, 14 niños, 10 señoras y 9 señores. ¿Cuántas niñas norteñas viajaban?

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) N. A.

65. De un grupo de 50 personas se sabe que: 10 hombres no tienen 17 ni 18 años, 5 mujeres tienen 17 años, 16 mujeres no tienen 17 años, 14 mujeres no tienen 18 años. ¿Cuántos hombres tienen 17 o 18 años?

A) 17 B) 18 C) 19
D) 20 E) 21

66. De 3800 personas, el número de personas que consumen jugo surtido de manzana, naranja y plátano es 1/3 de los que consumen solo jugo de naranja; 1/5 de los que consumen solo jugo de manzana; 1/4 de los que consumen solo jugo de plátano; 1/3 de los que consumen jugo de naranja y manzana; 1/4 de los que consumen jugo de naranja y plátano; 1/2 de los que consumen jugo de plátano y manzana.

¿Cuántas personas consumen jugo de naranja o de manzana?

A) 3000 B) 2800 C) 2600
D) 2400 E) 2200

67. En una encuesta a estudiantes acerca de programas de TV se encontró que el 60% veían programas policiales, el 40% cómicos y el 50% los noticiosos. Además 30% veían programas policiales y noticiosos, 20% cómicos y policiales, y solo el 10% veían los tres programas. ¿Qué porcentaje ve exactamente dos programas?

A) 20% B) 25% C) 30%
D) 35% E) 40%

68. De un grupo de turistas, 9 conocen Cusco o Piura pero no Arequipa; de estos 9 y 8 conocen Cusco y 4 Piura. Además, 25 han visitado Arequipa o Piura, de los cuales 7 conocen Cusco pero no Piura y 2 han visitado Piura y Arequipa, pero no Cusco. Si 4 turistas conocen las tres ciudades, ¿a cuántos turistas se hizo referencia?

A) 30 B) 32 C) 34
D) 36 E) 38

69. En un aula de clase, a 49 alumnos les gusta Aritmética, a 47 Álgebra y a 53 Geometría. Se sabe además que el total de alumnos es 100 y de ellos a 8 les gusta los 3 cursos y a 8 ninguno de los tres. Determine: ¿A cuántos les gusta solamente dos de estos cursos? ¿A cuántos les gusta solamente uno de estos cursos?

A) 43 y 10 B) 30 y 11 C) 43 y 41
D) 40 y 11 E) 41 y 43

70. En una batalla intervinieron 100 hombres, de los cuales:

- 45 fueron heridos en la cabeza.
- 42 fueron heridos en el brazo.
- 40 fueron heridos en la pierna.
- 7 fueron heridos en la cabeza y brazo.
- 12 fueron heridos en la pierna y brazo.
- 15 fueron heridos en la pierna y cabeza.
- 2 no fueron heridos en ninguno de los 3 lugares mencionados anteriormente.

¿Cuántos fueron heridos en los 3 lugares?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6
E) 8

71. En una reunión, en la cual hay 80 personas, se observa que hay 35 mujeres. Además se observa que la cantidad de mujeres que bailan es el doble de la cantidad de hombres que no bailan. Calcular cuántas mujeres no bailan.

A) 10 B) 12 C) 5
D) 8 E) N. A.

72. Se dieron 3 exámenes para aprobar un curso y se observa lo siguiente:
Que el número de los que aprobaron los tres exámenes es igual al número de los que desaprobaron los 3 exámenes, igual a 1/3 de los que aprobaron solo dos exámenes e igual a 1/5 de los que solo aprobaron un examen. ¿Qué porcentaje del total de los alumnos aprobaron el curso, si para aprobarlo es necesario que aprueben por lo menos 2 exámenes?

A) 20% B) 40% C) 60%
D) 90% E) 70%

CLAVES

1. C	10. D	19. C	28. E	37. C	46. C	55. D	64. D
2. A	11. B	20. B	29. C	38. A	47. B	56. A	65. C
3. C	12. C	21. C	30. C	39. A	48. B	57. D	66. A
4. E	13. E	22. B	31. C	40. B	49. A	58. E	67. C
5. B	14. D	23. C	32. C	41. C	50. C	59. E	68. A
6. D	15. C	24. B	33. C	42. C	51. E	60. A	69. E
7. B	16. D	25. D	34. C	43. B	52. C	61. B	70. C
8. B	17. E	26. C	35. B	44. B	53. B	62. A	71. C
9. D	18. A	27. B	36. D	45. E	54. D	63. B	72. B

Sistema de numeración

02 capítulo

Diofanto de Alejandría fue un antiguo matemático griego que nació alrededor del 200-214 d. C. en Alejandría y falleció alrededor de 284-298 d. C. Nada se conoce con seguridad sobre su vida, salvo la edad en la que falleciera; esto, gracias al epitafio redactado en forma de problema y conservado en la antología griega.

El matemático alejandrino debe su renombre a su obra *Arithmetica*, la cual constaba de trece libros, de los que solo se han hallado seis. Esta obra fue publicada por Guilielmus Xylander en 1575 a partir de unos manuscritos de la universidad de Wittenberg, añadiendo el editor un manuscrito sobre números poligonales, fragmento de otro tratado del mismo autor. Los libros que faltan parece que se perdieron tempranamente, ya que no hay razones para suponer que los traductores y comentaristas árabes dispusieran de otros manuscritos además de los que aún se conservan.

En esta obra realiza sus estudios de ecuaciones con variables que tienen un valor racional (ecuaciones diofánticas), aunque no es una obra de carácter teórico sino una colección de problemas, adecuados para soluciones enteras. Importante fue también su contribución en el campo de la notación; si bien los símbolos empleados por Diofanto no son como los concebimos actualmente.

Fuente: Wikipedia

DEFINICIÓN

Numeración, es una parte de la Aritmética que se encarga de estudiar la correcta lectura y escritura de los números en general.

DEFINICIONES PREVIAS

Número

Es un ente matemático que nos da la idea de cantidad y hace posible cuantificar los elementos de la naturaleza.

Numeral

Es la representación simbólica de un número.

Cifras (o dígito)

Convencionalmente se emplean los siguientes símbolos: 0; 1; 2; 3; ....

SISTEMA DE NUMERACIÓN

Se denomina así, al conjunto de reglas, principios o leyes que nos permitirán leer, escribir y operar correctamente los números en los distintos sistemas de numeración.

BASE DE UN SISTEMA DE NUMERACIÓN

La base de un sistema de numeración, es un número entero positivo mayor que la unidad, e indica la cantidad de cifras (o dígitos) que se emplean para escribir a todos los números en dicho sistema de numeración.

A continuación, se muestra una breve clasificación de los sistemas de numeración:

Base	Sistema de numeración	Cifras o dígitos
2	Binario	0; 1
3	Ternario	0; 1; 2
4	Cuaternario	0; 1; 2; 3
5	Quinario	0; 1; 2; 3; 4
6	Senario	0; 1; 2; 3; 4; 5
7	Heptanario	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6
8	Octanario	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7
9	Nonario	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8
10	Decimal o décuplo	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9
⋮		
11	Undecimal	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; α
12	Duodecimal	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; β
n	Enesimal	0; 1; 2; 3; ...; (n − 1)

Nota

I. Convencionalmente se ha optado por lo siguiente:
Cifra 10 se denota por α o (10) o A
Cifra 11 se denota por β u (11) o B
Cifra 12 se denota por γ o (12) o C

II. La base del sistema de numeración, se escribe en la parte final del numeral como subíndice y de no indicarse la base, se entiende que está escrito en base decimal.

Ejemplo: 4526_8 ; $73\alpha4_{12}$; $8\alpha3\beta_{13}$; 4728

III. Los numerales tienen nombre propio solo en base decimal; mientras que en otros sistemas, se nombran cifra a cifra finalizando con la base.

Ejemplo: 845: Ochocientos cuarenta y cinco.
263_8: Dos, seis, tres en base ocho.
$4\alpha7_{12}$: Cuatro, diez, siete en base doce.

REPRESENTACIÓN LITERAL DE UN NUMERAL

Consiste en representar a las cifras del numeral por letras minúsculas del abecedario.

Ejemplos:

A continuación, se dan algunas representaciones.

1. Números de dos cifras:
En base 10: $\overline{ab}$ = 10; 11; 12; ...; 99
En base 8: $\overline{xy}_8$ = 10_8; 11_8; 12_8; ...; 77_8
2. Números de tres cifras:
En base 10: $\overline{xyz}$ = 100; 101; 102; ...; 999
En base 12: $\overline{pqr}_{12}$ = 100_{12}; 101_{12}; ...; $\beta\beta\beta_{12}$

NÚMERO CAPICÚA

Es aquel número entero positivo, cuyo valor no cambia al invertir el orden de sus cifras.

Ejemplo:

Número capicúa:	474	3883_9	40504_n
	↓	↓	↓
Representación literal:	$\overline{aba}$	$\overline{xyyx}_9$	$\overline{abcba}_n$

Algunas frases de nuestro idioma al ser leídas al revés, adecuadamente no cambian su significado.

Ejemplo:

ANA RADAR RECONOCER
ANITA LAVA LA TINA OSO BABOSO

PRINCIPIOS DE LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Principio del orden

Cada cifra en un numeral ocupa un orden, el que se indica de derecha a izquierda, mientras que el lugar se indica de izquierda a derecha.

Ejemplo:

Orden	Tres	Dos	Uno	Cero
Numeral	6	4	5	8
Lugar	1.°	2.°	3.°	4.°

Se debe destacar que estas órdenes, en el sistema decimal, tienen nombre propio, como son: unidades, decenas, centenas, unidades de millar, etc.

Principio de la base

En el sistema de numeración de base "n", con "n" unidades de cualquier orden, se puede formar una unidad del orden inmediato superior.

Ejemplo:

En el sistema de numeración decimal se cumple:

Con 10 unidades, se obtiene 1 decena
(orden cero) (orden uno)

Con 10 decenas, se obtiene 1 centena
(orden uno) (orden dos)

Con 10 centenas, se obtiene 1 millar
(orden dos) (orden tres)

Principio del valor

Toda cifra dentro de un numeral tiene dos valores: valor absoluto y valor relativo.

Valor absoluto (VA). Es el valor que tiene la cifra por su representación. Su valor no cambia, al cambiar la cifra de orden.

Ejemplo:

4786; 9478

VA = 7 VA = 7

Valor relativo (VR). Es el valor que tiene la cifra por su ubicación dentro del número. Su valor cambia, al cambiar la cifra de orden.

Ejemplo:

4786; 9478

7 centenas 7 decenas
700 unidades 70 unidades

Principio de la descomposición polinómica

Todo numeral se puede descomponer como un polinomio, cuyas características son las siguientes:

- La base del polinomio es la base del sistema de numeración.
- El grado del polinomio es una unidad menor que la cantidad de cifras del numeral.
- Los coeficientes del polinomio son las cifras del numeral.

Ejemplos:

Descomponer polinómicamente los siguientes numerales:

- $4352_6 = 4\times 6^3 + 3\times 6^2 + 5\times 6^1 + 2\times 6^0$
- $57463_8 = 5\times 8^4 + 7\times 8^3 + 4\times 8^2 + 6\times 8^1 + 3\times 8^0$

En casos especiales es necesario una descomposición en bloques:

- $\overline{abab} = \underbrace{\overline{ab00}}_{100ab} + \overline{ab} = 101\overline{ab}$
- $\overline{abab}_n = \underbrace{\overline{ab00}_n}_{100_n\overline{ab}_n} + \overline{ab}_n = 101_n(\overline{ab}_n) = (n^2+1)\overline{ab}_n$
- $\overline{abcabc}_n = 1000_n(\overline{abc}_n) + \overline{abc}_n = (n^3+1)\overline{abc}_n$

REPRESENTACIONES ESPECIALES

Numerales de cifras iguales

Si todas las cifras de un numeral son iguales, es posible representarlas de manera sencilla. Esta queda en función a la base del sistema de numeración y su exponente coincide con la cantidad de cifras iguales.

Ejemplos:

1. En base decimal:

- $999 = 10^3 - 1$ (3 → Cantidad de cifras del numeral; 10 → Base del sistema de numeración)

- $\underbrace{99...99}_{\text{"n" cifras}} = 10^n - 1$
- $\underbrace{44...4}_{12\text{ cifras}} = 4(\underbrace{11...11}_{12\text{ cifras}})$

Multiplico y divido por 9:

$\frac{4}{9}(\underbrace{99...9}_{12\text{ cifras}}) = \frac{4}{9}(10^{12} - 1)$ { 1.° Se factoriza la cifra 4. 2.° Se multiplica y divide por 9.

2. En otros sistemas, tenemos:

- $6666_7 = 7^4 - 1$ (4 → Cantidad de cifras del numeral; 7 → Base del sistema de numeración)

- $\underbrace{88...8_9}_{150\text{ cifras}} = 9^{150} - 1$ (150 → Cantidad de cifras del numeral; 9 → Base del sistema de numeración)

- $\underbrace{55...5_9}_{2002\text{ cifras}} = \frac{5}{8}(9^{2002} - 1)$ { 1.° Se factoriza la cifra 5. 2.° Se multiplica y divide por 8.

Numerales que terminan en cifras ceros

Los numerales que terminan en cifras ceros, pueden representarse de una manera sencilla, en la que quedan en función de las primeras cifras, la base y la cantidad de ceros.

Ejemplo:

- $10000_8 = 8^4$ (4 → Cantidad ceros; 8 → Base del sistema)

- $400000_9 = 4 \times 9^5$ (4: 1.ª cifra; 9: Base del sistema; 5: Cantidad ceros)

- $200200...00_5 = 2002_5 \times 5^{2002}$ (2002 ceros; 2002_5: 1.ras cifras; 5: Base del sistema; 2002: Cantidad ceros)

CONVERSIÓN DE LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Son métodos que permiten relacionar a los números escritos en los distintos sistemas de numeración.

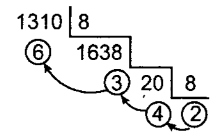
Primer caso

Convertir un número de la base 10 a base "n".

Regla: Se divide el número sucesivamente por "n", hasta que la división ya no sea posible.

Ejemplo:

Convertir el número 1310 a base 8.



Tener en cuenta que se consideran:

- Los residuos
- El último cociente
- El orden indicado

$\therefore$ $1310 = 2436_8$

Segundo caso

Convertir un número de base "n" a base 10.

Regla: Se descompone el numeral polinómicamente y se reducen las cantidades homogéneas.

Ejemplo:

Convertir el número 2543_6 a base 10.

$2543_6 = 2 \times 6^3 + 5 \times 6^2 + 4 \times 6^1 + 3 \times 6^0$

$2543_6 = 2 \times 216 + 5 \times 36 + 3 \times 1$

$\therefore$ $2543_6 = 639$

Tener en cuenta que:

- Se descompone polinómicamente.
- Se reducen cantidades.

$\therefore$ $2543_6 = 639$

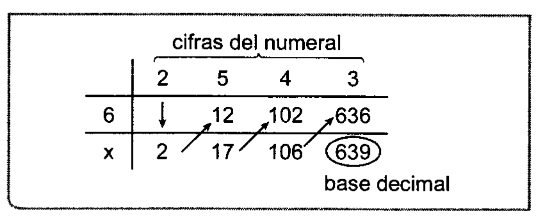
Nota

Otro método para convertir un número de base "n" a base 10 es el **método de Ruffini.**

Ejemplo: Convertir el numeral 2543_6 a base 10 por el método de Ruffini.

Resolución:

Se disponen las cifras del numeral y la base del sistema de numeración, como sigue:



	2	5	4	3
6	↓	12	102	636
x	2	17	106	639

(cifras del numeral: 2 5 4 3; 639: base decimal)

Tercer caso

Convertir un número de la base "m" a base "n" (m y n distintos de 10).

Regla: El numeral de la base "m" se convierte a base decimal y luego de la base decimal a base "n".

Ejemplo:

Convertir el número 2543_6 a base 9.

1.° 2543_6 se convierte a base decimal. (Regla 2): 639

2.° 639 se convierte a base 9 (Regla 1): 780_9

$\therefore$ $2543_6 = 780_9$

Conclusiones:

I. Se debe tener presente todos los valores posibles que pueden tomar las cifras desconocidas del numeral.

Ejemplo:

Sea el numeral $\overline{a4b6}_7$

Vemos que:

- Cifras desconocidas: a y b en base heptal.
- Valores posibles:
  a = 1; 2; 3; 4; 5; 6 (la primera cifra nunca puede ser cero).
  b = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 (la cifra intermedia puede ser cero).

II. La base del sistema de numeración siempre es mayor que todas las cifras del numeral.

Ejemplo:

Sea el numeral: $\overline{4x7y}_n$

Vemos que:

- Mayor cifra desconocida en base "n": 7
- Se cumple: $n > 7$

III. Si el numeral está escrito en dos sistemas de numeración, tendrá mayor representación numérica en la base menor y menor representación numérica en la base mayor.

Ejemplo:

Si tenemos que: $2543_x = 1602_y$

Vemos que:

- El numeral 2543 tiene mayor representación numérica que el numeral 1602.

$\therefore$ $x < y$

CRITERIO DE PARIDAD DE UN NUMERAL

La naturaleza de un numeral, al ser expresado en distintos sistemas de numeración no cambia.

A continuación, se dan reglas para reconocer la paridad de un numeral.

Si la base es par:

La última cifra del numeral determina su paridad.

Ejemplo:

- 5436_8 = Última cifra: 6 ⇒ El numeral es **par.**
- 6543_{12} = Última cifra: 3 ⇒ El numeral es **impar**.

Si la base es impar:

El resultado de la suma de las cifras del numeral determina la paridad.

Ejemplo:

- $4362_9 = \Sigma$cifras = 15 ⇒ El numeral es **impar.**
- $5043_7 = \Sigma$cifras = 12 ⇒ El numeral es **par**.

CASOS ESPECIALES

I. Convertir un número de la base "n" a base "n^k", $k \in \mathbb{Z}^+$.

Regla: Dado el número en base "n", se forman grupos de "k" cifras (de derecha a izquierda) y por cada grupo que se forma, se encontrará una cifra en base "n^k". Las cifras se obtienen convirtiendo cada grupo a base decimal.

Ejemplos:

1. Convertir el número 101011110_2 a base 8.

Resolución:

Vemos que $8 = 2^3$

Luego, se formarán grupos de 3 cifras de derecha a izquierda.

grupos de 3 cifras — 3 cifras

$\widehat{101}\ \widehat{011}\ \widehat{110}_2 = _\ _\ __8$

3.° 2.° 1.°

Las cifras del número en base 8:
Cifra de orden cero: 110_2 a base 10 = 6
Cifra de orden uno: 011_2 a base 10 = 3
Cifra de orden dos: 101_2 a base 10 = 5

∴ El número en base 8 es: 536_8

2. Convertir el número 221122010_3 a base 9.

Resolución:

Como $9 = 3^2$, formamos grupos de 2 cifras de derecha a izquierda y luego cada grupo (en base 3) se convierte a base decimal.

Base 3	2_3	21_3	12_3	20_3 10_3	
Base 10	2	7	5	6	3

∴ El número en base 9 es: 27563_9

II. Convertir un número de la base "n^k", $k \in \mathbb{Z}^+$, a base "n".

Regla:
Dado el numeral en base "n^k", por cada una de sus cifras se obtendrá "k" cifras en base "n" y de ser necesario se completará con ceros.

Ejemplos:

1. Convertir el número 5462_8 a base 2.

Resolución:

Como: $8 = 2^3$, vemos que por cada cifra de la base 8 se obtendrá 3 cifras en base 2.

Base 8	5	4	6	2
Base 2	101	100	110	010

∴ El número en base 2 es: 101100110010_2

2. Convertir el número 2534_9 a base 3.

Resolución:

Como $9 = 3^2$, vemos que por cada cifra (base 9) se escribirá 2 cifras en base 3.

Tenemos:

Base 9	2	5	3	4
Base 3	2	12	10	11

∴ El número en base 3 es: 2121011_3

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Se desea repartir un millón de dólares entre cierto número de personas, de manera que les corresponda: \$1; \$8; \$64; \$512; etc., con la condición de que no más de 7 personas reciban la misma suma. ¿Cuántas personas fueron beneficiadas?

Resolución

Las cantidades que recibirán: 1; 8; 64; 512; son las mismas que: 8^0; 8^1; 8^2; 8^3; ...

Y como no más de 7 personas recibirán la misma suma, el millón de dólares se escribe en base 8.

Se tiene: $1\ 000\ 000 = 3641100_8$

Ahora, si descomponemos polinómicamente el número:

$3641100_8 = 3\times8^6 + 6\times8^5 + 4\times8^4 + 1\times8^3 + 1\times8^2$

Resulta que: 3 personas recibirán $\$8^6$
6 personas recibirán $\$8^5$
4 personas recibirán $\$8^4$
1 persona recibirá $\$8^3$
1 persona recibirá $\$8^2$

Luego, las personas beneficiadas:
$3 + 6 + 4 + 1 + 1 = 15$
(Suma de las cifras del número de la base 8)

$\therefore$ Se beneficiarán 15 personas.

2. Sabiendo que: $17\ 668 = 4^a + 4^b + 4^c + 4^d$, hallar el valor de: $a + b + c + d$

Resolución:

Como en el segundo miembro se tiene la suma de potencias de 4, se escribe el número 17 668 a base 4.

$$17\ 668 = \underset{4^7}{1}\ \underset{4^6}{0}\ \underset{4^5}{1}\ \underset{4^4}{1}\ \underset{4^3}{0}\ \underset{4^2}{0}\ \underset{4^1}{1}\ \underset{1}{0}{}_4$$

En la descomposición:
$17\ 668 = 4^7 + 4^5 + 4^4 + 4^1$

$\Rightarrow a = 7; b = 5; c = 4; d = 1 \quad \therefore a + b + c + d = 17$

3. ¿Cuántos números de 4 cifras del sistema senario se escribirán también con 4 cifras en los sistemas heptanario y octanario?

Resolución:

Considerando a los números de 4 cifras de los sistemas senario, heptanario y octanario.

Base 6: 1000_6; 1001_6; ...; 3333_6
↓ ↓ ↓
216 217 777

Base 7: 1000_7; 1001_7; ...; 6666_7
↓ ↓ ↓
343 344 2400

Base 8: 1000_8; 1001_8; ...; 7777_8
↓ ↓ ↓
512 513 4095

Los que se escribirán con 4 cifras en los tres sistemas, serán los comunes a los tres sistemas, es decir: $\underbrace{512; 513; 514; ....; 777}$

$777 - 511 = 266$ números.

$\therefore$ Existen 266 números que se escribirán con 4 cifras en las bases 6; 7 y 8.

4. Sabiendo que el numeral $\overline{abc}$ del sistema heptanario, se escribe como $\overline{cba}$ en el sistema nonario. Hallar el número en el sistema decimal.

Resolución:

Se tiene: $\overline{abc}_7 = \overline{cba}_9$
Vemos que: a, b y c son menores que 7.
$49a + 7b + c = 81c + 9b + a \Rightarrow 48a - 80c = 2b$
$\underbrace{8(3a - 5c)}_{0} = \underbrace{b}_{0} \Rightarrow 3a = 5c \quad \therefore a = 5; c = 3$

El número es: $503_7 = 305_9$
En base decimal: 248

5. Si el numeral $\overline{4a53}_n$ se escribe en base 8 como $\overline{2b44}$, hallar: $a + b + n$.

Resolución:

Tenemos: $\overset{\text{n.° par}}{\overline{4\,a\,5\,3}_n} = \overset{\text{n.° par}}{\overline{2\,b\,4\,4}_8}$
Vemos que: $5 < n < 8$
Como el numeral es par, entonces: $n = 7$
Luego: $\overline{4\,a\,5\,3}_n = \overline{2\,b\,4\,4}_8$
↓↓↓↓ ↓↓↓↓
$7^3 7^2 7^1 1 \quad 8^3 8^2 8^1 1$

Descomponiendo polinómicamente y reduciendo, se tiene:

$\overbrace{350 + 49(a)}^{\text{múltiplo de 7}} = 64(b) \Rightarrow b = 7$, luego: $a = 2$
$\therefore a + b + n = 16$

6. Sabiendo que: $H = \{n\ /\ 3421_5 = \overline{xyz}_n\}$, ¿cuántos elementos tiene H?

Resolución:

Hallamos, en cuántos sistemas de numeración, el número 3421_5 se escribirá con 3 cifras.

Para que el número tenga tres cifras, se cumple:
$100_n \le 3421_5 < 1000_n$

En base decimal: $n^2 \le 486 < n^3$

Los valores que simultáneamente cumple "n" en la desigualdad: $n = \{8; 9; 10; ...; 22\} \Rightarrow$ 15 valores

$\therefore$ El conjunto H tiene 15 elementos.

7. Al escribir el numeral 1464_n a la base "n + 1", ¿cuál es la cifra de menor orden?

Resolución:

Descomponiendo polinómicamente:

$1464_n = 1(n^3) + 4(n^2) + 6(n) + 4$ ...(1)

Hacemos:

$n + 1 = x \Rightarrow n = x - 1$

En (1):

$1464_n = (x-1)^3 + 4(x-1)^2 + 6(x-1) + 4$

$1464_n = x^3 + x^2 + x - 3 = 111(-3)_x$

Corregimos la cifra (−3):

$1464_n = 1\ 1\ \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{1}\ \overset{+(n+1)}{(-3)}_{(n+1)}$

El numeral en base "n + 1": $\overline{1\ 1\ 0\ (n-2)}_{(n+1)}$

∴ La cifra de menor orden: n − 2

8. Si el numeral $\overline{(5-a)(b+2)(a+b)(n-1)(8-b)(a+1)}_n$ es capicúa, hallar el valor de: a + b + n.

Resolución:

Las cifras equidistantes de un número capicúa son iguales.

Luego:

- $5 - a = a + 1 \Rightarrow a = 2$
- $b + 2 = 8 - b \Rightarrow b = 3$
- $a + b = n - 1 \Rightarrow 2 + 3 = n - 1$
  $\Rightarrow n = 6$ ∴ $a + b + n = 11$

9. Sabiendo que:

$$\overline{(n-1)(4-n)(n^2)\left(\frac{n+5}{2}\right)} = \overline{(2a)aaa}_b$$

hallar: a + b + n

Resolución:

Del numeral: $\overline{(n-1)(4-n)(n^2)\left(\frac{n+5}{2}\right)}$, escrito en base decimal, se cumple:

$n - 1 > 0;$ $\quad 4 - n \geq 0$

$n > 1$ $\quad 4 \geq n$

$\Rightarrow 1 < n \leq 4 \Rightarrow n = \{2; 3; 4\}$

Pero: $n^2 \leq 9$ y $\left(\frac{n+5}{2}\right) \in \mathbb{N}$. Solo cumple: n = 3

Reemplazando:

$2194 = \overline{(2a)aaa}_b \Rightarrow 2194 = a(2111_b)$

Descomponiendo polinómicamente:

$2(1097) = a(2b^3 + b^2 + b + 1)$

Igualando factores:

$a = 2 \Rightarrow 2b^3 + b^2 + b + 1 = 1097 \Rightarrow b = 8$

∴ $a + b + n = 13$

10. El menor número de cuatro cifras diferentes, de la base "n", excede al mayor número de dos cifras diferentes de dicha base "n" en 469. Dar el valor de "n".

Resolución:

Menor número de 4 cifras diferentes: 1023_n

Mayor número de 2 cifras diferentes: $\overline{(n-1)(n-2)}_n$

Por dato: $1023_n - \overline{(n-1)(n-2)}_n = 469$

Descomponiendo polinómicamente:

$n^3 + 2n + 3 - n^2 + n - n + 2 = 469$

$n^3 - n^2 + 2n + 5 = 469 \Rightarrow n = 8$

∴ El valor de n = 8

11. Dado: $\overline{12a}_b + \overline{2b3}_c + \overline{215}_a + \overline{20c}_d = \overline{e0d}$

Calcular: a + b + c + d + e

Resolución:

De: $\overline{12a}_b + \overline{2b3}_c + \overline{215}_a + \overline{20c}_d = \overline{e0d}$

Se deduce que: $a < b$; $b < c$; $5 < a$; $c < d$; $d < 10$

Ordenamos las desigualdades:

$5 < a < b < c < d < 10$

$a = 6;$ $b = 7;$ $c = 8;$ $d = 9$

Reemplazamos y hallamos el valor de "e":

$126_7 + 273_8 + 215_6 + 208_9 = \overline{e09}$

A base decimal:

$69 + 187 + 83 + 170 = \overline{e09}$

$509 = \overline{e09} \Rightarrow e = 5$

∴ $a + b + c + d + e = 35$

12. Sabiendo que: $\overline{36ab} = \overline{3ab} \times 4 + \overline{ab3} \times 5$

hallar: a + b

Resolución:

Descomponiendo en bloques:

$3600 + \overline{ab} = (300 + \overline{ab})4 + (\overline{ab0} + 3)5$

$3600 + \overline{ab} = 1200 + 4 \times \overline{ab} + 50 \times \overline{ab} + 15$

$2385 = 53 \times \overline{ab} \Rightarrow \overline{ab} = 45$ ∴ $a + b = 9$

13. Hallar el número entero comprendido entre 300 y 400, tal que el triple de su exceso sobre 100, es igual al exceso del número que resulta de invertir el orden de sus cifras sobre 2.

Resolución:

Por dato: $300 < n.° < 400 \Rightarrow n.° = \overline{3ab}$

Además: $3(\overline{3ab} - 100) = \overline{ba3} - 2$

Descomponiendo polinómicamente:

$3(300 + 10a + b - 100) = 100b + 10a + 3 - 2$

$900 + 30a + 3b - 300 = 100b + 10a + 1$

Reduciendo:

$599 + 20(a) = 97(b) \Rightarrow a = 4;$ $b = 7$

∴ El número es: 347.

14. Sabiendo que: $\underbrace{123123\ldots_n}_{60\text{ cifras}} = \underbrace{\overline{(8n+3)(8n+3)\ldots}_k}_{20\text{ cifras}}$

hallar: n + k

Resolución:

Se tiene:

$\underbrace{123123\ldots123_n}_{60\text{ cifras}} = \underbrace{\overline{(8n+3)(8n+3)\ldots(8n+3)}_k}_{20\text{ cifras}}$

Descomponiendo en bloques:

$$\underbrace{123_n[1001001...1001_n]}_{58 \text{ cifras}} = (8n + 3)\underbrace{(111...1_k)}_{20 \text{ cifras}}$$

Descomponiendo polinómicamente:

$$(n^2 + 2n + 3)(n^{57} + n^{54} + ... + n^3 + 1) = (8n + 3)(k^{19} + k^{18} + ... + k + 1)$$

Reducimos la expresión como cocientes notables:

$$(n^2 + 2n + 3)\left[\frac{(n^3)^{20} - 1}{n^3 - 1}\right] = (8n + 3)\left[\frac{k^{20} - 1}{k - 1}\right]$$

De donde se deduce que:

$k = n^3 \quad \wedge \quad n^2 + 2n + 3 = 8n + 3$

$\Rightarrow n = 6; k = 6^3 = 216 \qquad \therefore k + n = 222$

15. Si: $\overline{abba}_6 = 11234_n$, calcule: $a + b + n$

Resolución:

De: $\overline{abba}_6 = 11234_n$

Por propiedad: $4 < n < 6 \Rightarrow n = 5$

Tenemos: 11234_5 a base 6: 3443_6

$\Rightarrow \overline{abba}_6 = 3443_6 \Rightarrow a = 3; b = 4$

$\therefore a + b + n = 12$

16. Sabiendo que:

$\overline{abba}_6 = 31263_a = 55333_b = 17011_c = 11483_d$

hallar el valor de: $a + b + c + d$

Resolución:

De:

$$\overline{abba}_6 = \overbrace{31263_a}^{1} = \overbrace{55333_b}^{2} = \overbrace{17011_c}^{3} = \overbrace{11483_d}^{4}$$

Se deduce: a; b; c y d < 10

$6 < a; \ 5 < b; \ 7 < c; \ 8 < d;$

De (1) y (2): Por propiedad: $b < a$

De (1) y (3): Por propiedad: $a < c$

De (3) y (4): Por propiedad: $c < d$

Ordenando las desigualdades:

$5 < b < a < c < d < 10 \Rightarrow b = 6; a = 7; c = 8; d = 9$

$\therefore a + b + c + d = 30$

17. Si un número de cierta base se convierte a las 2 bases siguientes se escribe como 1134 y 541 respectivamente. ¿Cómo se escribe en la base anterior?

Resolución:

De la base "n" se escribe en las bases "n + 1" y "n + 2" como 1134 y 541.

Luego: $1134_{(n+1)} = 541_{(n+2)}$

Descomponiendo polinómicamente:

$$1(n + 1)^3 + 1(n + 1)^2 + 3(n + 1) + 4 = 5(n + 2)^2 + 4(n + 2) + 1$$

Efectuando y reduciendo:

$n^3 - n^2 - 16n - 20 = 0 \Rightarrow n = 5$

Reemplazando: $1134_6 = 541_7$

Escribimos el numeral en base 4: 10102_4

$\therefore$ Se escribe como 10102_4

18. Un cierto número de cifras significativas en el sistema binario se escribe en el sistema decimal como $\overline{8abc}$. Calcular el valor de: $a + b + c$.

Resolución:

n.° de cifras significativas en base 2: $\underbrace{11....11_2}_{\text{"n" cifras}}$

Por dato: $\underbrace{11....11_2}_{\text{"n" cifras}} = \overline{8abc}$

En base 10: $2^n - 1 = \overline{8abc} \Rightarrow n = 13$

Reemplazando: $2^{13} - 1 = \overline{8abc}$

Efectuando: $8191 = \overline{8abc} \Rightarrow a = 1; \ b = 9; \ c = 1$

$\therefore a + b + c = 11$

19. Hallar el valor de "n", si: $\overline{a2b6c} = \overline{2c(c-4)1}_8$

Además: $\overline{(a-3)b}_{\overline{1a}_{\overline{1b}_{\overline{1c}_n}}} = 28$

Resolución:

De: $\overline{a2b6}_c = \overline{2c(c-4)1}_8$

Vemos que: $6 < c \quad \wedge \quad c < 8 \Rightarrow c = 7$

Luego: $\overline{a2b6}_7 = 2731_8$

A base 7: $\overline{a2b6}_7 = 4236_7 \Rightarrow a = 4; b = 3$

Reemplazando: $13_{14_{13_{17_n}}} = 28$

Efectuando:

$n + 7 + 3 + 4 + 3 = 28 \qquad \therefore n = 11$

20. ¿Cuántas cifras "ceros" tiene la expresión:

$$N = 3^{17} + 3^{10} + 3^6 + 3 + 1,$$

al ser expresado en el sistema ternario?

Resolución:

Expresando cada sumando en base 3.

$3^{17} = 1\underbrace{0...0000...0}_{17 \text{ ceros}}0_3$

$3^{10} = 1\underbrace{0...0000...0}_{10 \text{ ceros}}0_3$

$3^6 = 1\underbrace{0...0}_{6 \text{ ceros}}0_3$

$3^1 = 10_3$

$1 = 1_3$

Sumando: $N = 1\underbrace{000000}_{6}1\underbrace{000}_{3}1\underbrace{0000}_{4}11_3$

$\therefore$ Son 13 cifras "ceros".

21. Calcular "a + n", sabiendo que:

$$\overline{aaa} = \overline{1(n-1)}_{\overline{1(n-2)}_{\cdot_{\cdot_{13_{12_{11_n}}}}}}$$

Resolución:

En el numeral: $\overline{1(n-1)}_{\overline{1(n-2)}_{\cdot_{\cdot_{13_{12_{11_n}}}}}}$

Se cumple:

$n + [1 + 2 + 3 + ... + (n - 2) + (n - 1)] = \dfrac{n(n + 1)}{2}$

Luego:

$\dfrac{n(n + 1)}{2} = \overline{aaa} = 111a = 3(37)(a)$

$\Rightarrow n(n + 1) = 6(37)(a) \Rightarrow a = 6$

Igualando factores: $n(n + 1) = 36(37)$

$\Rightarrow n = 36 \quad \therefore\ a + n = 42$

22. Sabiendo que: $\underbrace{\overline{(n-1)(n-1)...(n-1)}_n}_{\text{"k" cifras}} = \overline{1xy7}$

hallar: $x + y + n + k$

Resolución:

De: $\underbrace{\overline{(n-1)(n-1)...(n-1)}_n}_{\text{"k" cifras}} = \overline{1xy7}$

$n^k - 1 = \overline{1xy7} \Rightarrow n^k = \overline{1xy8} \Rightarrow 12^3 = 1728$

$\Rightarrow n = 12;\ k = 3;\ x = 7;\ y = 2$

$\therefore\ n + k + x + y = 24$

23. Si: $\overline{(a-3)(5-a)(2a+1)} = \overline{aba}_n$

determinar: $H = \overline{1a}_{\overline{1a}_{\overline{1a}_{\ddots_{\overline{1a}_n}}}}$ ("bn" veces)

Resolución:

Del numeral: $\overline{(a-3)(5-a)(2a+1)}$

Se cumple: $a - 3 > 0 \ \wedge\ 5 - a \geq 0 \ \wedge\ 2a + 1 \leq 9$

$a > 3 \qquad a \leq 5 \qquad a \leq 4$

$\Rightarrow a = 4$

Reemplazando: $119 = \overline{4b4}_n$

$119 = 4n^2 + bn + 4 \Rightarrow 115 = n(4n + b) = 5 \times 23$

$n = 5;\ b = 3 \Rightarrow (b)(n) = 15$

Enseguida: $14_{14_{\ddots_{14_5}}}$ (15 veces)

Efectuando: $H = 5 + 4(15) = 65 \quad \therefore\ H = 65$

24. Sabiendo que: $\overline{abm}_{\overline{ab}_{\overline{ab}_{\ddots_{\overline{ab}_3}}}}$ (m veces) $= \overline{14(m + a)}$

hallar: $a + b + m$

Resolución:

Hacemos:

$x = \overline{ab}_{\overline{ab}_{\overline{ab}_{\ddots_{\overline{ab}_3}}}}$ (m veces) ...(1); de donde: a y b < 3

Luego, se tiene: $\overline{abm}_x = \overline{14(m + 3)}$

En forma equivalente: $\overline{ab0}_x + m = 143 + m$

Descomponiendo polinómicamente:

$ax^2 + bx = 143 \Rightarrow x(ax + b) = 143$

Descomponiendo en 2 factores:

$x \cdot \overline{ab}_x = 13(11)$

Igualando adecuadamente:

$x = 11$ y $\overline{ab}_{11} = 13 = 12_{11} \Rightarrow a = 1;\ b = 2$

Luego: $11 = 12_{12_{\ddots_{12_3}}}$ (m veces)

Por propiedad:

$11 = 3 + 2m \Rightarrow m = 4$

$\therefore\ a + b + m = 1 + 2 + 4 = 7$

25. Si: $\overline{ab} = a(a + b)$, hallar: $b - a$

Resolución:

De: $\overline{ab} = a(a + b)$

Descomponiendo polinómicamente y despejando el valor de "b", se tiene: $b = \dfrac{(10 - a)a}{a - 1}$

Para que "b" sea entero, "a" podría ser: 2 o 4

Si: $a = 2 \Rightarrow b = 8(2) = 16$ no cumple

Si: $a = 4 \Rightarrow b = \dfrac{6(4)}{3} = 8$ cumple

$\therefore\ b - a = 4$

26. Sabiendo que: $\overline{ac}_b = \overline{cb}_{(a+2)}$ y además: $a + b + c = 21$, determinar el valor de "a".

Resolución:

De: $\overline{ac}_b = \overline{cb}_{(a+2)}$ ...(α)

Se cumple que: $a < b < a + 2$

$\Rightarrow b = a + 1$ ...(1)

Pero: $a + b + c = 21$ ...(2)

(1) en (2): $2a + c = 20$

2a ↓	c ↓	
7	6	(sí cumple)
8	4	(no cumple)
9	2	(no cumple)

Verificamos en (α) y solo cumple:

$a = 7;\ b = 8;\ c = 6 \quad \therefore$ El valor de "a" es 7.

27. Si al convertir el numeral $\overline{ababab}$ del sistema enesimal al sistema decimal se obtiene 7161. Calcular: (a)(b)(n).

Resolución:

Por dato: $\overline{ababab}_n = 7161$

Descomponiendo en bloques:

$\underbrace{\overline{ab}_n(n^4 + n^2 + 1)}_{\text{2 factores}} = 7161$

Descomponiendo 7161 en dos factores, donde uno de ellos es de la forma $(n^4 + n^2 + 1)$, tenemos:

$\overline{ab}_n(n^4 + n^2 + 1) = 651(11) \Rightarrow n = 5$

$\overline{ab}_5 = 11 = 21_5 \Rightarrow a = 2;\ b = 1$

$\therefore$ El valor de: $(a)(b)(n) = (2)(1)(5) = 10$

28. ¿Qué valor debe tener "a", para que al convertir el numeral $N = \underbrace{\overline{44...44a_7}}_{42\text{ cifras}}$ al sistema decimal, este termine en cifra tres?

Resolución:

Por dato:

$\underbrace{\overline{44...44a_7}}_{42\text{ cifras}} = ...3 \Rightarrow \underbrace{\overline{44...440_7}}_{42\text{ cifras}} + a + 4 = ...7$

$4(\underbrace{11...11_7}_{42\text{ cifras}}) + a = ...7$

$\times 6$: $4(\underbrace{66...66_7}_{42\text{ cifras}}) + 6a = ...2 \Rightarrow 4(\underbrace{7^{42}}_{...9\text{ (última cifra de }7^{42})} - 1) + 6a = ...2$

$4(...8) + 6a = ...2 \Rightarrow ...2 + 6a = ...2$

$6a = ...0 \quad \therefore a = 5$

29. Sabiendo que: $\overline{abcabc_n} = 21\,672$, hallar el valor de "a + b + c + n".

Resolución:

Por descomposición en bloques, se tiene:

$\underbrace{\overline{abc_n}(n^3 + 1)}_{2\text{ factores}} = 21\,672$

Descomponiendo 21 672 en dos factores, donde uno de ellos sea de la forma $n^3 + 1$, tenemos:

$\overline{abc_n}(n^3 + 1) = 344(63) \Rightarrow n = 7;\ \overline{abc_7} = 63 = 120_7$

$\Rightarrow a = 1;\ b = 2;\ c = 0 \quad \therefore a + b + c + n = 10$

30. Si el numeral 10210021121022 de base "n" se convierte a base "n^3", la suma de sus cifras aumenta en 69 unidades. Hallar el valor de "n".

Resolución:

Convirtiendo el numeral a base n^3.

1.° cif. 2.° cif. 3.° cif. 4.° cif. 5.° cif.

$\widehat{1\,0}\,\widehat{2\,1\,0}\,\widehat{0\,2\,1}\,\widehat{1\,2\,1}\,\widehat{0\,2\,2}_n = _\ _\ _\ _\ _\ {}_{n^3}$

Cifras en base n^3 son los respectivos grupos en base decimal:

1.°: $10_n = n$ 2.°: $210_n = 2n^2 + n$

3.°: $021_n = 2n + 1$ 4.°: $121_n = n^2 + 2n + 1$

5.°: $022_n = 2n + 2$

Luego, el numeral:

$\overline{(n)(2n^2 + n)(2n + 1)(n^2 + 2n + 1)(2n + 2)}_{n^3}$

Por dato:

Σcifras en base n^3 − Σcifras en base "n" = 69

$3n^2 + 8n + 4 - 15 = 69$

Resolviendo: $n = 4 \quad \therefore n = 4$

31. ¿En cuántos sistemas de numeración, el número $2^{18} - 1$ se puede representar como el máximo numeral posible?

Resolución:

Sabemos que los numerales de la forma $(a^k - 1)$ son el mayor numeral de la base "a".

$a^k - 1 = \underbrace{\overline{(a-1)(a-1)...(a-1)}_a}_{k\text{ cifras}}$

Analizamos las posibilidades:

I. En base 2: $2^{18} - 1 = \underbrace{11....11_2}_{18\text{ cifras}}$

II. En base 4: $(2^2)^9 - 1 = 4^9 - 1 = \underbrace{33...33_4}_{9\text{ cifras}}$

III. En base 8: $(2^3)^6 - 1 = 8^6 - 1 = \underbrace{77...77_8}_{6\text{ cifras}}$

IV. En base 64: $(2^6)^3 - 1 = 64^3 - 1 = \overline{(63)(63)(63)}_{64}$

V. En base 512: $(2^9)^2 - 1 = 512^2 - 1 = (511)(511)_{512}$

VI. En base 2^{18}: $(2^{18})^1 - 1 = (2^{18} - 1)_{(2^{18})}$

$\therefore$ Existen 6 sistemas de numeración en los que el numeral se representa como el mayor posible.

32. Un numeral de dos dígitos es "n" veces la suma de sus cifras. El numeral que se obtiene al invertir el orden de sus cifras es la suma de sus cifras multiplicada por qué número.

Resolución:

Sea $\overline{ab}$ el número de dos cifras.

Por dato: $\overline{ab} = n(a + b)$ ...(1)

$\overline{ba} = x(a + b)$ ...(2)

Sumando (1) y (2) m.a.m.:

$\overline{ab} + \overline{ba} = n(a + b) + x(a + b)$

Descomponiendo polinómicamente y factorizando tenemos:

$10a + b + 10b + a = (a + b)(n + x)$

$11(a + b) = (a + b)(n + x)$

Simplificando: $x = 11 - n$

$\therefore$ Queda multiplicado por: $(11 - n)$

33. El número 6279 se expresa, en cierto sistema de numeración, como los números capicúa de 4 cifras. La suma de las cifras de esta representación es:

Resolución:

Del enunciado, tenemos: $6279 = \overline{abba}_n$

Descomponiendo polinómlcamente:

$6279 = a(n^3) + b(n^2) + b(n) + a$

Factorizando:

$6279 = a(n + 1)(n^2 - n + 1) + b(n)(n + 1)$

$6279 = (n + 1)[a(n^2 - n + 1) + b(n)]$

Descomponiendo en dos factores e igualando factores:

$483(13) = (n + 1)[a(n^2 - n + 1) + b(n)]$

Donde: $13 = n + 1$

Reemplazando: $n = 12$:

$483 = a(12^2 - 12 + 1) + 12(b)$

$483 = 133(a) + 12(b)$

$\quad\quad\downarrow \quad\quad \downarrow$

$\quad\quad 3 \quad\quad 7$

Cumplen: el número capicúa será: 3773_{12}

$\therefore$ La suma de sus cifras: $3 + 7 + 7 + 3 = 20$

34. Si el numeral heptanario $\overline{ab(a-1)}$ se escribe como $\overline{5c5}$ en el sistema binario. Hallar el valor de: $a + b + c$.

Resolución:

Tenemos: $\overline{ab(a-1)}_7 = \overline{5c5}_6$

Descomponiendo polinómicamente:

$a(7^2) + b(7) + a - 1 = 5(6^2) + c(6) + 5$

Reduciendo cantidades semejantes:

$50(a) + 7(b) = 186 + 6(c)$

Se deduce que la cifra "b" es par y menor que 7:

$b = \{2; 4; 6\}$

Para: $b = 6 \Rightarrow 50(a) + 7(6) = 186 + 6(c)$

Luego: $\underset{3}{\underset{\downarrow}{50(a)}} = 144 + \underset{1}{\underset{\downarrow}{6(c)}}$

Los valores adecuados: $a = 3$; $c = 1$

$\therefore a + b + c = 10$

35. ¿En qué sistema de numeración cuya base es par se han utilizado 300 cifras para escribir todos los números de tres cifras pares diferentes?

Resolución:

Sistema de base 2k utiliza las cifras pares:

$$\underbrace{0, 2, 4, 6, ...; 2(k-1)}_{k \text{ cifras}}$$

$\Rightarrow \overline{abc}$

- c → usa $(k - 2)$ cifras ($\neq$ a, b)
- b → usa $(k - 1)$ cifras ($\neq$ a)
- a → usa $(k - 1)$ cifras (es diferente de 0)

$\underbrace{\overbrace{(k - 1)(k - 1)(k - 2)}^{\text{Total de números}}3}_{\text{Total de cifras}} = 300$

$(k - 1)^2(k - 2) = 100 = 5^2(4)$

Donde $k = 6$

Sistema de base: 12

36. ¿Cuántos números enteros de la base 10 convertidos a la base "n" y a las 2 bases contiguas a "n" tienen 3 cifras ($n > 4$)?

Resolución:

En base n, un número de k cifras, está comprendido:

$10_n^{k-1} \leq N < 10_n^k \Rightarrow n^{k-1} \leq N < n^k$

Los números de 3 cifras de las bases $(n - 1)$; n; $(n + 1)$

$\Rightarrow (n - 1)^2 \leq N < (n - 1)^3$

$\Rightarrow n^2 \leq N < n^3$

$\Rightarrow (n + 1)^2 \leq N < (n + 1)^3$

(Bases contiguas a "n")

Son: $(n + 1)^2 \leq N < (n - 1)^3$

Cantidad de números: $(n - 1)^3 - (n + 1)^2$

Cantidad de números: $= n^3 - 4n^2 + n - 2$

Cantidad de números: $= (n - 4)n^2 + (n - 2)$

Cantidad de números: $= \overline{(n-4)0(n-2)}_n$

37. Hallar la mínima base de numeración en la cual existen $\overline{mn}$ números de la forma:

$\overline{(a+4)\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{n+1}{5}\right)(4-n)}_{(b)}$, donde $n \in \mathbb{N}$.

Resolución:

Como $4 - n \geq 0 \Rightarrow n = 1, 2, 3, 4$ solo puede ser $n = 4$.

Reemplazando y aplicando el dato:

$\overline{(a+4)\left(\frac{a}{2}\right)10}_{(b)} \Rightarrow a = 0; 2; 4; ....; (2k)$

$\Rightarrow \Sigma a(\text{valores}) = (k + 1)$ números

$\Rightarrow k + 1 = \overline{nm}$: siendo $n = 4$

$\Rightarrow k = \overline{4m} - 1$

Luego: $2k = 2(\overline{4m} - 1)$ como $a + 4 < b$

$\Rightarrow 2(\overline{4m} - 1) + 4 < b$

$82 + 2m < b$; b mínimo $\Leftrightarrow$ m mínimo

$\Rightarrow m = 0 \quad \therefore b_{mín.} = 83$

38. ¿Cuántos números de la base 10 se escriben con 3 cifras al convertirlos a las bases 8 y 5?

Resolución:

Sea N un número expresado en base 10.

Por condición del problema tenemos:

$$N = \overline{abc}_8 \text{ y } N = \overline{mnp}_5$$

Pero por intervalo de un numeral sabemos:

$$100_8 \leq \overline{abc}_8 < 1000_8$$

Pasamos a base 10:

$8^2 \leq N < 8^3 \Rightarrow 64 \leq N < 512 \quad ...(1)$

También se cumple: $100_5 \leq \overline{mnp}_5 < 1000_5$

Pasamos a base 10:

$5^2 \leq N < 5^3 \Rightarrow 25 \leq N < 125 \quad ...(2)$

De (1) y (2) se concluye:

$64 \leq N < 125$

$\therefore N \in \{64; 65; 66; ...; 124\}$

Cantidad de números: $124 - 63 = 61$

Por lo tanto, la cantidad de números que al ser expresados en base 8 y 5 tienen 3 cifras es 61.

39. El número 4096, en cuantos sistemas de numeración de base par se escribe con tres cifras.

Resolución:

$4096 = \overline{abc}_{(2x)}$

$100_{(2x)} \leq \overline{abc}_{(2x)} < 1000_{(2x)}$

$(2x)^2 \leq 4096 < (2x)^3 \Rightarrow (2x)^2 \leq 2^{12} < (2x)^3$

$8 < x \leq 32$

x: 9, 10, ..., 32

2x: 18, 20, ... 64 $\Rightarrow$ cantidad $= \frac{64 - 18}{2} + 1 = 24$

∴ Existen 24 bases.

40. Sabiendo que $\overline{abab}_8 = \overline{mn0n}_7$, hallar a + b

Resolución:

$\overline{abab}_8 = \overline{mn0n}_7$

Descomponiendo en bloque:

$\overline{ab}_8(8^2) + \overline{ab}_8 = m(7^3) + n(7^2) + n$

$65\overline{ab}_8 = 343m + 50n$ (contiene a 5)

$\Rightarrow m = 5$: $13\overline{ab}_8 = 343 + 10n$ (contiene a 13)

Para n = 6: $13\overline{ab}_8 = 403 = 13(31)$

$\Rightarrow \overline{ab}_8 = 31 = 37_8$ ∴ a + b = 3 + 7 = 10

41. Si $122_a = 101_b = 72_c$, ¿cuál es el menor valor de a + b + c?

Resolución:

$122_a = 101_b = 72_c$

$a < b < c$

También: $101_b = 72_c$

$\Rightarrow b^2 + 1 = 7c + 2$
$\Rightarrow b^2 = 7c + 1$ } menor $c > 7 \Rightarrow c = 9$

$\Rightarrow$ para c = 9; b = 8

Luego: $122_a = 101_8 = 65$

$\Rightarrow a^2 + 2a + 2 = 65$
$\Rightarrow a^2 + 2a + 1 = 64$ } se obtiene $\Rightarrow a = 7$
$\Rightarrow (a + 1)^2 = 8^2$

∴ Menor a + b + c: 7 + 8 + 9 = 24

42. Sabiendo que: $\overline{ac}_b = \overline{cb}_{(a+2)}$ y a + b + c = 24. Hallar ac_b expresado en base 4.

Resolución:

$\overline{ac}_b = \overline{cb}_{(a+2)}$

$a < b$ $b < a + 2$

Solo b = a + 1 (único entero)

Reemplazando:

$\overline{ac}_{(a+1)} = \overline{c(a+1)}_{(a+2)}$

$\Rightarrow a(a + 1) + c = c(a + 2) + (a + 1)$

$\Rightarrow a(a + 1) = c(a + 1) + (a + 1)$

$a = c + 1 \Rightarrow c = a - 1$

Dato: a + b + c = 24

a + (a + 1) + (a − 1) = 24

Donde: a = 8; b = 9; c = 7

$\overline{ac}_b = 87_9 = 79$

79 ÷ 4: 79 = 4·19 + 3; 19 = 4·4 + 3; 4 = 4·1 + 0 $\Rightarrow 1033_4$

43. Si $\overline{ab5}_x = \overline{bax}_7$, hallar (a + b + x).

Resolución:

$\overline{ab5}_x = \overline{bax}_7$

$5 < x$ $x < 7 \Rightarrow x = 6$

$\Rightarrow \overline{ab5}_6 = \overline{ba6}_7 \Rightarrow 36a + 6b + 5 = 49b + 7a + 6$

$\Rightarrow 29a = 43b + 1$ } valores menores a 6: a = 3, b = 2

Se encuentra: a = 3; b = 2

∴ a + b + x = 3 + 2 + 6 = 11

44. Si $\overline{pqrpqr}_7 = \overline{815de}$, ¿cuántas soluciones tiene?

Resolución:

$\overline{pqrpqr}_7 = \overline{815de}$

$\Rightarrow 81\,500 \le \overline{pqrpqr}_7 < 81\,600$

$\overline{pqr}_7(7^3) + \overline{pqr}_7 = 344\,\overline{pqr}_7$

$\div 344$: $236{,}9 \le \overline{pqr}_7 < 237{,}2$

Solo $\overline{pqr}_7 = 237 = 456_7$

∴ 1 solución

45. Sabiendo que $a \neq b \neq c \neq d$ y $\overline{abcd}_n = 303_5$, hallar c + n

Resolución:

$\overset{+}{\overline{abcd}}_{\underset{-}{n}} = \overset{-}{\overline{303}}_{\underset{+}{5}}$

A mayor representación corresponde menor base
n < 5: n utiliza 4 cifras distintas.

Solo n = 4: $303_5 = 1032_4$

a = 1; b = 0; c = 3; d = 2

∴ c + n = 3 + 4 = 7

46. Hallar a + b + c + d, si: $\overline{aaaa}_{(6)} = \overline{bcd6}$

Resolución:

$\overline{aaaa}_{(6)} = \overline{bcd6} \Rightarrow a(6^3) + a(6^2) + a(6) + a = \overline{bcd6}$

$\Rightarrow 259a = \overline{bcd6}$

Para que acabe en 6:

$a = 4 \Rightarrow 259(4) = 1036$

∴ a + b + c + d = 4 + 1 + 0 + 3 = 8

47. Si 12! lo expresamos en otro sistema de numeración, ¿en cuántos termina en dos ceros?

Resolución:

$N = 12! = 2^{10} \times 3^5 \times 5^2 \times 7 \times 11$

Para que acabe en dos ceros:

$N = \overline{a...x00}_k = \overline{a...x}_k \cdot k^2$; N admite un factor k^2

Para que solo acabe en dos ceros, N no admite otro factor k: $N \neq k^3$

$N = 32^2 \times 9^2 \times 5^2 \times 3 \times 7 \times 11$

Los números que se forman con los factores 32^2; 9^2 y 5^2 acaban en 2 ceros.

5^2; 9^2; 32^2; $(5 \times 9)^2$; $(5 \times 32)^2$; $(9 \times 32)^2$; $(5 \times 9 \times 32)^2$

∴ Existen 7 números

48. Hallar a + b + c, sí: $\overline{a3a4}_{(b)} = \overline{bcd}_{(6)}$

Resolución:

$\underbrace{\overline{a3a4}_{(b)}}_{4<b} = \underbrace{\overline{bcd}_{(6)}}_{b<6} \Rightarrow b = 5$

$\Rightarrow \overline{a3a4}_5 = \overline{5cd}_6$

$\underbrace{500_6}_{180 = 1210_5} < \overline{5cd}_6 < \underbrace{555_6}_{215 = 1330_5}$

Solo a = 1: $1314_5 = 209 = 545_6$

$\therefore a + b + c = 1 + 5 + 4 = 10$

49. Si 14641_{2004} lo expresamos en el sistema de numeración de base 2005. La suma de sus cifras es:

Resolución:

2004 = a

N = 14641_a, descomponiendo:

$N = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$

$N = (a + 1)^4 = 1(a + 1)^4$

$\Rightarrow N = 10000_{(a+1)} = 10000_{2005}$

$\therefore$ Suma de cifras de N en base 2005: $S_c = 1$

50. Si el número $\overline{abcd}$ que es el mayor posible, se convierte al sistema de base 9, se escribe como $\overline{(a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1)}$. Hallar a + b + c + d.

Resolución:

$\overline{abcd} = (a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1)_9$

$\overline{abcd} = (a + 1)9^3 + (b + 1)9^2 + (c + 1)9 + (d + 1)$

$\overline{abcd} = 729a + 81b + 9c + d + 820$

$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$

Reduciendo: 271a + 19b + c = 820

Para que 271(a) aproxime a 820, a = 3. Si a es mayor resultan negativas las demás cifras; si a es menor, resultan mayores de 10 las demás.

a = 3: 271(3) + 19b + c = 820

19b + c = 7 ⇒ b = 0; c = 7

(únicos valores posibles)

$N = \overline{abcd} = \overline{(abcd)} = \overline{(a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1)}_9$

$N = \overline{307d} = \overline{418(d + 1)}_9$

Se desea N mayor posible:

d + 1 < 9: $d_{máx.} = 7$

$N_{máximo} = 3077 = 4188_9$

$\therefore a + b + c + d = 3 + 0 + 7 + 7 = 17$

51. En cierta base dos números son representados por los numerales 234 y 121, respectivamente, y al sumarlos de obtiene como representación 410. La base del sistema es:

Resolución:

$\underbrace{234_n}_{...4} + \underbrace{121_n}_{...1} = \underbrace{410_n}_{...0}$

$\Rightarrow 4 + 1 = ...0 = 10_n$ única posibilidad

$\Rightarrow 5 = 10_n = n \quad \therefore$ La base es 5

52. El mayor número de k cifras de la base n^a es igual al mayor número de ak cifras en la base:

Resolución:

Mayor número de base n^a

$N = \underbrace{\overline{(n^a - 1)(n^a - 1)...(n^a - 1)}_{(n^a)}}_{k\ cifras}$

$\Rightarrow N = (n^a)^k - 1 \quad ...(1)$

N es igual al mayor número de ak cifras de base x.

$N = \underbrace{(x - 1) ... (x - 1)_{(x)}}_{ak\ cifras} = x^{ak} - 1 \quad ...(2)$

(1) = (2): $n^{ak} - 1 = x^{ak} - 1$

Luego: n = x

53. Si el número $1010001011_{(2)}$ se escribe en el sistema hexadecimal, se obtiene otro cuya suma de cifras es:

Resolución:

De base 2 a base 16 = 2^4

Base 2	10	1000	1011
Base 16	2	8	(11)

$\therefore$ Suma de cifras: 2 + 8 + 11= 21

54. Hallar la suma de las cifras expresado en base 4, del número $\underbrace{777...777_8}_{50\ cifras}$.

Resolución:

$N = 777 ... 777_8 \Rightarrow N + 1 = 777...77_8 + 1$

$N + 1 = \underbrace{1000...00_8}_{50\ ceros} = 8^{50} \times 1$; luego $N = 80^{50} - 1$

Dando formas:

$N = (2^3)^{50} - 1 = 2^{150} - 1 = (2^2)^{75} - 1 \Rightarrow N = 4^{75} - 1$

$N = \underbrace{333 ... 33_4}_{75\ cifras}$; suma de cifras: 75(3)= 225

Dato: en base k (mayor cifra es k − 1)

$N = \underbrace{\overline{(k - 1)(k - 1)...(k - 1)}_k}_{n\ cifras} = k^n - 1$

55. El número $\overline{abc}_{(n^3)}$ se convierte a la base n(n > 3) y se obtiene un número formado, por 9 cifras máximas, entonces, a + b + c en base n es:

Resolución:

$N = \overline{abc}_{n^3} = \underbrace{\overline{(n - 1)(n - 1)...(n - 1)}_n}_{9\ cifras}$

Si un número N se escribe con cifras máximas en base n, también se escribirá con cifras máximas en la base n^k, donde $k \in \mathbb{Z}^+$.

$N = \overline{abc}_{n^3} = \overline{(n^3 - 1)(n^3 - 1)(n^3 - 1)}_{n^3}$

$\Rightarrow a = b = c = n^3 - 1$

$a + b + c = 3n^3 - 3 = 3000_n - 3$

$\therefore a + b + c = 2(n - 1)(n - 1)(n - 3)_n$

56. Si: $\underbrace{200200...200_{(8)}}_{120 \text{ cifras}} = \overline{ab...yz}_{(2)}$

hallar: a + b + ...+ y + z

Resolución:

De base 8 a base 2, cada cifra de base 8 representará 3 cifras en base 2, a excepción de la primera cifra:

2	0	0...	2	0	0
10_2	000_2	000_2...	010_2	000_2	000_2

Cada cifra 2 origina una cifra 1 en base 2:
De las 120 cifras: 40 son cifras 2
Existen 40 cifras 1 en base 2
∴ Suma de cifras = 40(1) = 40

57. Convertir a base 6 el número N = 10! e indicar la suma de sus cifras.

$$10! = 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$$

Resolución:

$10! = 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$
$10! = (2^4 \times 3^4)(2^4 \times 5^2 \times 7) = (6^4)(2800)$
$10! = 10000_6 \times 20544_6 = 205440000_6$
∴ Suma de cifras = 2 + 5 + 4 + 4 = 15

58. Hallar la suma de cifras de $27^{48} - 1$ en base 3.

Resolución:

$N = 27^{48} - 1 = (3^3)^{48} - 1$
$\Rightarrow N = 3^{144} - 1$ (mayor número de 144 cifras)
$N = \underbrace{222...22_3}_{144 \text{ cifras}} \Rightarrow$ Suma de cifras = 288

59. Hallar la cantidad de números capicúas de tres cifras, tal que suma de sus cifras es impar.

Resolución:

$N = \overline{aba}$
donde a + b + a = impar
$\Rightarrow \underbrace{2a}_{\text{par}} + b = \text{impar} \Rightarrow$ b es impar

a = 1; 2; 3; ... 9 (9 valores)
b = 1; 3; 5; 7; 9 (5 valores)

$\Rightarrow 9 \times 5 = 45$ números

60. Si los números a, $\overline{b0}$, $\overline{c0}$, $\overline{db0}$, $\overline{ebc0}$, $\overline{aeb0}$ se encuentran en progresión geométrica, siendo el producto de sus términos 16 777 216 000 000.
Hallar: (a + b + c) − (d + e).

Resolución:

a; $\overline{b0}$; $\overline{c0}$; ..., para que $ak = \overline{b0}$ acabe en 0
×k ×k

k es 5 y a es par ...(1)
a es 5 y k es par ...(2)

En (1): k = 5 y a es par
⇒ 2; 10; 50; 250; 1250; 6250
El producto acaba ... 5 000 000 (no cumple)
⇒ 4; 20; 100 (no cumple)

En (2): a = 5 y k es par
$5; 5k; 5k^2 < 100 \Rightarrow k^2 < 20 \Rightarrow k = 4$
⇒ 5; 20; 80; 320; 1280; 5120 (si cumple)
∴ (a + b + c) − (d + e) = (5 + 2 + 8) − (3 + 1) = 11

61. El mayor número capicúa del sistema duodecimal, que se escribe con 5 cifras en el sistema quinario, es aquel cuya suma de sus cifras es:

Resolución:

$\overline{abba}_{12} = \overline{mnpqr}_5 \Rightarrow \overline{abba}_{12} < \underbrace{44444_5}_{5^5 - 1}$
(mayor posible)

$\Rightarrow \overline{abba}_{12} < 3124 = 1944_{12}$
máximo: $\overline{abba}_{12} = 1881_{12}$

∴ Suma de cifras = 18

62. Hallar la cantidad de números capicúas que existen desde 2004 hasta 58 888.

Resolución:

De 4 cifras: $\overline{abba}$
a: 2; 3; 4; ...9 (8 valores)
b: 0; 1; 2; ... 9 (10 valores)

$\Rightarrow 8 \times 10 = 80$ números

Pero en ellos está 2002
No se debe de contar
⇒ hay 80 − 1 = 79 números

De 5 cifras: $\overline{abcba}$
a: 1; 2; ... 5 (5 valores)
b: 0; 1; ... 9 (10 valores)
c: 0, 1; ... 9 (10 valores)

$\Rightarrow 5 \times 10 \times 10 = 500$ números

Pero no deben contarse
$\overline{59c95}$ son 10 números y 58985
⇒ hay 500 − 11 = 489 números
∴ Total: 79 + 489 = 568

63. ¿Cuántos números de 4 cifras existen, de modo que tengan por lo menos dos cifras iguales?

Resolución:

$$\underbrace{\text{Total de números de 4 cifras}}_{a} = \underbrace{\text{Tienen por lo menos dos iguales}}_{x} + \underbrace{\text{No tienen cifras iguales}}_{b}$$

$a = 9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$
$b = 9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$
∴ x = 9000 − 4536 = 4464

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2001 - II)

Si al número 1573 dado en base n, lo pasamos a la base "n + 1", entonces la suma de sus cifras en la base "n + 1" es:

A) 2n + 1 B) 3 C) 2
D) n + 3 E) n + 1

Resolución:

Convirtiendo el número a base 10:
$1573_n = n^3 + 5n^2 + 7n + 3$

Dividiendo por (n + 1), sucesivamente:

$$\begin{array}{l} n^3 + 5n^2 + 7n + 3 \;\; \lfloor n+1 \\ -n^3 - n^2 \\ \quad 4n^2 + 7n \\ \quad -4n^2 - 4n \\ \qquad 3n + 3 \\ \qquad -3n - 3 \\ \qquad\quad \boxed{0} \end{array} \quad \begin{array}{l} n^2 + 4n + 3 \;\; \lfloor n+1 \\ -n^2 - n \\ \quad 3n + 3 \\ \quad -3n - 3 \\ \qquad \boxed{0} \end{array} \quad \begin{array}{l} n + 3 \;\; \lfloor n+1 \\ -n - 1 \quad \boxed{1} \\ \quad \boxed{2} \end{array}$$

Luego: $1573_n = 1200_{(n+1)} \Rightarrow \Sigma$ de cifras = 3

Clave: B

PROBLEMA 2 (UNI 2002 - I)

Si las dos siguientes sumas están expresadas en una base p:

$$\begin{array}{l} 205_p + \\ ABC_p, \\ \hline 403_p;\ A + B + C, = 15_p \end{array}$$

entonces, el producto (A)(B)(C), expresado en la base p, es igual a:

A) 30 B) 34 C) 36
D) 42 E) 48

Resolución:

De la primera suma, tenemos:
$5 + C = 13_p = p + 3 \Rightarrow C = p - 2$
$1 + B = 10_p = p \Rightarrow B = p - 1$
$1 + 2 + A = 4 \Rightarrow A = 1$

Reemplazando en la segunda suma:
$1 + p - 1 + p - 2 = 15_p \Rightarrow 2p - 2 = p + 5 \Rightarrow p = 7$
Luego: A = 1; B = 6; C = 5
Entonces: (A)(B)(C) = 30 $\therefore\ 30 = 42_7$

Clave: A

PROBLEMA 3 (UNI 2002 - II)

El siguiente producto está expresado en una cierta base b:
$(5)(123\,456) = \overline{606Y58}$, donde Y es un dígito, entonces para el menor valor de b, hallar la suma b + Y.

A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

Resolución:

Del problema:

$$\begin{array}{r} 123456_b\ \times \\ 5_b \\ \hline \overline{606Y58}_b \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \Rightarrow 6 \times 5 = \overline{x8}_b & \\ 30 = xb + 8 & \\ 22 = xb & \ldots(1) \end{array}$$

Además: b > 8 y b es mínimo ⇒ b = 11
En (1): 22 = 11x ⇒ x = 2 (es lo que se lleva)

Luego:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 22} \\ 123456_{11}\times \\ 5_{11} \\ \hline \ldots 058_{11} \end{array} \quad \Rightarrow Y = 0$$

Entonces: b + Y = 11

Clave: C

PROBLEMA 4 (UNI 2003 - I)

Sean los números a y b, tales que:

$$0{,}1_{(3a)} + 0{,}b_{(12)} = (2{,}01_{(4)})(0{,}1_{(3)})$$

¿Cuántos pares ordenados (a; b) son soluciones?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución:

Hallando la fracción generatriz en cada caso:
$(1/10_{(3a)}) + (b\ /\ 10_{12}) = (2 + 1/10_4)(1/10_3)$
$1/3a + b/12 = (25/12)(1/3) \Rightarrow 12/a + 3b = 25$

Luego:
a = 3; b = 7 ⇒ (3; 7)
a = 12; b = 8 ⇒ (12; 8)
} 2 pares ordenados

Clave: B

PROBLEMA 5 (UNI 2003 - II)

La suma: $S = 0{,}1_2 + 0{,}2_3 - 0{,}3_4 + 0{,}4_5 - 0{,}5_6 + 0{,}6_7$ expresada como una fracción de números en base 8, es igual a:

A) $0{,}231_8$ B) $\frac{101_8}{420_8}$ C) $\frac{101_8}{644_8}$
D) $\frac{145_8}{420_8}$ E) $\frac{145_8}{644_8}$

Resolución:

Del problema:

$$S = -\frac{1}{10_2} + \frac{2}{10_3} - \frac{3}{10_4} + \frac{4}{10_5} - \frac{5}{10_6} + \frac{6}{10_7}$$

Luego:

$$S = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \frac{6}{7} \Rightarrow S = \frac{101}{420}$$

Convirtiendo a base 8: $S = \frac{145_8}{644_8}$

Clave: E

PROBLEMA 6 (UNI 2004 - I)

Los números a, b, c, d satisfacen las ecuaciones:
$\overline{abcd}_{(11)} + \overline{dcba}_{(11)} = 20\,496$

$$d - c = b - a = 2$$

Hallar el valor de: $a + b + c + d$

A) 16 B) 20 C) 24
D) 28 E) 32

Resolución:

Descomponiendo polinómicamente la primera expresión:
$a(11)^3 + b(11)^2 + c(11) + d + d(11)^3 + c(11)^2 + b(11) + a = 20\,496$

Agrupando convenientemente:
$(a + d)11^3 + (b + c)11^2 + (b + c)11 + (a + d) = 20\,496 \ldots(1)$

De la segunda expresión:
$d - c = b - a \Rightarrow a + d = b + c \qquad \ldots(2)$

Reemplazando (2) en /(1):
$(a + d)(11^3 + 11^2 + 11 + 1) = 20\,496$
$1464(a + b) = 20\,496$
$a + d = 14 \qquad \ldots(3)$

De (2) y (3) se deduce:
$a + b + c + d = 28$

Clave: D

PROBLEMA 7 (UNI 2004 - II)

El número $\overline{mam}_5$ expresado en base a es $\overline{x3x}$. Indique cuántas cifras tiene en el sistema binario.

A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 10

Resolución:

Tenemos: $\overline{mam}_5 = \overline{x3x}_a$
Luego: $3 < a < 5 \Rightarrow a = 4$
Reemplazando: $\overline{m4m}_5 = \overline{x3x}_4$
$26m + 20 = 17x + 12 \Rightarrow 26m + 8 = 17x$
Tanteando valores: $m = 1$ y $x = 2$
Finalmente: $141_5 = 232_4 = 100010_2$ (6 cifras)

Clave: C

PROBLEMA 8 (UNI 2011 - II)

Sean $A = \overline{1a1}_4$, $B = 1101_a$ y $C = \overline{1a24a}_5$

Determine la suma de las cifras de C en base decimal

A) 7 B) 9 C) 11
D) 13 E) 15

Resolución:

Sean: $A = \overline{1a1}_4$; $B = \overline{1101}_a$ y $C = \overline{1a24a}_5$

$$1 < a < 4 \Rightarrow a = 2 \vee 3$$

$$C = \begin{cases} 12242_5 = 947; \Sigma\text{cifras}: 9 + 4 + 7 = 20 \\ 13243_5 = 1073; \Sigma\text{cifras}: 1 + 0 + 7 + 3 = 11 \end{cases}$$

Clave: C

PROBLEMA 9 (UNI 2012 - II)

Sea $N = \underbrace{11 \ldots 1}_{n \text{ dígitos}}{}_{(2)}$

Determine la suma de los dígitos de $N \times N$ en base 2, donde $n \geq 2$

A) $n - 2$ B) $n - 1$ C) n
D) $n + 1$ E) $n + 2$

Resolución:

$N = 1 \times 2^{n-1} + 1 \times 2^{n-2} + \ldots + 1 \times 2 + 1$

$$N = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

Luego:
$N^2 = (2^n - 1)^2 = 2^{2n} - 2(2^n) + 1 \Rightarrow N^2 = 2^{2n} - 2^{n+1} + 1$

En base 2:

$$N^2 = \underbrace{100 \ldots 0 (\overline{1}) \underbrace{000 \ldots 01}_{(n+1)\text{ cifras}}}_{2n \text{ cifras}} \Rightarrow N^2 = \underbrace{11 \ldots 11}_{(n-1)\text{ cifras}}\underbrace{00 \ldots 01}_{(n+1)\text{ cifras}}$$

Suma de cifras: $(n - 1)1 + (n)0 + 1 = n$

Clave: C

PROBLEMA 10 (UNI 2013 - I)

Un número de cuatro cifras en base 7 se representa en base decimal por $\overline{49d}$. Calcule el valor máximo de la suma de las cifras de dicho número.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

Resolución:

Sea el número: $\overline{xyzw}_{(7)}$

Dato:
$\overline{xyzw}_{(7)} = \overline{49d} \Rightarrow \overset{\circ}{7} + w = \overset{\circ}{7} + d \Rightarrow w = \overset{\circ}{7} + d$

$$\downarrow \quad \downarrow$$
(máximo) 6 6

Luego: $\overline{xyz6}_{(7)} = 496 \Rightarrow \overline{xyz6}_{(7)} = 1306_{(7)}$

Piden: $x + y + z + w = 1 + 3 + 0 + 6 = 10$

Clave A

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Si: $\overline{ac}_b = \overline{cb}_{(a+2)}$ y $a + b + c = 24$, hallar: $\overline{abc}$

A) 978 B) 987 C) 897
D) 798 E) 789

2. ¿Cuál es el mayor sistema de numeración en que el numeral 2326 se escribe como un número de tres cifras?

A) 49 B) 48 C) 47
D) 46 E) 45

3. Sabiendo que: $\overline{abc}_{11} = \overline{cba}_7$, hallar: $a + b + c$, si: $a \neq 1$.

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

4. Si el numeral $\overline{12ab}$ de la base "n", se escribe como $\overline{9\gamma}$ en base 100_n, hallar: $a + b + n$.

A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 16

5. Si a la base "n" (n > 2) se le multiplica por el entero que le precede y por los dos enteros que le siguen, y el resultado se escribe en la base siguiente, se obtiene:

A) $\overline{1(n-1)n10}_{(n+1)}$ B) $\overline{(n-1)n20}_{(n+1)}$
C) $\overline{(n-2)n20}_{(n+1)}$ D) $\overline{(n-1)n11}_{(n+1)}$
E) N. A.

6. ¿Cómo se escribe en la base n^k, ($k \in \mathbb{Z}^+$) el cuadrado del mayor número de k cifras de la base n?

A) $\overline{(n^k-2)1}_{(n)^k}$ B) $\overline{(n^k-1)1}_{(n)^k}$
C) $\overline{(n^k-2)0}_{(n)^k}$ D) $\overline{(n^k-2)2}_{(n)^k}$
E) $n^{2k} - 1$

7. Convertir el mayor número de 3 cifras diferentes entre sí de la base "b + 1", a la base "b – 1". Indicar la cifra de menor orden (b > 3).

A) 1 B) 0 C) 2 D) 4 E) 3

8. Si $\overline{ab72}_n = \overline{(a-1)c1a}_9$, donde "c" es una cifra significativa menor que 4, hallar: $a + b + c$.

A) 13 B) 12 C) 11
D) 10 E) 9

9. Si el menor número capicúa de 100 cifras del sistema senario, se convierte al sistema decimal. ¿En qué cifra terminará?

A) 0 B) 2 C) 5 D) 6 E) 7

10. ¿Cuántas cifras tiene el número $T = 3^{37} + 1$, al ser convertido a la base 27?

A) 15 B) 14 C) 13
D) 12 E) 11

11. Encontrar la cifra de menor orden del sistema decimal, que se obtiene al convertir el mayor número de 247 cifras del sistema heptanario.

A) 6 B) 8 C) 2
D) 0 E) N.A.

12. Si el cuádruplo del número $\overline{3abc}$ es $\overline{1abc2}$, calcular: $a + b + c$.

A) 6 B) 10 C) 8 D) 9 E) 5

13. Hallar el valor de "n", sabiendo que: $\overline{a4bc}_9 = \overline{pq7rs}_n$

A) 10 B) 12 C) 8
D) 11 E) 13

14. Se convierte el menor número de 800 cifras del sistema quinario al sistema decimal. Indicar su última cifra.

A) 2 B) 6 C) 4 D) 5 E) 2

15. Utilizando una balanza de 2 platillos y pesas de 1 g; 6 g; 36 g; 216 g; .... ; se desea pesar un producto de 1845 g. Hallar el número de pesas a utilizar, si se disponen de 5 pesas de cada tipo.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) Más de 13

16. Calcular el valor de "a + b", sabiendo que "n" está comprendido entre 20 y 30. Además: $\overline{ab}_n = \overline{ba}_7$

A) 5 B) 6 C) 4
D) 7 E) 8

17. En base "n" se suman el menor y el mayor numeral de 12 cifras diferentes cada uno, obteniéndose como suma de cifras del resultado 198. Hallar "n".

A) 18 B) 15 C) 14 D) 17 E) 20

18. Se cumple que: $\overline{abcd}_7 = \overline{dcba}_{11}$. Si letras diferentes son cifras diferentes, hallar: $a + b + c + d$.

A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

19. Si: $\overline{abc}_{bc_4} = \overline{aOb}_{12}$, donde "O" es cero, hallar: $a + b + c$.

A) 4 B) 7 C) 6
D) 9 E) 10

20. ¿Cuántos "unos" tiene N en el sistema binario?

Si: $N = \underbrace{676767...67}_{83 \text{ cifras}}{}_{(8)}$

A) 141 B) 204 C) 207
D) 208 E) 209

21. ¿Cómo se escribe el mayor número $\overline{abc}_6$ en base 5? Sabiendo que en base 3 se escribe como $\overline{1abc}_3$.

A) 121 B) 122 C) 123
D) 132 D) 231

22. ¿Cuántos números del sistema decimal se escriben con 3 cifras, tanto en base 9 como en base 11?

A) 692 B) 142 C) 343
D) 608 E) 609

23. Hallar el cardinal, del conjunto:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \,/\, 615 = \overline{abcd}_n\}$$

A) 4 B) 3 C) 5 D) 2 E) 1

24. Se sabe que: $\overline{2a6}_c = \overline{1bb}_8$, calcular: a + b + c.

A) 12 B) 15 C) 14
D) 16 E) 13

25. ¿Cuántas cifras tiene 128^{200} al ser expresado en base 8?

A) 1200 B) 400 C) 600
D) 467 E) N. A.

26. Sabiendo que: $\overline{xyxy}_n = 416$, calcular: x + y + n

A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) N. A.

27. ¿Cuántos numerales del sistema decimal, que terminan en cifra 2, se representan con 4 cifras tanto en el sistema cuaternario como en el quinario?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

28. El numeral 15015 en base "n" se escribe como $\overline{3abc7}$. Hallar: a + b + c.

A) 11 B) 10 C) 12
D) 13 E) 14

29. Hallar: a + b + n; si: $\overline{21ab}_n = \overline{\beta 7}_{n^2}$; (β = once)

A) 8 B) 6 C) 9
D) 10 E) 7

30. Si se cumple: $\overline{(\overline{ef}_4)(\overline{ac}_5)(\overline{ad}_5)}_9 = \overline{bdbbb0}_3$

hallar: a + b + c + d + e + f.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

31. Hallar el valor de "n", que satisface:

$$\overline{aba}_{\overline{ba}_{\overline{ba}_n}} = \overline{25a}_{23}$$

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

32. Al escribir el numeral 3214_k en la base k+1, se obtiene un numeral cuya suma de cifras es 13. Calcular el valor de k.

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

33. Sabiendo que: $2541 = 3^u + 3^v + 3^w + 3^x + 3^y$
hallar: u + v + w + x + y

A) 20 B) 17 C) 19
D) 18 E) 16

34. Sabiendo que: $\overline{ab0ab}_n = 231_{3n}$
Hallar el valor de: a + b + n

A) 9 B) 8 C) 7
D) 6 E) 5

35. Si el número N se expresa como $\overline{14aa}$ y $\overline{n13}$ en la base "n" y "n + 2", respectivamente. Encontrar el mínimo valor de: "a + n".

A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

36. El numeral $\overline{ab}$ del sistema nonario, se escribe como $\overline{ba}$ en el sistema enesimal. Hallar el mayor valor del sistema enesimal.

A) 65 B) 33 C) 17
D) 19 E) 5

37. En base "n", el menor número de 4 cifras excede al mayor número de 2 cifras en 449. Determinar el valor de "n".

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) Más de 9

38. Sabiendo que: $\overline{bc}_n = \overline{an}_m$ y $m < 5$, hallar: (a)(b)(c)(m)(n)

A) 24 B) 18 C) 36
D) 28 E) N. A.

39. Calcular: a + b + c, si se cumple: $\overline{aabc}_7 = \overline{babb}_5$

A) 4 B) 9 C) 5 D) 7 E) 8

40. Hallar: x + n, si: $\overline{xx}_n + \overline{xx}_{(n+1)} + \overline{xx}_{(n+2)} = 105$

A) 34 B) 36 C) 32
D) 28 E) 29

41. Si el numeral $\overline{abba}$ del sistema undecimal, se escribe como $\overline{(2a)b86}$ en base "n". Calcular: a + b + n.

A) 12 B) 15 C) 14
D) 13 E) 16

42. Encontrar la cifra de menor orden al escribir el numeral 97531_n en base "n + 1".

A) 5 B) n − 2 C) n − 3
D) n − 4 E) 6

43. Sabiendo que: $\overline{n0a}_t = \overline{at0}_{(n+2)}$ (0 = cero) hallar el menor valor de: n + a + t.

A) 10 B) 7 C) 11
D) 9 E) 13

44. Si: $\overline{(n-1)(n-2)(n-1)(n-1)}_n = \overline{5(3a)(3a)}$

calcular: a + n

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

45. Si se cumple: $\overline{a(2a)b}_{(a+b)} = \overline{\left(\frac{a}{2}\right)bb}$
calcular: a × b

A) 12 B) 16 C) 8
D) 10 E) 14

46. Si el numeral $9^{10} - 1$ se escribe como: $\underbrace{\overline{aa.....aa}_9}_{\text{n cifras}}$

hallar la suma de cifras de "a + n".

A) 9 B) 18 C) 12
D) 11 E) 10

47. Si los siguientes numerales están correctamente escritos:

$\overline{n23q}_m$; $\overline{p21}_n$; $\overline{n3m}_6$; $\overline{1211}_p$

calcular: (m + n − p)

A) 4 B) 7 C) 5 D) 8 E) 6

48. Hallar: a + b + n, sabiendo que se cumple:
$\overline{4a53}_n = \overline{2b44}_8$

A) 16 B) 13 C) 12
D) 14 E) 15

49. Escribir correctamente la expresión:

$N = \overline{(3n)(2n-1)(4n+2)(3n-2)}_n$; n > 4

A) 32342_n B) 32422_n C) 23142_n
D) $\overline{3234(n-2)}_n$ E) $\overline{312(n-1)2}_n$

50. Hallar el valor de "n", si al escribir el numeral 1232123_n en base n^2, la suma de sus cifras es 38.

A) 4 B) 7 C) 9 D) 5 E) 8

51. Se sabe que: $N = 100200300...900_{(49)}$. ¿Cuántas veces se escribe la cifra cero, al expresar N en base 7?

A) 40 B) 42 C) 44 D) 46 E) 41

52. Determinar el valor de: mn, si se cumple:

$\overline{\left(\frac{9}{m}\right)\left(\frac{6}{m}\right)\left(\frac{15}{m}\right)} = \overline{(m-1)(m-1)(m-2)(m-1)}_n$

A) 12 B) 6 C) 18
D) 24 E) 15

53. En qué sistema de numeración, el numeral 6060606_7 se escribe con 4 cifras iguales.

A) 45 B) 46 C) 47
D) 48 E) 49

54. Si el numeral 13671 se escribe en base "n" como $\overline{abcabc}$. Determinar: (a + b + c)n

A) 48 B) 72 C) 30
D) 24 E) 42

55. A una fiesta asistieron $\overline{ban}_7$ invitados, de los cuales $\overline{abp}_m$ son hombres jóvenes, $\overline{ccm}_n$ son mujeres jóvenes y $\overline{cpp}_b$ adultos, de los cuales $\overline{pb}_a$ son adultos hombres. ¿Cuántas mujeres asistieron?

A) 35 B)43 C) 53
D) 62 E) 73

56. Si se cumple que: $1331_k = 1000_t$

Además: $\underbrace{\overline{1k}_{\overline{1k}_{\overline{1k}_{\cdot_{\cdot_{\overline{1k}}}}}}}_{\text{14 veces}} = 171_8$, hallar: (k)(t)

A) 30 B) 42 C) 56
D) 72 E) 90

57. Si se cumple que: $\overline{3a}_c + \overline{c1}_b = 1{,}4_a + \overline{b1}_8$,

calcular: (a)(b) + c

A) 41 B) 47 C) 32
D)29 E) 38

58. Si el numeral $\overline{abc}_9$ se escribe en las bases a, b y c, como: 1611; 1205 y 2553, respectivamente. Determinar el valor de: a + b − c.

A) 9 B) 8 C) 12
D) 7 E) 10

59. Calcular "x + y", si se cumple:

$$\overline{1(x-1)}_{\overline{1(x-2)}_{\cdot_{\cdot_{13_{12_{11_x}}}}}} = \overline{yyy}$$

A) 42 B) 45 C) 36
D) 48 E) N. A.

60. En una fiesta infantil se observó lo siguiente: unos niños comieron un caramelo, otros 4, algunos 16 y así sucesivamente. Lo curioso es que no más de 3 niños comieron la misma cantidad de caramelos. Si consumieron 1785 caramelos, ¿cuántos niños disfrutaron de los caramelos?

A) 15 B) 14 C) 13
D) 12 E) 11

61. Hallar a + b, sabiendo que al convertir el número $\overline{abab}_5$ a la base decimal, da como resultado un número que termina en 98.

A) 10 B) 12 C) 7
D) 8 E) 9

62. Conociendo que: $\overline{bn}_n = \overline{an}_m$; $m < 5$, hallar el valor de "k", si se cumple:

$$\left.\overline{ab}_{\overline{ab}_{\overline{ab}_{\ddots_{\overline{ab}_k}}}}\right\} \overline{nm} \text{ veces} = 512_{21_3}$$

A) 8 B) 16 C) 13
D) 17 E) 15

63. Si: $$\left.\overline{bb}_{\overline{bb}_{\overline{bb}_{\overline{bb}_{\ddots_{\overline{1b}}}}}}\right\} n \text{ veces} = 825$$

hallar la suma de cifras de "b + n".

A) 11 B) 9 C) 21
D) 14 E) 16

64. Si: $$\left.51_{51_{51_{51_{\ddots_{51_n}}}}}\right\} n \text{ veces} = 5320_9,$$ hallar: a + n.

A) 2 B) 4 C) 6
D)8 E) 10

65. Siendo: $\overline{acb}_{(n^3)} = \overline{(c-4)100120c0}_n$

Donde: $a + b + c = 122$.

Calcule la suma de cifras de $\overline{n\left(\frac{n-1}{2}\right)(2n-1)}_{(c+4)}$

representado en el sistema decimal.

A) 13 B) 14 C) 15
D) 16 E) 17

66. Si se verifica que: $666_n = \overline{abc2}$; $n < 20$
calcular: a + b + c + n

A) 28 B) 30 C) 32
D) 34 E) 36

67. Un número se escribe en el sistema nonario con las cifras: 2; 1 y 7; mientras que en el sistema quinario con las cifras: 1; 1 y 4. ¿Cómo se escribe dicho número en el sistema octanario?

A) 342 b) 152 C) 432
D) 251 E) 521

68. Sabiendo que: $\overline{a(a+b)(a+b)(a+b)} = abab_6$
Escribir en base 10:

$$H = \left.\overline{ab}_{\overline{ab}_{\overline{ab}_{\ddots_{\overline{ab}_6}}}}\right\} 5 \text{ veces}$$

A) 285 B) 267 C) 365
D) 175 E) 342

69. Si el numeral:

$N = 3\times 8^6 + 7\times 8^5 + 9\times 8^4 - 12\times 8^3 - 6\times 8^2 + 3\times 8 + 2$

se convierte al sistema octanario, hallar la suma de dos cifras.

A) 27 B) 26 C) 28
D) 23 E) 24

70. Sabiendo que: $\overline{ac12d0}_3 = \overline{7b3}_9$, hallar el valor de: a + b + c + d

A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11

71. Al expresar: $E = 17\times 16^{3n} + 23\times 8^{2n} + 31$
en el sistema de base 4. Calcular la suma de sus cifras.

A) 10 B) 15 C) 12
D) 13 E) 14

72. Si el numeral 12100102010211 de base "n" se convierte en base "n^3" la suma de cifras aumenta en 38 unidades. ¿En cuántos sistemas de numeración n^5 se expresa con cuatro cifras?

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

73. Sabiendo que:

$$\left.\overline{abm}_{\overline{ab}_{\overline{ab}_{\ddots_{\overline{ab}_{(c)}}}}}\right\} m \text{ veces} = \overline{32(1+m)} + 10_2$$

y "c" es el menor posible, calcular el valor de:

a + b + c + m

A) 20 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

74. ¿Cuántos números pares de la forma:

$\overline{d(6-a)(26-3)\left(\frac{2}{5}c\right)bd}$ existen en el sistema duodecimal.

A) 1480 B) 6048 C) 2090
D) 2310 E) 4235

75. Si: $\underbrace{\overline{aaa...aa}}_{k \text{ cifras}}{}_{(k)} = \overline{n0n0n0n0}_2 = \overline{bcb}_{(d)}$ (0 = cero)

calcular: a + b + c + d + k + n

A) 20 B) 21 C) 18
D) 23 E) 19

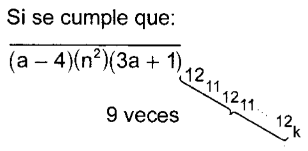
76. Si: $\overline{abcn}_8 = \overline{9a6}_{(2n)}$, calcular: a + b + c + n

A) 15 B) 16 C) 17
D) 18 E) 19

77. Convertir el menor numeral de cifras iguales en la base "n" ($n \neq 10$) cuya suma de cifras es 9 veces "n"; al sistema de base "n^3". Dar como respuesta la suma de cifras.

A) 60 B) 42 C) 90
D) 45 E) 120

78. Si se cumple que:



es igual a: $\overline{(n-3)(c+1)(b+2)d}_{(n+3)}$

Calcular: $a + b + c + d + n$

A) 13 B) 14 C) 15
D) 16 E) 17

79. Un número de 2 cifras que termina en 5 en el sistema de base "n" parece duplicarse al expresarse en base "n/2". Calcular la suma de "n" y la cifra de mayor orden al expresar el numeral en base 7.

A) 10 B) 12 C) 14
D) 11 E) 8

80. Sí: $\overline{xyxy4}_{(5)} = \overline{bc(b-1)(c+1)}_{(7)}$, calcular el menor valor de $b + c$

A) 3 B) 4 C) 1 D) 6 E) 2

81. Si el numeral 12345_n se expresa en base $(n+1)^2$; la suma de sus cifras es 69. Calcular "n".

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 11

82. Calcular $a + n$, sí:

$$\overline{1(n-1)}_{\overline{1(n-2)}_{\cdot_{\cdot_{13_{12_{11(n)}}}}}} = \overline{aaa}$$

A) 40 B) 41 C) 42
D) 43 E) 44

83. Si se cumple que: $\overline{ab}_{(8)} = \overline{\left(\frac{n}{a}\right)\left(\frac{n}{b}\right)\left(\frac{n}{c}\right)}_{(n)}$

(a, b y c son diferentes), calcular $a + b + n$.

A) 15 B) 16 C) 17
D) 18 E) 12

84. Si: $\underbrace{\overline{aa...a}}_{(a+1)\text{ cifras}}{}_{(a+1)} = \overline{(a-2)(a-2)(a-2)bc}_6$

calcular $a + b + c$.

A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 10

85. Si se cumple que: $\overline{(n-2)(n^3)(n)}_{(10n)} = \overline{abc}_{(k^2)}$

calcular $a + b + c + n$, sabiendo que "k" es impar.

A) 12 B) 16 C) 20
D) 30 E) 36

86. Al convertir un número de cifras igual, del sistema quinario al sistema decimal, se obtiene un número en el cual la cifra de tercer lugar coincide con la de tercer orden, además la cifra de orden cero es 4. Calcular la suma de cifras de este último número.

A) 14 B) 20 C) 25
D) 30 E) 24

87. Si: $\overline{abcabc}_{(m)} = \overline{cabdd}_{(n)}$, y $m + n = 12$
calcular: $a + b + c + d$

A) 12 B) 6 C) 10
D) 8 E) 9

88. En cuántos sistemas de numeración de base impar se expresa la suma de 2 numerales de la base 9 con 4 cifras, si el primero es el menor numeral cuya suma de cifras en 35 y el otro es el menor numeral de 5 cifras significativas cuya suma de cifras es 15.

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

89. Si se tiene: $432 + \overline{cba}_6 = \overline{2a5c}_6 + \overline{1b4}_6$
calcular la suma del máximo valor y el mínimo valor de $a + b + c$

A) 2 B) 5 C) 11
D) 15 E) 17

90. En cuántos sistemas de numeración el número 458 se puede escribir con 5 cifras.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

91. Calcular. $a + b + c$; si los siguientes numerales están correctamente escritos:

$$\overline{5a4x}_{(b)};\ \overline{3n2m}_{(a)};\ \overline{cxay}_{(8)};\ \overline{52ba}_{(c)}$$

A) 13 B) 14 C) 15
D) 16 E) 17

92. Si se sabe que: $\overline{abc5}_{(x)} = \overline{5x0}_{(7)}$, hallar: $a + b + c$.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

93. La suma de cifras del numeral $136_{(n)}$ en base "n + 1" es n/2. Hallar "n".

A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

94. ¿Cuántos valores de "a" verifican la siguiente igualdad?

$$\overline{aaa}_{(7)} = \overline{\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)(2a)}$$

A) 6 B) 12 C) 10
D) 8 E) 2

95. Expresar el siguiente numeral N, correctamente escrito; dando como respuesta la suma de cifras de orden impar.

$$N = \overline{(2a-4)(8a+1)(a^2+2a+1)(2a+1)(3a-2)}_{(a)}$$

A) $a + 14$ B) 16 C) $a + 6$
D) 8 E) 5

96. Si el numeral $\overline{abab}_{(n)}$ se escribe en base 8 como 335; representar el numeral $abn_{(7)}$ en base 10.

A) 156 B) 160 C) 157
D) 159 E) 158

97. Si se cumple: $\overline{abcd}_{(7)} = \overline{37(d+1)}$
Hallar: $a + b + c$

A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 7

98. Si: $\overline{n(2n)(3n)}_{(13)} = \overline{m(3m)(2m)}$, hallar: $2m + 3n$

A) 12 B) 15 C) 18
D) 21 E) 24

99. Si: $\overline{abcae}_{(n)} = 2(19)(11)_{(n^2)}$. ¿cuántas cifras dos se obtiene al representar $\overline{abcabc}$ en base 3?

A) 7 B) 5 C) 8
D) 6 E) 3

100. Si: $\overline{aaba}_{(6)} = \overline{cbaa}_{(5)}$ donde "a" es mayor que "c"; hallar: $a + b + c$

A) 1 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

CLAVES

1. C	14. D	27. D	40. A	53. E	66. B	79. B	92. C
2. B	15. A	28. A	41. C	54. A	67. B	80. A	93. B
3. A	16. A	29. A	42. A	55. C	68. A	81. C	94. E
4. B	17. D	30. B	43. C	56. D	69. A	82. C	95. A
5. C	18. B	31. B	44. D	57. A	70. C	83. A	96. E
6. A	19. C	32. C	45. A	58. A	71. E	84. A	97. B
7. B	20. C	33. A	46. A	59. A	72. A	85. E	98. A
8. D	21. C	34. D	47. E	60. D	73. D	86. E	99. B
9. D	22. D	35. C	48. A	61. C	74. B	87. B	100. E
10. C	23. A	36. A	49. D	62. D	75. E	88. B	
11. C	24. B	37. C	50. D	63. A	76. C	89. E	
12. D	25. D	38. A	51. B	64. E	77. B	90. A	
13. C	26. C	39. B	52. A	65. C	78. E	91. E	

Conteo de números

03 capítulo

Hipatia nació en Alejandría entre los años 355 o 370 d. C y murió en marzo de 415 o 416 d. C. Fue una filósofa y maestra neoplatónica griega, que destacó en los campos de las matemáticas y la astronomía; además, fue miembro y cabeza de la Escuela neoplatónica de Alejandría a comienzos del siglo V. Seguidora de Plotino, cultivó los estudios lógicos y las ciencias exactas, llevando una vida ascética. Educó a una selecta escuela de aristócratas cristianos y paganos que ocuparon altos cargos, entre los que sobresale el obispo Sinesio de Cirene.

Hija y discípula del astrónomo Teón, Hipatia es la primera mujer matemática de la que se tiene conocimiento razonablemente seguro y detallado. Escribió sobre Geometría, Álgebra y Astronomía, mejoró el diseño de los primitivos astrolabios —instrumentos para determinar las posiciones de las estrellas sobre la bóveda celeste— e inventó un densímetro. Tuvo influencia sobre obras griegas tan importantes como *Arithmetica* de Diofanto de Alejandría: basada en las soluciones de ecuaciones algebraicas y sobre la teoría de números.

Hipatia fue asesinada a los 45 o 60 años (dependiendo de cuál sea su fecha correcta de nacimiento), linchada por una turba de cristianos.

Fuente: Wikipedia

CONTEO POR PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Progresión aritmética (PA)

Una serie o progresión aritmética (PA), es una sucesión de números, tal que: "La diferencia de dos términos consecutivos cualesquiera es constante, denominada razón aritmética (RA)".

Ejemplo:

Las siguientes series forman una progresión aritmética:

- 13; 20; 27; 34; ... (diferencias: 7, 7, 7)
  RA = 7
- 74; 68; 62; 56; ... (diferencias: −6, −6, −6)
  RA = −6
- 8; 21; 34; 47; ... (diferencias: 13, 13, 13)
  RA = 13
- 15; 7; −1; −9; ... (diferencias: −8, −8, −8)
  RA = −8

Enésimo término de una progresión aritmética

El enésimo término de una (PA) es una expresión que indica la ley de formación de todos los términos que conforman la serie, haciendo posible encontrar a cualquier término.

Dada la serie de números, que forman una PA:

$$a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots;\ a_n;\ a_{n+1};\ \ldots$$

(diferencias: r, r, ..., r)

Su enésimo término, está dado por:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r}$$

Donde:

a_n: enésimo término; a_1: primer término

r: razón aritmética; n: lugar del término buscado

Ejemplos:

1. Hallar el enésimo término de las siguientes series:
   - Serie: 15; 23; 31; 39; ...

     Resolución:

     Vemos que: $r = 8$; primer término: $a_1 = 15$
     Su ley de formación es: $a_n = 15 + (n-1)8$
     Efectuando: $a_n = 8n + 7$
     Verifiquemos algunos términos:
     1.er término: $n = 1 \Rightarrow a_1 = 8(1) + 7 = 15$
     2.° término: $n = 2 \Rightarrow a_2 = 8(2) + 7 = 23$
     3.er término: $n = 3 \Rightarrow a_3 = 8(3) + 7 = 31$
     ⋮
     n.° término: $n = n \Rightarrow a_n = 8n + 7$

   - Serie: 4; 13; 22; 31; ...

     Resolución:

     Vemos que: $= 9$; primer término: $a_1 = 4$
     Su enésimo término será: $a_n = 4 + (n-1)9$
     Efectuando: $a_n = 9n - 5$
     Verificando algunos términos:
     1.er término: $n = 1 \Rightarrow a_1 = 9(1) - 5 = 4$
     2.° término: $n = 2 \Rightarrow a_2 = 9(2) - 5 = 13$
     3.er término: $n = 3 \Rightarrow a_3 = 9(3) - 5 = 22$
     ⋮
     45.° término: $n = 45 \Rightarrow a_{45} = 9(45) - 5 = 400$
     etc.

   - Serie: 38; 32; 26; 20 ; ...

     Resolución:

     Vemos que: $r = -6$; primer término: $a_1 = 38$
     Su enésimo término será:
     $a_n = 38 + (n-1)(-6) \Rightarrow a_n = -6n + 44$
     Verificando algunos términos:
     4.° término: $n = 4 \Rightarrow a_4 = -6(4) + 44 = 20$
     17.° término: $n = 17 \Rightarrow a_{17} = -6(17) + 44 = -58$
     etc.

2. Encontrar el 24.° y 45.° término de la siguiente serie: 7; 19; 31; 43; ...

   Resolución:

   El enésimo término de la serie es: $a_n = 12n - 5$
   Hallamos el 24.° término:
   $n = 24 = a_{24} = 12(24) - 5 = 283$
   Hallamos el 45.° término:
   $n = 45_{45} = 12(45) - 5 = 535$

3. Encontrar el 40.° y 54.° término de la siguiente serie: 222; 213; 204; 195; ...

   Resolución:

   El enésimo término de la serie es: $a_n = -9n + 231$
   Hallamos el 40.° término: $n = 40$
   $a_{40} = -9(40) + 231 = -129$
   Hallamos el 54.° término: $n = 54$
   $a_{54} = -9(54) + 231 = -255$

Enésimo término de una PA de grado superior

Una PA de grado superior es una serie de números en la que su razón aritmética no se encuentra de inmediato, sino luego de hallar otras subseries a las que denominaremos n-diferencia.

Dada la serie:

$$(a_1);\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ a_5;\ \ldots$$

1.ª diferencia: $(b_1);\ b_2;\ b_3;\ b_4$

2.ª diferencia: $(c_1);\ c_2;\ c_3$

3.ª diferencia: $(d_1);\ d_2$

⋮

El enésimo término de la serie, está dado por:

$$\boxed{a_n = a_1 + b_1(n-1) + c_1\left[\frac{(n-1)(n-2)}{2!}\right] + d_1\left[\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!}\right] + \ldots}$$

Donde: a_1: 1.er término de la serie original
b_1: 1.er término de la 1.ª diferencia
c_1: 1.er término de la 2.ª diferencia
d_1: 1.er término de la 3.ª diferencia

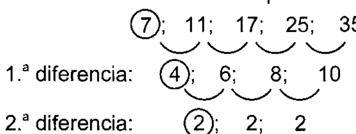
Tener en cuenta que la última diferencia debe ser constante.

Ejemplos:

1. Encontrar el enésimo término de la siguiente serie: 7; 11; 17; 25; 35; ...

   Resolución:

   Hallando las diferencias respectivas:



   Elegimos los primeros términos de cada subserie para reemplazarlos en la expresión del enésimo término, tenemos:

$$a_n = 7 + 4(n-1) + 2\left[\frac{(n-1)(n-2)}{1(2)}\right]$$

   Reduciendo, se obtiene: $a_n = n^2 + n + 5$

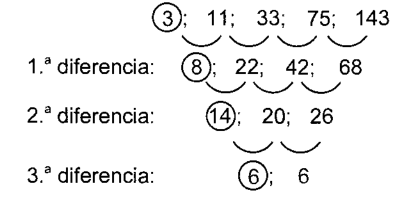
   Verificando algunos términos:

   1.^{er} término: $n = 1 \Rightarrow a_1 = 1^2 + 1 + 5 = 7$
   2.° término: $n = 2 \Rightarrow a_2 = 2^2 + 2 + 5 = 11$
   3.^{er} término: $n = 3 \Rightarrow a_3 = 3^2 + 3 + 5 = 17$
   4.° término: $n = 4 \Rightarrow a_4 = 4^2 + 4 + 5 = 25$
   etc.

2. Encontrar el enésimo término de la siguiente serie: 3; 11; 33; 75; 143; ...

   Resolución:

   Hallamos las subseries por diferencia:



   Reemplazando los primeros términos de las subseries en el enésimo término:

$$a_n = 3 + 8(n-1) + 14\left[\frac{(n-1)(n-2)}{2!}\right] + 6\left[\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!}\right]$$

   Reduciendo, tenemos: $a_n = n^3 + n^2 - 2n + 3$

   Verificando algunos términos:

   1.^{er} término: $n = 1 \Rightarrow a_1 = 1^3 + 1^2 - 2(1) + 3 = 3$
   2.° término: $n = 2 \Rightarrow a_2 = 2^3 + 2^2 - 2(2) + 3 = 11$
   3.^{er} término: $n = 3 \Rightarrow a_3 = 3^3 + 3^2 - 2(3) + 3 = 33$
   4.° término: $n = 4 \Rightarrow a_4 = 4^3 + 4^2 - 2(4) + 3 = 75$
   etc.

Número de términos de una PA

I. Si la PA es de primer grado (razón constante)

Dada la serie: $a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ ...;\ a_n$ (diferencias consecutivas: r r r)

El número de términos de la PA está dado por:

$$\text{n.° de términos de una PA} = \frac{a_n - a_0}{r}$$

$$\text{n.° de términos de una PA} = \frac{a_n - a_1}{r} + 1$$

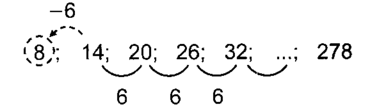
Donde:
a_n: Último término
a_0: Término anterior al primero
a_1: Primer término
r: Razón aritmética

Ejemplos:

1. Calcular el número de términos de la siguiente serie: 14; 20; 26; 32; ... ; 278

   Resolución:

   Considerando el término anterior al primero:



   Hallamos el número de términos:

   Con la primera expresión:

$$\text{n.° términos} = \frac{278 - 8}{6} = 45 \text{ términos}$$

   Con la segunda expresión:

$$\text{n.° términos} = \frac{278 - 14}{6} + 1 = 45 \text{ términos}$$

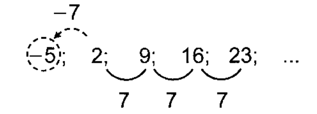
   ∴ La serie consta de 45 términos

2. Encontrar el último término de la serie:

   2; 9; 16; 23 ; ... (56 términos)

   Resolución:

   Considerando el término anterior al primero:



   Hallamos el número de términos:

   Con la primera expresión:

$$56 = \frac{a_n - (-5)}{7} \Rightarrow a_n = 387$$

   Con la segunda expresión:

$$56 = \frac{a_n - 2}{7} + 1 \Rightarrow a_n = 387$$

   ∴ El último término de la serie es 387.

II. Si la PA es de grado superior

El enésimo término de la serie se iguala al último término y el valor de "n" indicará el número de términos.

Ejemplo:

Encontrar el número de términos de la siguiente serie: 8 ; 13 ; 20 ; 29 ; ... ; 629

Resolución:

El enésimo término de la serie, que permite hallar a todos sus términos es: $a_n = n^2 + 2n + 5$.

Hallamos el número de términos (igualamos a_n con el último término).

$n^2 + 2n + 5 = 629 \Rightarrow n = 24$

∴ La serie consta de 24 términos.

Algunos artificios

A continuación se detallan, con ejemplos, la forma de poder contar a los términos de una PA.

Tenga presente que solo lo utilizaremos para averiguar el número de términos.

Ejemplos:

1. Encontrar el número de términos de la siguiente serie: 1248; 1288; 1328; ...; 1 968

   Resolución:

   En la serie, observamos que todos sus términos empiezan en la cifra 1 y terminan en la cifra 8.

   Omitimos momentáneamente las cifras 1 y 8 de la serie: 1248; 1288; 1328; ...; 1968.

   La nueva serie sería: $\underbrace{24;\ 28}_{4};\ \underbrace{\ ;\ 32}_{4};\ ...;\ 96$

   Sin perder generalidad, el número de términos de la serie es:

   $$\text{n.° de términos} = \frac{96 - 24}{4} + 1 = 19 \text{ términos}$$

   ∴ En la serie original hay 19 términos.

2. Encontrar el número de términos de la siguiente serie: $\overline{a12b}_8$; $\overline{a14b}_8$; $\overline{a16b}_8$; ...; $\overline{a76b}_8$

   Resolución:

   Omitimos las cifras a y b de la serie, tenemos: $\overline{a12b}_8$; $\overline{a14b}_8$; $\overline{a16b}_8$; ...; $\overline{a76b}_8$

   Los términos de la nueva serie son:

   $\underbrace{12_8;\ 14_8}_{2};\ \underbrace{\ ;\ 16_8}_{2};\ ....;\ 76_8$

   Sin perder generalidad, el número de términos de la serie es:

   $$\text{n.° de términos} = \frac{76_8 - 12_8}{2} + 1$$

   $$\text{n.° de términos} = \frac{62 - 10}{2} + 1 = 27 \text{ términos}$$

   ∴ La serie original tiene 27 términos.

3. Encontrar el número de términos de la siguiente serie: 16; 36; 64; 100; ...; 1600

   Resolución:

   La serie dada es equivalente a:

   $4^2; 6^2; 8^2; 10^2; ...; 40^2$

   Omitiendo los exponentes, tenemos:

   $\underbrace{4;\ 6}_{2};\ \underbrace{\ ;\ 8}_{2};\ \underbrace{\ ;\ 10}_{2};\ ...;\ 40$

   Sin perder generalidad, el número de términos de la serie es:

   $$\text{n.° de términos} = \frac{40 - 4}{2} + 1 = 19 \text{ términos.}$$

   ∴ La serie original tiene 19 términos

4. ¿Cuántos números capicúas de 4 cifras existen en el sistema decimal?

   Resolución:

   Escribimos la serie de los números capicúas de 4 cifras: 1001; 1111; 1221; ...; 9999

   Si omitimos las dos últimas cifras de cada término La nueva serie se convierte en: 10; 11; 12; ...; 99

   Sin perder generalidad, el número de términos es:

   $$\text{n.° de términos} = \frac{99 - 10}{1} + 1 = 90 \text{ términos}$$

   Existen en el sistema decimal, 90 números capicúas de 4 cifras.

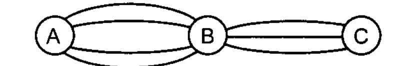
CONTEO DE NÚMEROS POR EL MÉTODO COMBINATORIO

Principio fundamental

"El número de combinaciones que se pueden establecer entre los elementos de dos o más conjuntos independientes, es igual al producto de la cantidad de elementos de dichos conjuntos".

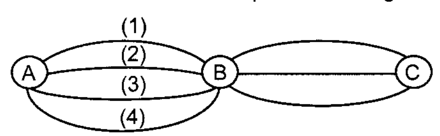
Ejemplos:

1. De cuántas maneras distintas se puede ir de A hasta C (sin regresar), en la siguiente red de caminos:



   Resolución:

   Denotamos cada camino que se va a seguir:



   Las posibles rutas para ir de A a C son:

1a	2a	3a	4a
1b	2b	3b	4b
1c	2c	3c	4c

   ∴ Son 12 rutas en total

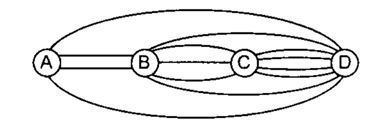
   Haciendo uso del principio fundamental del método combinatorio, vemos que:

   Caminos de A a B = 4 (por: 1; 2; 3 y 4)

   Caminos de B a C = 3 (por: a; b y c)

   ∴ El total de caminos (distintos) de A a C será: 4(3) = 12 caminos.

2. De cuántas maneras distintas se podrá ir desde A hasta D (sin regresar) en la siguiente red de caminos:



Resolución:

Usando el principio fundamental, la ruta a seguir sería:

De A → D (directamente): 2 (sin pasar por B ni por C)

De A → B → D: 2(2) = 4 (sin pasar por C)

De A → B → C → D: 2(3)(4) = 24

Vemos que el total de caminos será:
2 + 4 + 24 = 30

∴ Existen 30 maneras distintas para ir de A a D.

3. ¿Cuántos números de 3 cifras existen en el sistema octanario?

Resolución:

Considerando todos los valores posibles que pueden tomar las cifras del número de tres cifras en base 8:

a	b	c_8
↓	↓	↓
1	0	0
2	1	1
3	2	2
⋮	⋮	⋮
7	7	7

Total de números: 7 × 8 × 8 = 448 números

∴ En base 8 existen 448 números de 3 cifras.

4. ¿Cuántos números capicúas de 5 cifras existen en el sistema senario?

Resolución:

Los números serían de la forma: $\overline{abcba}_6$. En este caso se consideran las cifras: a; b y c (no se puede contar una misma cifra más de una vez).

Los valores posibles de las cifras sería:

a	b	c	b	a_6
↓	↓	↓		
1	0	0		
2	1	1		
⋮	⋮	⋮		
5	5	5		

Total de números: 5 × 6 × 6 = 180 números

∴ Existen 180 números capicúas de 5 cifras en el sistema senario.

Fórmula de la cantidad de cifras

Esta fórmula, permite calcular el número de cifras (o tipos de imprenta) que se emplearían al enumerar la siguiente serie: 1; 2; 3; ...; N

$$C.C. = (N + 1)K - \underbrace{11 \ldots 11}_{\text{"K" cifras}}$$

Donde: N: último término de la serie;
K: número de cifras de N

Tenga presente que los términos de la serie están formados por números consecutivos y empiezan en la unidad.

Ejemplo:

¿Cuántas cifras (o tipos de imprenta) se han empleado al enumerar las primeras 746 páginas de un libro?

Resolución:

1.ª forma: Clasificando los términos por su número de cifras.

Páginas enumeradas: 1; 2; 3; ...; 746

- Pág. de una cifra: $\underbrace{1;\ 2;\ 3;\ \ldots;\ 9}_{\text{9 números de 1 cifra c/u.}}$

  Total de cifras: 1 × 9 = 9 cifras.

- Pág. de dos cifras: $\underbrace{10;\ 11;\ \ldots;\ 99}_{\text{90 números de 2 cifras c/u.}}$

  Total de cifras: 2 × 90 = 180 cifras.

- Pág. de tres cifras: $\underbrace{100;\ 101;\ \ldots;\ 746}_{\text{647 números de 3 cifras c/u.}}$

  Total de cifras: 3 × 647 = 1941 cifras.

∴ Total de cifras usadas: 9 + 180 + 1941 = 2130 cifras

2.° forma: Usando la fórmula de la cantidad de cifras.
Páginas enumeradas: 1; 2; 3; ...; 746

Último término: N = 746 y cantidad de sus cifras: K = 3

La cantidad total de cifras empleadas será:

CC = (746 + 1)3 − 111 = 2130 cifras

∴ El total de cifras: 2130

PROBLEMAS RESUELTOS

1. ¿Cuántas cifras seis se emplean en la numeración de los 700 primeros números naturales?

Resolución:

Contamos la cifra 6 en cada orden: unidades, decenas y centenas.

- La cifra 6 en unidades: 6; 16; 26; ...; 696
  Eliminando la cifra 6 de las unidades, tenemos: 0; 1; 2; ...; 69 $\Rightarrow$ 70 cifras 6
- La cifra 6 en decenas: 60; 61; 62; ...; 668; 669
  Eliminado la cifra 6 de las decenas, tenemos: 0; 0; 1; 2; ...; 68; 69 $\Rightarrow$ 70 cifras 6
- La cifra 6 en centenas: 600; 601; 602; ... ; 699
  Eliminando la cifra 6 de las centenas, tenemos: 00; 01; 02; ... ; 99 $\Rightarrow$ 100 cifras 6

El total de cifras 6: 70 + 70 + 100 = 240

$\therefore$ Se emplean 240 cifras 6.

2. Si la siguiente serie es una PA:

$\overline{a3}_n; \overline{a5}_n; \overline{(a+1)2}_n; \overline{4b}_n; ...$, hallar: a + b + n.

Resolución:

Hallamos la razón aritmética: $\overline{a5}_n - \overline{a3}_n = 2$

Hallamos la base, la razón aritmética es constante:

$$\overline{a5}_n - \overline{a3}_n = \overline{(a+1)2}_n - \overline{a5}_n$$

Descomponiendo polinómicamente:

$2 = (a + 1)n + 2 - an - 5 \Rightarrow n = 5$

Reemplazando para hallar "a" y "b":

$\overline{4b}_5 - \overline{(a+1)2}_5 = 2$

Descomprimiendo polinómicamente:

$20 + b - 5a - 5 - 2 = 2 \Rightarrow 5a + b = 11$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\downarrow\quad\downarrow$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2 \quad 1$

Solo cumplen: a = 2; b = 1

$\therefore$ a + b + n = 8

3. Hallar el número de términos de la siguiente serie: $23_n; 30_n; 34_n; ...; 636_n$; sabiendo que forman una progresión aritmética.

Resolución:

Si forman PA, se cumple: $2(30_n) = 23_n + 34_n$

Descomponiendo polinómicamente:

$2(3n) = (2n + 3) + 3n + 4 \Rightarrow n = 7$

La serie original:	23_7;	30_7;	34_7;	...;	636_7
	↓	↓	↓		↓
En base decimal:	17;	21;	25;	...;	321

$$\text{n.° de términos} = \frac{321 - 17}{4} + 1 = 77 \text{ términos}$$

$\therefore$ La serie consta de 77 términos.

4. Señalar el número de términos que tiene la siguiente serie de números que forman una PA: 78; $\overline{ab}$; $\overline{ac}$; ...; $\overline{abc}$; sabiendo además que: a + b + c = 19.

Resolución:

De los primeros términos: $78;\underset{r}{\smile}\overline{ab};\underset{r}{\smile}\overline{ac}$; ...

Se deduce que: a = 8

De: $a + b + c = 19 \Rightarrow b + c = 11$ ...(1)

Por propiedad: $2(\overline{\underset{\substack{\downarrow\\8}}{a}b}) = 78 + \overline{\underset{\substack{\downarrow\\8}}{a}c}$

Reemplazando y descomprimiendo:

$2(80 + b) = 78 + (80 + c)$

Reduciendo, tenemos: c = 2b + 2

En (1): $b + 2b + 2 = 11 \Rightarrow b = 3; c = 8$

Reemplazando en la serie original:

78; 83; 88; ... ; 838

$$\text{Número de términos: } \frac{838 - 78}{5} + 1 = 153$$

$\therefore$ Son 153 términos.

5. Si la siguiente progresión aritmética:

$\overline{ab}_n; \overline{a(b+2)}_n; \overline{b1}_n; ...; \overline{aaa}_n$; tiene 74 términos; hallar: a + b + n.

Resolución:

Hallamos la razón aritmética: $\overline{a(b+2)}_n - \overline{ab}_n = 2$

Entre el segundo y tercer término se cumple:

$\overline{a(b+2)}_n + 2 = \overline{b1}_n$

Por el principio de la base: b + 2 + 2 = n + 1

En el orden cero: n = b + 3 ...(1)

En el orden uno: $a + 1 = b \Rightarrow a = b - 1$ ...(2)

Por el número de términos:

$$\frac{\overline{aaa}_n - \overline{ab}_n}{2} + 1 = 74 \Rightarrow \overline{aaa}_n - \overline{ab}_n = 2(74 - 1)$$

Descomponiendo polinómicamente:

$a \times n^2 + a \times n + a - a \times n - b = 146$

$an^2 + a - b = 146$ ...(3)

(1) y (2) en (3):

$(b - 1)(b + 3)^2 + b - 1 - b = 146$

$(b - 1)(b + 3)^2 = 147 = 7^2 \times 3 \Rightarrow b = 4$

En (1): n = 7

En (2): a = 3 $\quad\therefore$ a + b + n = 14

6. ¿Cuántos números impares de 4 cifras, comienzan con cifra par?

Resolución:

Los valores de las cifras, del número $\overline{abcd}$, para que sea impar (d = impar), y comience con cifra par (a = par):

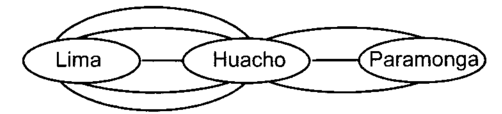
a	b	c	d
↓	↓	↓	↓
2	0	0	1
4	1	1	3
6	2	2	5
8	⋮	⋮	7
⋮	9	9	9

$4 \times 10 \times 10 \times 5 = 2000$

∴ Existen 2000 números

7. Para viajar de Lima a Huacho existen 5 empresas de transportes y de Huacho a Paramonga existen 3. ¿De cuántas maneras puede una persona viajar de Lima a Paramonga y regresar en líneas diferentes, si está obligada a hacer una parada en Huacho?

Resolución:

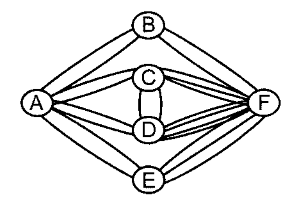


Ida: Lima → Huacho → Paramonga: 5(3) = 15 maneras
Regreso: Paramonga → Huacho → Lima: 2(4) = 8 maneras
(No utiliza la misma empresa)

Total de maneras: 15(8) = 120

∴ Existen 120 maneras para cumplir con las condiciones del viaje.

8. ¿De cuántas maneras, una persona podrá viajar de A hacia F y regresar, sin pasar por la totalidad del mismo camino?



Resolución:

Hallamos el número de caminos para ir de A a F.

- A → B → F = 2 × 2 = 4
- A → C → F = 2 × 3 = 6
- A → C → D → F = 2 × 2 × 4 = 16
- A → D → F = 2 × 4 = 8
- A → D → C → F = 2 × 2 × 3 = 12
- A → E → F = 2 × 3 = 6

Total de caminos: 4 + 6 + 16 + 8 + 12 + 6 = 52

El viaje de ida y vuelta, sin regresar por la totalidad del mismo camino:

$\underbrace{52}_{\text{De ida}} \times \underbrace{51}_{\text{De regreso}} = 2652$ ∴ Son 2652 maneras

9. ¿En qué sistema de numeración existen 343 numerales capicúas de 7 cifras que tenga solo una cifra cero?

Resolución:

Si el numeral tiene una sola cifra cero, será: $\overline{abc0cba}_n$

Valores correspondientes:
a = 1 ; 2 ; ... ; (n − 1) ⇒ (n − 1) valores.
b = 1 ; 2 ; ... ; (n − 1) ⇒ (n − 1) valores.
c = 1 ; 2 ; ... ; (n − 1) ⇒ (n − 1) valores.

Total de números: (n − 1)(n − 1)(n − 1) = 343
$(n-1)^3 = 7^3 \Rightarrow n = 8$

∴ Sistema de numeración octanario.

10. ¿En qué sistema de numeración se cumple, que para escribir todos los números de 4 cifras se emplean 75 504 cifras más que para escribir en este sistema todos los números capicúas de 4 cifras?

Resolución:

En base "n"
Hallamos la cantidad de números de 4 cifras:

$\overline{abcd}_n$
↓ ↓ ↓ ↓
$(n-1)\, n \times n \times n = (n-1)n^3$

n.° capicúa: $\overline{xyyx}_n$
↓ ↓
$(n-1)\, n = (n-1)n$

Hallamos la diferencia de la cantidad de cifras:
$4(n-1)n^3 - 4(n-1)n = 75\,504$

Simplificando y factorizando:
$(n-1)^2(n)(n+1) = 18\,876$

Descomponiendo adecuadamente:
$(n-1)^2(n)(n+1) = 11^2 \times 12 \times 13 \Rightarrow n = 12$

∴ Se cumple en base 12.

11. ¿En qué sistema de numeración existen 1482 números de la forma: $\overline{a(a+2)(b-2)b}$?

Resolución:

Sea "n", la base del sistema de numeración.
Hallamos los valores de cada cifra.

Cifra a: Menor valor: a ⇒ $a_{min} = 1$; Mayor valor: a + 2 = n − 1 ⇒ $a_{máx.} = n - 3$

Valores de a: = {1; 2; ...; (n − 3)} ⇒ (n − 3) valores

Cifra b: Menor valor: b − 2 = 0 ⇒ $b_{mín.} = 2$; Mayor valor: b = n − 1 ⇒ $b_{máx.} = n - 1$

Valores de b: {2; 3; ...; (n − 1)} ⇒ (n − 2) valores

Total de valores: (n − 3)(n − 2) = 1482

Descomponiendo e igualando factores:
$(n-3)(n-2) = 38 \times 39 \Rightarrow n-2 = 39 \Rightarrow n = 41$

$\therefore$ Base 41

12. ¿Cuántos numerales de la forma $\overline{abcd}$ (a; b; c y d, diferentes entre sí) son pares y además la cifra "b" solo puede ser 4 u 8?

Resolución:

Consideramos las cifras posibles y empezamos por el conjunto de menor cantidad de valores:

3.°	1.°	4.°	2.°	
a	b	c	d;	$(a \neq b \neq c \neq d)$
↓	↓	↓	↓	
1	4	0	0	
②	⑧	1	2	
3		~~2~~	④	
⋮		⋮	6	
9		9	~~8~~	
7 ×	2 ×	7 ×	4	= 392

Observaciones:
Si las cifras son distintas, es importante el orden señalado.

1.°: "b" solo puede ser 4 u 8 $\Rightarrow$ 2 valores.
(Si: $b = 8 \Rightarrow a, c$ y $d \neq 8$)

2.°: "d" puede ser: 0; 2; 4 y 6 $\Rightarrow$ 4 valores.
(Si: $d = 4 \Rightarrow a$ y $c \neq 4$)

3.°: "a" puede ser: 1; 2; 3; 5; 6; 7; 9 $\Rightarrow$ 7 valores.
(Si: $a = 2 \Rightarrow c \neq 2$)

4.°: "c" puede ser: 0; 1; 3; 5; 6; 7; 9 $\Rightarrow$ 7 valores.

Hallamos el total de números: $2 \times 4 \times 7 \times 7 = 392$

$\therefore$ Existen 392 números.

13. ¿En qué sistema de numeración, existen 50 numerales capicúas de 7 cifras, cuyas dos últimas cifras suman 2?

Resolución:

El numeral capicúa de 7 cifras, tal que sus dos últimas cifras sumen 2 será: $\overline{a(2-a)bcb(2-a)a}_n$

Respectivos valores:

De "a" = {1; 2} $\Rightarrow$ 2 valores
De "b" = {0; 1; ...; (n − 1)} $\Rightarrow$ n valores
De "c" = {0; 1; ...; (n − 1)} $\Rightarrow$ n valores

Total de números: $2 \times n^2$

Por dato: $2(n^2) = 50 \Rightarrow n = 5$

$\therefore$ En el sistema de base 5.

14. ¿Cuántos números impares de la forma $\overline{ababab}$ existen en el sistema quinario?

Resolución:

Si la base es impar, la paridad del numeral se determina sumando las cifras de dicho numeral.

Como: $\overline{ababab}_5$ = numeral impar
(a y b son menores de 5)

$\Rightarrow \Sigma$ cifras = impar

Se cumple: $3(a+b)$ = impar

$\Rightarrow$ a + b = impar

a	b	
↓	↓	
1	{0; 2; 4}	(3 números)
2	{1; 3}	(2 números)
3	{0; 2; 4}	(3 números)
4	{1; 3}	(2 números)

Total de números: $3 + 2 + 3 + 2 = 10$

$\therefore$ Existen 10 numerales impares de la forma $\overline{ababab}_5$

15. ¿Cuántos numerales de la forma $\overline{a(a+b)b}$ existen en el sistema enesimal?

Resolución:

Del numeral: $\overline{a(a+b)b}_n$

Los valores posibles son: a = {1; 2; ...; (n − 1)},
b = {0; 1; ...; (n − 1)}

Analizando los valores, de manera que la cifra (a + b) esté correctamente escrita:

- Si: a = 1
  $b = \underbrace{\{0; 1; 2; ...; (n-2)\}}_{(n-1) \text{ numerales}}$
- Si: a = 2;
  $b = \underbrace{\{0; 1; ...; (n-3)\}}_{(n-2) \text{ numerales}}$
- Si: a = 3;
  $b = \underbrace{\{0; 1; ...; (n-4)\}}_{(n-3) \text{ numerales}}$
- Si: a = n − 2; b = {0, 1} } 2 numerales
- Si: a = n − 1; b = 0 } 1 numeral

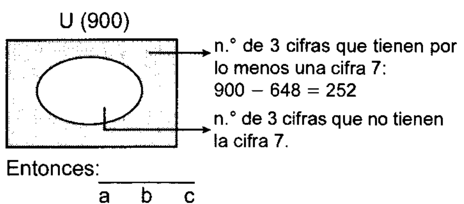
Luego, el total de numerales es:

$$(n-1) + (n-2) + (n-3) + ... + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

16. ¿Cuántos números de tres cifras, del sistema decimal, tienen por lo menos una cifra 7 en su escritura?

Resolución:

Considerando a todos los números de tres cifras del sistema decimal.



Entonces: $\overline{abc}$

a ↓ b ↓ c ↓

$8 \times 9 \times 9 = 648$ números

∴ Existen 252 números de tres cifras del sistema decimal, que tienen por lo menos una cifra 7 en su escritura.

17. En qué sistema de numeración existen 91 numerales capicúas de 5 cifras, cumpliéndose que siempre tienen solo 2 cifras 1.

Resolución:

Sea el numeral capicúa de 5 cifras: $\overline{abcba}_n$

Para que siempre tenga solo dos cifras "1", se tiene:

- Si a = 1. Los respectivos valores de b y c:

$$\overline{1\ b\ c\ b\ 1}_n$$

b	c
↓	↓
0	0
2	2
3	3
⋮	⋮
(n − 1)	(n − 1)

$(n-1)(n-1) = (n-1)^2$ numerales.

- Si b = 1. Los respectivos valores de a y c:

$$a\ 1\ c\ 1\ a$$

a	c
↓	↓
2	0
3	2
⋮	⋮
(n − 1)	(n − 1)

$(n-2)\quad(n-1) = (n-2)(n-1)$ num.

Pero, el total de numerales es 91:

$\Rightarrow (n-1)^2 + (n-1)(n-2) = 91$

Factorizando: $(n-1)(n-1+n-2) = 91$

Igualando factores:

$(n-1)(2n-3) = 91 = 7 \times 13 \Rightarrow n = 8$

∴ Se cumple en el sistema octanario

18. ¿Cuántos números pares, de tres cifras diferentes entre sí, se pueden escribir con las cifras 0; 2; 3; 5; 6; 8 y 9?

Resolución:

Sea $\overline{abc}$ el número par de cifras diferentes entre sí. Se tiene:

2.°	3.°	1.°
a	b	c
↓	↓	↓
2	0	0
3	2	2
5	3	6
6	5	8
8	6	
9	8	
	9	

Empezamos el conteo por la cifra de menor cantidad de valores.

1.° c = toma 4 valores.

2.° a = toma 5 valores, puesto que c ya tomó un valor.

3.° b = toma 5 valores, puesto que a y c ya tomaron un valor.

Luego, el total de números: 4(5)(5) = 100

∴ Existen 100 números.

19. ¿Cuántos numerales de la forma:

$\overline{(a-2)(b-3)(a+3)(b+1)}$ existen en el sistema decimal?

Resolución:

Vemos que las cifras del numeral dependen de los valores de "a" y "b".

Cifra a:

Menor cifra: $a - 2 = 1 \Rightarrow a = 3$ (como mínimo)

Mayor cifra: $a + 3 = 9 \Rightarrow a = 6$ (como máximo)

Luego, los valores de "a" son {3; 4; 5; 6} ⇒ 4 valores.

Cifra b:

Menor cifra: $b + 1 = 0 \Rightarrow b = -1$ (como mínimo)

Mayor cifra: $b + 3 = 9 \Rightarrow b = 6$ (como máximo)

Luego, los valores de "b" son {−1; 0; 1; ...; 6}

⇒ 8 valores

Total de numerales: 4(8) = 32

∴ Existen 32 numerales.

20. ¿Cuántos numerales de la forma $\overline{a(a+2)(b-2)b}$ existen, tal que el producto de sus cifras centrales sea un número par?

Resolución:

Por dato: $(a+2)(b-2) =$ par

(a + 2)	(b − 2)
P	I
I	P
P	P

Se presentan tres casos:

1.^er^ caso: $a + 2 =$ par ⇒ a = {2; 4; 6}: 3 valores
$b - 2 =$ impar ⇒ b = {3; 5; 7; 9}: 4 valores
En total: 3 × 4 = 12 números

2.° caso: $a + 2 =$ impar ⇒ a = {1; 3; 5; 7}: 4 valores
$b - 2 =$ Par ⇒ b = {2; 4; 6; 8}: 4 valores
En total: 4 × 4 = 16 números

3.^er^ caso: $a + 2 =$ par ⇒ a = {2; 4; 6}: 3 valores
$b - 2 =$ par ⇒ b = {2; 4; 6; 8}: 4 valores
En total: 3 × 4 = 12 números

Luego, el total de números es: 12 + 16 + 12 = 40

∴ Existen 40 números.

21. Hallar "n", sabiendo que en la siguiente serie: $1_n; 2_n; 3_n; ...; \overline{(n-1)00}_n$; se han escrito $\overline{(n-1)00}$ cifras.

Resolución:

Cantidades enumeradas: $1_n; 2_n; 3_n; ...; \overline{(n-1)00}_n$

Cantidad de cifras = $\overline{(n-1)00}$

$[(\overline{(n-1)00_n}+1]3 - 111_n = \overline{(n-1)00}$

En el sistema decimal:

$[(n-1)n^2+1]3 - n^2 - n - 1 = 100(n-1)$

Efectuando: $3n^3 - 4n^2 - n + 2 = 100n - 100$

Reduciendo: $3n^3 - 4n^2 - 101n + 102 = 0 \Rightarrow n = 6$

$\therefore$ n = 6

22. Determinar (a + b), si para escribir todos los números enteros desde $\overline{1ab}$ hasta $\overline{ab2}$, se han empleado $\overline{1ab1}$ cifras.

Resolución:

Cantidades enumeradas: $\overline{1ab}$; ... ; $\overline{ab2}$

Número de términos: $(\overline{ab2} - \overline{1ab} + 1)$ números

El total de cifras: $(\overline{ab2} - \overline{1ab} + 1)3 = \overline{1ab1}$

Descomponiendo en bloques:

$(\overline{ab0} + 2 - 100 - \overline{ab} + 1)3 = 1001 + \overline{ab0}$

$\overline{ab0} \to 10(\overline{ab})$; $\overline{ab0} \to 10(\overline{ab})$

Reduciendo:

$[9(\overline{ab}) - 97]3 = 1001 + 10(\overline{ab})$

$27(\overline{ab}) - 291 = 1001 + 10(\overline{ab}) \Rightarrow \overline{ab} = 76$

$\therefore$ a + b = 13

23. Hallar: "x + y + n", si la siguiente serie:

$\overline{xx}_n$; $\overline{x(x+1)}_n$; $\overline{x(x+2)}_n$; $\overline{x(x+3)}_n$; $\overline{y0}_n$; ... ; 110_n ;

posee 41 términos.

Resolución:

Como los términos $\overline{x(x+3)}_n$ y $\overline{y0}_n$ son consecutivos,

Se deduce que: x + 4 = n e y = x + 1

Hallando el número de términos:

$110_n - \overline{xx}_n + 1 = 41$; pero: x = n − 4

Descomponiendo polinómicamente:

$n^2 + n - (n-4)n - (n-4) + 1 = 41$

Reduciendo tenemos que: n = 9

Luego: x = 5; y = 6 $\quad \therefore$ x + y + n = 20

24. En la enumeración de las páginas de un libro, se emplean adicionalmente 20 cifras por cada página para enunciar los problemas. Si en total se emplearon 2514 tipos, ¿cuántas hojas tiene el libro?

Resolución:

Números para enunciar los problemas en cada página: $\underbrace{01; 02; 03; ...; 09; 10}_{\text{20 cifras}}$

Sea "n" el número de páginas del libro, el total de cifras será:

$\overbrace{(n+1)3 - 111}^{\text{n.° pág.}} + \overbrace{20(n)}^{\text{n° prob.}} = 2514 \Rightarrow n = 114$ pág.

$\therefore$ El libro tiene $\frac{114}{2} = 57$ hojas.

25. Al enumerar un libro por páginas se utilizan 269 tipos más que numerándolo por hojas. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

Resolución:

Sea x el número de hojas y 2x el número de páginas.

De la cantidad de cifras empleadas:

$$\begin{pmatrix}\text{Numeración}\\ \text{de páginas}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Numeración}\\ \text{por hojas}\end{pmatrix} = 269$$

Se cumple:

$[(2x+1)3 - 111] - [(x+1)2 - 11] = 269$

Efectuando:

$6x + 3 - 111 - 2x - 2 + 11 = 269 \Rightarrow x = 92$

$\therefore$ El número de páginas: 92(2) = 184

26. De un libro, si tuviera una hoja menos se hubiera utilizado 9 tipos menos y si tuviera una hoja más se hubiera utilizado 10 tipos más. ¿Cuántas cifras se emplearon en la numeración de las páginas del libro?

Resolución:

Acerca de la última hoja, deducimos lo siguiente:

Con una hoja menos: 9 tipos menos.

$\Rightarrow$ páginas enumeradas: 9999 y 10 000

Con una hoja más: 10 tipos más.

$\Rightarrow$ páginas enumeradas: 10 001 y 10 002

Luego, el libro tiene 10 000 páginas enumeradas.

Hallamos la cantidad de cifras:

C.C. = (10 000 + 1)5 − 11 111 = 38 894

$\therefore$ Se emplearon 38 894 cifras

27. Para enumerar un libro de $\overline{2xy}$ páginas se han empleado 627 tipos de imprenta. ¿Cuántos tipos de imprenta se emplearán para numerar un libro de $\overline{xy2}$ páginas?

Resolución:

Páginas enumeradas: $\underbrace{1; 2; ...; \overline{2xy}}_{\text{n.° de cifras = 627}}$

$\Rightarrow (\overline{2xy} + 1)3 - 111 = 627$

Resolviendo: $\overline{2xy} = 245 \Rightarrow \overline{xy} = 45$

Hallamos la cantidad de cifras enumeradas:

1; 2; ...; 452

$\Rightarrow$ C.C. = (452 + 1)3 − 111 = 1248

$\therefore$ Se emplearán 1248 tipos de imprenta.

28. Al enumerar todos los números enteros desde el $\overline{3ba}_7$ hasta el $\overline{ab3}_7$, se emplearon $\overline{ab4}_7$ cifras. Hallar el valor de: a + b.

Resolución:

Páginas enumeradas: $\underbrace{\overline{3ba}_7; ... ; \overline{ab3}_7}_{\text{n.° de cifras} = \overline{ab4}_7}$

Hallamos el número de páginas: $\overline{ab3}_7 - \overline{3ba}_7 + 1$

Hallamos el número de cifras: $3(\overline{ab3}_7 - \overline{3ba}_7 + 1)$

Por dato: $3(\overline{ab3}_7 - \overline{3ba}_7 + 1) = \overline{ab4}_7$

Descomponiendo polinómicamente:

$3(49a + 7b + 3 - 147 - 7b - a + 1) = 49a + 7b + 4$

Reduciendo, se tiene:

$95 \times \underset{5}{\underset{\downarrow}{a}} = 7 \times \underset{6}{\underset{\downarrow}{b}} + 433 \quad \therefore\ a + b = 11$

29. Si el número de tipos de imprenta utilizados en la enumeración de las páginas de un libro es el triple del número de páginas, ¿cuántas páginas tiene dicho libro? Dar como respuesta la suma de sus cifras.

Resolución:

Sea N el número de páginas del libro.

Del enunciado, se cumple:

Cantidad de cifras = 3(número de páginas)

Reemplazando:

$(N + 1)K - \underbrace{11....11}_{k\text{ cifras}} = 3N$

Se deduce que: K = 4

Luego: $(N + 1)4 - 1111 = 3N \Rightarrow N = 1107$

El libro tiene 1107 páginas

$\therefore\ \Sigma$ cifras: $1 + 1 + 0 + 7 = 9$

30. ¿En qué sistema de numeración cuya base es par, existen 156 números de la forma $\overline{a\left(\frac{b}{2}\right)b\left(\frac{a}{2}\right)}_n$?

Resolución:

Los valores que pueden tomar las cifras "a" y "b" deben ser pares y menores que "n".

Valores de la cifra "a": {2; 4; 6; ...; n − 2}

$\Rightarrow \frac{n-2}{2}$ valores

Valores de la cifra "b": {0 ; 2 ; 4 ; ...; n − 2}

$\Rightarrow \left(\frac{n-2}{2} + 1\right)$ valores

La cantidad de números: $\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2} + 1\right) = 156$

Descomponiendo en dos factores:

$\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2} + 1\right) = 12(13)$

Igualando factores: $\frac{n-2}{2} = 12 \Rightarrow n = 26$

$\therefore$ La base es 26

31. ¿Cuántos números de la forma $\overline{(a-3)(5-b)(3c)\left(\frac{d}{3}\right)a}$ existen en el sistema duodecimal?

Resolución:

$N = \overline{(a-3)(5-b)(3c)\left(\frac{d}{3}\right)a}_{12}$

Cambiando las variables:

$m = 5 - b;\ n = 3c;\ p = d/3$

$\Rightarrow N = \overline{(a-3)mnpa}_{12}$

$a = 4; 5; 6; ...; (10); (11) \Rightarrow 8$ números

m, n y p cada uno toma 12 valores

Total números: $8 \times 12 \times 12 \times 12 = 13\,824$ números

32. ¿Cuál es la menor base de numeración donde existen $\overline{nm}$ números de la forma: $\overline{(a+4)\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{n+1}{5}\right)(4-n)}$?

Resolución:

Se cumple que:

$\left(\frac{n+1}{5}\right)$ es cifra y $(4 - n) \Rightarrow$ solo n = 4

Existen $\overline{4m}$ números, como se desea la menor base, esta cantidad de números debe ser la menor posible: $\overline{4m} = 40$ (menor)

Como n toma un único valor, a deberá de tomar 40 valores, todos pares positivos, y cero:

$a = \underbrace{0; 2; 4; 6; 8; ...; 78}_{40\text{ valores}}$

$\Rightarrow$ Si a = 78; el número será:

$N = \overline{(82)(39)10}_k$; donde $82 < k$

El menor valor de k que cumple será k= 83 (base pedida)

33. En un sistema de numeración, cuya base es par, existen 156 números de la forma $\overline{a\left(\frac{b}{2}\right)b\left(\frac{a}{2}\right)}_{(n)}$.

Hallar la base.

Resolución:

$\overline{a\left(\frac{b}{2}\right)b\left(\frac{a}{2}\right)}_n$; dato: n es par

Valor máximo de a y b: n − 2 (a y b son pares)

$a \in \{2; 4; 6; ...; n-2\} \Rightarrow$ total $\frac{n-2}{2}$ valores

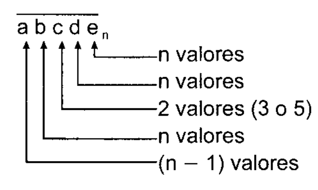
$b \in \{0; 2; 4; ...; n-2\} \Rightarrow$ total $\frac{n}{2}$ valores

$\Rightarrow \frac{(n-2)}{2} \times \frac{(n)}{2} = 156 \quad \therefore\ n = 26$

34. ¿En qué sistema de numeración existen 2160 números de cinco cifras cuyas cifras de centenas sean solo 3 o 5?

Resolución:

La cifra de centenas solo se puede indicar en el sistema decimal; se debe señalar la cifra de tercer orden:



$\Rightarrow (n - 1)(n^3)(2) = 2160$

$\Rightarrow (n-1)(n^3) = 1080 = 5 \times 6^3$

$\therefore$ n = 6 (sistema senario)

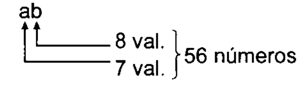
35. De los números del 1 al 1000 se excluyen todos los que contengan la cifra 4 o la cifra 7, ¿cuántos quedan?

Resolución:

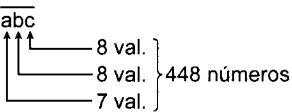
Se cuentan los números que no utilizan las cifras 4 o 7.

Una cifra: 1; 2; 3; 5; 6; 8 ; 9 $\Rightarrow$ 7 números

Dos cifras: $\overline{ab}$



Tres cifras: $\overline{abc}$



Cuatro cifras: un número

$\therefore$ Total = 7 + 56 + 448 + 1= 512 números

36. Un número escrito en el sistema binario tiene 8 cifras, ¿cuántas puede tener en el sistema duodecimal?

Resolución:

En el sistema binario $2^7 \leq N < 2^8$ (N: 8 cifras)

$\Rightarrow \underbrace{128}_{(10)8_{12}} \leq N < \underbrace{256}_{194_{12}}$

$\therefore$ En el sistema duodecimal posee 2 o 3 cifras.

37. En qué sistema de numeración existen 448 números capicúas de 6 cifras. Dar como respuesta la base de dicho sistema.

Resolución:

En el sistema de base n hay $\underbrace{0; 1; 2; 3; ... (n-1)}_{n \text{ cifras}}$

$\Rightarrow \overline{abccba}_n$

- c: (n − 1) cifras...

a: (n − 1) cifras
b: (n) cifras
c: (n) cifras

Total: $(n-1)(n^2) = 448 = 7 \times 8^2$ $\therefore$ Base: 8

38. ¿Cuántos $\overline{abc}$, a, b y c distintas no tienen en las unidades las 2 mayores cifras, en las decenas las 4 mayores cifras y en la centena las 6 mayores cifras?

Resolución:

$\overline{abc}$

c: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 7
b: 0; 1; 2; 3; 4; 5
a: 1; 2; 3

$\Rightarrow$ a puede tomar 3 valores

$\Rightarrow$ b es diferente de a de los 6 solo puede tomar 5

$\Rightarrow$ c es diferente de a y b de los 8 solo puede tomar 6

$\therefore 3 \times 5 \times 6 = 90$ números

39. Determinar la cantidad de números de la forma $\overline{a(2a+b)b}$ que existen en base 13.

Resolución:

$N = \overline{a(2a+b)b}_{13}$

a = 1: $N = \overline{1(b+2)b}_{13} \Rightarrow b = \underbrace{0; 1; 2; ...; (10)}_{11 \text{ números}}$

a = 2: $N = \overline{2(b+4)b}_{13} \Rightarrow b = \underbrace{0; 1; 2; ...; 8}_{9 \text{ números}}$

a = 3: $N = \overline{3(b+6)b}_{13} \Rightarrow b = \underbrace{0; 1; 2; ...; 6}_{7 \text{ números}}$

$\vdots \qquad \vdots$

a = 6: $N = \overline{6(b+12)b}_{13} \Rightarrow b = \underbrace{0}_{1 \text{ número}}$

$\Rightarrow$ Total: 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 36

$\therefore$ 36 números

40. En el sistema undecimal, ¿cuántos números de 5 cifras tienen por lo menos 2 cifras iguales?

Resolución:

(α = diez)

Que tenga por lo menos dos cifras iguales, significa que puede tener más cifras iguales.

Números de 5 cifras $\overline{abcde}_{(11)}$

a: 1; 2; ... 9; α (10 valores)

b, c, d, e; 0; 1; 2; ...; 9; α (11 valores)

Total: $10 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11 = 146\,410$

Números de 5 cifras diferentes

$\overline{a \ b \ c \ d \ e}_{(11)}$

$\downarrow \ \downarrow \ \downarrow \ \downarrow \ \downarrow$

$10 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 50\,400$

Finalmente, números de 5 cifras que tengan al menos dos cifras iguales:

146 410 − 50 400 = 96 010

41. El número $\overline{2424...24}_{(9)}$ de treinta cifras, en base 3, cuánta cantidad de ceros tendrá en su escritura.

Resolución:

Caso especial: base 3^2 a base 3

2	4	2	4	...	2	$4_{(9)}$
2	11	02	11	...	02	$11_{(3)}$

Por cada cifra 2, aparece una cifra cero, salvo la primera cifra.

Son 30 cifras $\begin{cases} 15 \text{ cifras } 2 \Rightarrow \text{aparece 14 cifras cero} \\ 15 \text{ cifras } 4 \end{cases}$

42. Si un libro de 258 páginas se enumera en base 6 se emplean; 625 cifras más que si se enumeraran

las $\overline{(n-1)(n-1)}_n$ primeras páginas en base n, entonces hallar n.

Resolución:

Si se enumera el libro en base 6: $258 = 1110_6$

$CC(1110_6) = (1110_6 + 1)4 - 1111_6 = 3333_6 = 777$ cifras

Utiliza 625 cifras más que en la segunda numeración, esta utiliza: $777 - 625 = 152$ cifras.

$CC(\overline{(n-1)(n-1)}_n) = [\overline{(n-1)(n-1)}_n + 1]2 - 11_n$

$152 = [(n^2 - 1) + 1]2 - (n + 1)$

$\Rightarrow 153 = \underbrace{n}_{9}\underbrace{(2n-1)}_{17} \quad \therefore n = 9$

9×17

43. Al escribir: $A = 2^{16} + 3(4^{12}) + 2^{19}$ en base 4, ¿cuántos ceros tendrá en su escritura?

Resolución:

Se tiene:

$A = 2^{16} + 3\times4^{12} + 2^{19} \Rightarrow A = (2^2)^8 + 3\times4^{12} + 2\times2^{18}$

$A = 4^8 + 3\times4^{12} + 2\times(2^2)^9 \Rightarrow A = 3\times4^{12} + 2\times4^9 + 1\times4^8$

$A = 3002100000000_{(4)}$

$\therefore$ La cantidad de cifras cero que se observa es: 10

44. Calcular en base 10, el menor numeral de "n" cifras significativas en base "n"; si el menor numeral de "n + 1" cifras en base "n" es igual a:

$\underbrace{\overline{1n}_{\overline{1n}_{\overline{1n}_{\ddots_{\overline{1n}_{(55n)}}}}}}_{570\text{ veces}}$

Resolución:

Sabemos que:

$\underbrace{\overline{1a}_{\overline{1a}_{\overline{1a}_n}}}_{3\text{ veces}} = n + 3a$

Por dato:

$\overline{1n}_{\overline{1n}_{\ddots_{\overline{1n}_{(55n)}}}} = 55n + 570n = 625n = \underbrace{1000\ldots00_n}_{a+1\text{ cifras}}$

$625n = n^n \Rightarrow 5^4 = n^{n-1} \Rightarrow n = 5$

Nos piden:

$11111_{(5)}$ en base 10

$11111_{(5)} = 5^4 + 5^3 + 5^2 + 5 + 1 = 781$

45. Si el número: $\underbrace{33\ldots33}_{80\text{ cifras}}{}_{27}$ se convierte al sistema ternario, la suma de sus cifras será:

Resolución:

Caso especial de base 3^3 a base 3:

Base 27:	3	3	3...	3	3
Base 3:	10	010	010...	010_3	010_3

$S_{\text{cifras sig.}} = 1 + 1 + \ldots + 1 + 1 = 80$ sumandos

46. Indicar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. Si $0,\overline{ab}_m = 0,\overline{cd}_n$, donde $n > m$, entonces $\overline{ab} > \overline{cd}$.

II. El número π no puede ser descompuesto polinómicamente.

III. Sí $N = 0,\widehat{ab}_n$, entonces N es un número decimal inexacto periódico mixto.

Resolución:

I. Tomando: $1/2 = 0,5$

$\Rightarrow 0,10_{(2)} = 0,50_{(10)}$

$10 > 2$: no cumple $10 > 50$ (I es falso)

II. π es número irracional de infinitas cifras decimales. (II es verdadero)

III. $N = 0,\widehat{ab}_n$ depende de la base para señalar si es decimal exacto, periódico ó periódico mixto.

Por ejemplo: $0,\widehat{12}_3 = \dfrac{12_3}{22_3} \times \dfrac{5}{8} = 0,625$

$0,\widehat{12}_5 = \dfrac{12_5}{44_5} = \dfrac{7}{24} = 0,29\widehat{16}$ (III es falso)

$\therefore$ FVF

47. Si: $\overline{aaa} = 2160_{(a)}$, hallar el valor de: $a^2 - 4a + 7$

Resolución:

Se tiene: $\overline{aaa} = 2160_{(a)}$

Descomponiendo polinómicamente

$100a + 10a + a = 2(a^3) + 1(a^2) + 6(a)$

$111a = 2a^3 + a^2 + 6a$

Simplificando:

$2a^2 + a = 105 \Rightarrow a(2a + 1) = 7(2\times7 + 1)$

Identificando factores: $a = 7$

$\therefore a^2 - 4a + 7 = 49 - 28 + 7 = 28$

48. ¿Cuántos números de 3 cifras tienen por lo menos una cifra 3, tales que al ser multiplicados por sí mismos se obtenga un valor impar?

Resolución:

Sea el número $\overline{abc}$

Del problema: $(\overline{abc})(\overline{abc})$= impar

Luego c es impar

- Cálculo de los números impares de 3 cifras:

$\overline{a\ b\ c}$

$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow$

$9\times 10\times 5 = 450$ números

- Cálculo de los números impares que no utilizan cifra 3:

a b c

$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow$

$8\times 9\times 4 = 288$ números

Números impares que contengan alguna cifra 3

$\therefore 450 - 288 = 162$

49. ¿Cuántas cifras 5 se utilizan, en el sistema de base 7, al escribir del 1 al 1000_7?

Resolución:

Si se considera la siguiente escritura de los números:

$0\,0\,0_7 \Rightarrow$ 1.er número
$0\,0\,1_7 \Rightarrow$ 2.° número
$0\,0\,2_7 \Rightarrow$ 3.er número
$0\,0\,3_7 \Rightarrow$ 4.° número
⋮
$6\,6\,6_7 \Rightarrow$ 343.° número

Cada cifra de base 7: 0; 1; 2...; 5; 6 se utiliza la misma cantidad de veces: existen 343 números.

Total de cifras = 343 × 3 = 1029 cifras

$\therefore$ n.° veces que se utiliza cada cifra: $\frac{1029}{7} = 147$

50. Si el número $12102122101122_{(k)}$, se convierte a base "k^3", la nueva suma cifras es los 10/3 de la anterior. Hallar el valor de "$k^2 - 4$".

Resolución:

Caso especial de base K a base K^3

1 2	1 0 2	1 2 2	1 0 1	1 2 2
(k + 2)	$(k^2 + 2)$	$(k^2 + 2k + 2)$	$(k^2 + 1)$	$(k^2 + 2k + 2)$

Suma anterior

Nueva suma de cifras= $\left(\frac{10}{3}\right)(18) = 60$

$\Rightarrow (k + 2) + (k^2 + 2) + (k^2 + 2k + 2)2 + (k^2 + 1) = 60$

$4k^2 + 5k + 9 = 60 \Rightarrow k = 3$

$\therefore$ Se pide: $k^2 - 4 = 3^2 - 4 = 5$

51. Un número telefónico es capicúa y utiliza la cifra 7 una sola vez. Además si la primera cifra de la izquierda se multiplica por 11; luego se agrega la segunda cifra, luego a todo el resultado anterior se le multiplica por 11 y por último se le agrega la tercera cifra, se obtiene 985. ¿Cuál es la suma de cifras del número telefónico?

Resolución:

Sea N el número telefónico

$\Rightarrow N = \overline{abc7cba}$ (capicúa)

De manera que:

$(11a + b)(11) + c = 985 \Rightarrow a(11^2) + b(11) + c$

$\overline{abc}_{11} = 985 = 816_{11} \Rightarrow a = 8;\ b = 1;\ c = 6$

Suma de cifras= 2(8) + 2(1) + 2(6) + 7 = 37

52. Si se cumple: $\overline{abc}_6 = 12002_a = 2021_b = 1022_c$, hallar $\overline{abc}$ y expresarlo en base "c".

Resolución:

Por propiedad, si: 12002 > 2021 > 1022

Entonces se cumple: $a < b < c$ ...(1)

De: $12002_a \Rightarrow 2 < a$ ...(2)

De: $\overline{abc}_6 \Rightarrow c < 6$ ... (3)

De (1), (2) y (3): $2 < a < b < c < 6$

Necesariamente: a= 3 ; b= 4 y c= 5

$\therefore \overline{abc} = 345 = 1333_5$

53. Si se cumple que: $0{,}143_{(2n)} = 0{,}2\widehat{5}_{(3n)}$ = a/b, hallar (a + b).

Resolución:

$0{,}143_{(2n)} = 0{,}2\widehat{5}_{(3n)}$

$$\frac{143_{(2m)}}{1000_{(2m)}} = \frac{25_{(3m)} - 2}{(3n-1)0_{(3m)}} \Rightarrow \frac{4n^2 + 8n + 3}{8n^3} = \frac{6n+3}{3n(3n-1)}$$

$\Rightarrow \underbrace{(4n^2 + 8n + 3)}_{\text{impar}}(3n - 1) = \underbrace{8n^2(2n + 1)}_{\text{par}}$

$\Rightarrow 3n - 1 = 8 \Rightarrow n = 3$

Se tiene $0{,}143_6 = \frac{143_6}{1000_6} = \frac{63}{216}$

$\Rightarrow 0{,}143_6 = \frac{7}{24}$ $\therefore$ a + b = 31

54. Si: $N = 14 \times 13^5 + 21 \times 13^4 + 27 \times 13^2 + 5 \times 13 + 17$, ¿cuál será la suma de las cifras del numeral N al expresarlo en base 13?

Resolución:

Del número N podemos hacerlo siguiente:

$N = (13 + 1)13^5 + (13 + 8)13^4 + (2 \times 13 + 1)13^2 + 5 \times 13 + 1 \times 13 + 4$

$N = 13^6 + 1 \times 13^5 + 13^5 + 8 \times 13^4 + 2 \times 13^3 + 1 \times 13^2 + 6 \times 13 + 4$

Luego, agrupando convenientemente N, resulta:

$N = 1282164_{(13)}$

$\Rightarrow \Sigma$cifras= 1 + 2 + 8 + 2 + 1 + 6 +4 = 24

55. Un numeral de la base decimal convertido a base "n" resulta ser el mayor número de tres cifras y en base "2n" es el mayor número de dos cifras como se escribe en base "3n".

Resolución:

Por dato:

$\overline{(n-1)(n-1)(n-1)}_{(n)} = \overline{(2n-1)(2n-1)}_{(2n)}$

Descomponiendo polinómicamente:

$(n - 1)n^2 + (n - 1)n + (n - 1) = (2n - 1)2n + (2n - 1)$

$\Rightarrow n = 4$

Reemplazando: $333_4 = 77_8$

Pasando 77_8 a base 12:

$\therefore 33_4 = 77_8 = 53_{12}$

56. Sea el número: $N = \overline{(a+1)(a)(a+1)(a)(a+1)^2}_{(a+2)}$

calcule P(a), si $P(x) = x^2 + x + 2$

Resolución:

Dato: $N = \overline{(a+1)(a)(a+1)(a)(a+1)^2}_{(a+2)}$

Sabemos que: cifra < base

$(a + 1)^2 < (a + 2) \Rightarrow a = 0$

$P(0) = 0^2 + 0 + 2 = 2$

57. Indicar la suma de las cifras de $N = \overline{2220c}_{(4)}$ expresado en base 12.

Resolución:

Se tiene: $N = \overline{2220c}_{(4)} \Rightarrow B(12)$

Descomponiendo polinómicamente:

$N = 2 \times 4^4 + 2 \times 4^3 + 2 \times 4^2 + c \Rightarrow N = 672 + c$

Divisiones sucesivas:

$672 + c \;|\; 12$ → cociente 56, residuo c; $56 \;|\; 12$ → cociente 4, residuo 8

$N = 48c_{(12)}$

$\therefore$ Suma de cifras: $8 + 4 + c = 12 + c$

58. Si: $1331_{(n+1)} = 1000_{(6)}$, hallar "n".

Resolución:

Se tiene: $1331_{(n+1)} = 1000_{(6)}$

$n + 1 = x \Rightarrow 1331_{(x)} = 1000_{(6)}$

Descomponiendo polinómicamente:

$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 6^3 \Rightarrow (x+1)^3 = 6^3$

$x + 1 = 6 \Rightarrow x = 5$

Reemplazando:

$n + 1 = 5 \quad \therefore n = 4$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2001 - II)

Sean x, z, N enteros no negativos. Hallar la cantidad de números N tales que $10 < N < 35$, que no se pueden expresar en la forma $N = 5x + 8z$.

A) 1 B) 3 C) 7
D) 5 E) 9

Resolución:

Encontremos todos los números N de la forma $5x + 8z$, comprendidos entre 10 y 35:

$10 < 5x + 8z < 35$

x	z		N
0	2	⇒	16
0	3	⇒	24
0	4	⇒	32
1	1	⇒	13
1	2	⇒	21
1	3	⇒	29
2	1	⇒	18
2	2	⇒	26
2	3	⇒	34
3	0	⇒	15
3	1	⇒	23
3	2	⇒	31
4	0	⇒	20
4	1	⇒	28
5	0	⇒	25
5	1	⇒	33
6	0	⇒	30

17 números

Entre 10 y 35 hay 24 números, entonces la cantidad de números que no se pueden expresar de la forma de $5x + 8z$ es: $24 - 17 = 7$

Clave: C

PROBLEMA 2 (UNI 2003 - I)

La cantidad de cifras de los números A, B y C son números consecutivos. Si el producto $A^4\,B^3$ y C^2 tiene por lo menos 125 cifras, entonces la cantidad máxima de cifras que puede tener dicho producto es:

A) 130 B) 131 C) 132 D) 133 E) 134

Resolución:

Del problema:

$10^{n-1} \leq A < 10^n$

$10^n \leq B < 10^{n+1}$

$10^{n+1} \leq C < 10^{n+2}$

Luego:

$10^{4n-4} \leq A^4 < 10^{4n}$

$10^{3n} \leq B^3 < 10^{3n+3}$

$10^{2n+2} \leq C^2 < 10^{2n+4}$

Multiplicando: $10^{9n-2} \leq A^4B^3C^2 < 10^{9n+7}$

Cantidad mínima de cifras:

$(9n - 2) + 1 = 125 \Rightarrow n = 14$

Cantidad máxima de cifras: $9(14) + 7 = 133$

Clave: D

PROBLEMA 3 (UNI 2007 - II)

¿Cuántos números de tres cifras tienen la raíz cuadrada y la raíz cúbica con el mismo residuo no nulo?

A) 52 B) 53 C) 54 D) 55 E) 56

Resolución:

N: n.° de 3 cifras

Del enunciado se deduce:

$N = k^6 + r$, de donde k solo puede ser 3

$N = 3^6 + r \Rightarrow N = 27^2 + r = 9^3 + r$

Acotando:

$27^2 < 27^2 + r < 28^2 \wedge 9^3 < 9^3 + r < 10^3$

$0 < r < 55 \wedge 0 < r < 271$

$\Rightarrow r = \{1; 2; 3; \ldots; 54\}$

$\therefore$ Existen 54 números

Clave: C

PROBLEMA 4 (UNI 2008 - I)

Halle el número de elementos de la clase de equivalencia de 7/11, de modo que el numerador tenga 3 cifras y el denominador 4.

A) 50 B) 51 C) 52 D) 53 E) 54

Resolución:

$\left[\frac{7}{11}\right] = \left\{\frac{7}{11}; \frac{14}{22}; \frac{21}{33}; \ldots; \frac{7k}{11k}\right\}$

7k: n.° de 3 cifras

$\Rightarrow 100 \leq 7k < 1000 \Rightarrow 14{,}2 \leq k < 142{,}8$ ...(1)

11k: n.° de 4 cifras

$\Rightarrow 1000 \leq 11k < 10\,000 \Rightarrow 90{,}9 \leq k < 909{,}09$ ...(2)

De (1) y (2): k = {91; 92; 93; ...; 142}

Son: 142 − 90 = 52 elementos

Clave: C

PROBLEMA 5 (UNI 2011 - I)

¿Cuántos números enteros menores que 100 existen que son cubos perfectos y que al ser multiplicados por 3 se convierten en cuadrados perfectos?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Resolución:

Si N = cubo perfecto: $K^3 < 100$

K = {1; 2; 3; 4} en $\mathbb{N}^{(+)}$ = {1; 2; 3; ...}

Además: $\underbrace{3N}_{\text{cuadrado perfecto}} = 3q^3 = \{3; 24; (81); 192\}$

$\Rightarrow N = 3^3 = 27$

∴ Existe una sola solución en $\mathbb{N}^{(+)}$

Clave: A

PROBLEMA 6 (UNI 2013 - II)

Determine cuántos pares de números naturales de dos dígitos cumplen con que su diferencia sea 50.

(Obs. considere que el par {x; y} es igual al par {y; x})

A) 10 B) 30 C) 40 D) 49 E) 50

Resolución:

Sabiendo que: {x; y} ≡ {y, x}

Además:

$\overline{ab} - \overline{mn} = 50$

60	10	⇒ {60; 10}	Hay 40 pares de números naturales
61	11	⇒ {61; 11}	
62	12	⇒ {62; 12}	
⋮	⋮	⋮	
99	49	⇒ {99; 49}	

Clave: C

PROBLEMA 7 (UNI 2014 - I)

Determine la cantidad de números de cuatro cifras en base 8, que contienen al número tres

A) 1520 B) 1522 C) 1524
D) 1526 E) 1528

Resolución:

Total de números de 4 cifras de la base 8

a	b	c	$d_{(8)}$
1	0	0	0
2	1	1	1
3	2	2	2
⋮	⋮	⋮	⋮
7	7	7	7

$\underbrace{7 \times 8 \times 8 \times 8}_{3584}$

No contienen la cifra 3

a	b	c	$d_{(8)}$
1	0	0	0
2	1	1	1
3	2	2	2
	3	3	3
	⋮	⋮	⋮
7	7	7	7

$\underbrace{6 \times 7 \times 7 \times 7}_{2058}$

Sí contienen la cifra 3: 3584 − 2058 = 1526

Clave D

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Al escribir la serie: 51; 57; 63; 69; ... ¿cuál es la cifra que ocupa el lugar 300?

A) 3 B) 7 C) 1
D) 9 E) N. A.

2. Hallar el máximo valor que puede tomar el último término de la siguiente PA:

$$\overline{ab}_4;\ \overline{ba}_5;\ \overline{(b+1)(a+1)}_5;\ ...;\ \overline{mn}_{12}$$

A) 26 B) 25 C) 24
D) 23 E) 22

3. ¿Cuántos términos de la siguiente serie de números: 15; 24; 33; 42; .... tienen 3 cifras en base 6?

A) 17 B) 19 C) 20
D) 21 E) N. A.

4. Encontrar el último término de tres cifras (en base decimal) de la siguiente serie: 44_5; 50_6; 51_7; ... Indicar la suma de sus cifras.

A) 24 B) 20 C) 25
D) 27 E) 28

5. Hallar: a + b + n, si los 28 términos de la siguiente serie forman una PA:

$$\overline{aa}_n;\ \overline{a(a+1)}_n;\ \overline{a(a+2)}_n;\ \overline{b0}_n;\ ...;\ 100_n$$

A) 13 B) 27 C) 24
D) 29 E) 31

6. Determinar en base decimal el término central de la siguiente serie:

$$\underbrace{\overline{(a-1)bb}_7;\ \overline{ax2}_7;\ \overline{ax5}_7;\ ...;\ \overline{b55}_7}_{31\text{ términos}}$$

A) 132 B) 222 C) 135
D) 289 E) 177

7. Encontrar el número máximo de términos que tiene la siguiente progresión aritmética:

$$14;\ 23;\ 32;\ ...;\ \overline{abc}$$

Si: a + b + c = 14.

A) 109 B) 105 C) 121
D) 100 E) 96

8. Si los numerales $\overline{ab1}$ y $\overline{ab4}$ son dos términos consecutivos de una PA, además el primer y último términos son 11 y 902, respectivamente. Hallar el número de términos.

A) 296 B) 297 C) 298
D) 299 E) 300

9. En la siguiente sucesión: $13_{(n)}$; $24_{(n+1)}$; $35_{(n+2)}$; ...; se cumple que la diferencia entre el decimoctavo y décimo término es 264. Hallar la suma de las cifras (en base decimal), del término correspondiente al sistema duodecimal.

A) 16 B) 17 C) 18
D) 19 E) 20

10. ¿Cuántos términos de la siguiente serie de números: 14; 22; 30; ... tienen 3 cifras en base 5?

A) 15 B) 10 C) 14
D) 12 E) 13

11. Hallar "m", si la siguiente serie forma una PA:

$$\underbrace{\overline{21m};\ \overline{221};\ ...;\ \overline{10m0}}_{119\text{ términos}}$$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

12. Encontrar el término 41.° de la siguiente serie: 5; 9; 15; 23; ...

A) 1721 B) 1725 C) 1729
D) 1733 E) 1737

13. Hallar el término de lugar $\overline{ba}$ de la siguiente serie en PA: $\overline{a8b}$; $\overline{a93}$; $\overline{b04}$; $\overline{ba5}$; ...

A) 302 B) 303 C) 352
D) 402 E) 403

14. En la siguiente progresión aritmética:

$$\underbrace{\overline{a0b};\ \overline{ac0};\ ...;\ \overline{b0a}}_{73\text{ términos}}$$

hallar: a + b + c

A) 16 B) 15 C) 14
D) 13 E) 12

15. Dada la siguiente serie en PA:

$$\underbrace{\overline{3xy};\ ...;\ \overline{xy8}}_{54\text{ términos}}$$

hallar: x + y

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

16. ¿Cuántos términos tiene la siguiente PA:

$$\overline{ab}_n;\ \overline{ba}_{(n+1)};\ 88_{(n+2)};\ ...;\ \overline{64(n+1)}_9?$$

A) 14 B) 18 C) 23
D) 24 E) 32

17. Si la siguiente progresión aritmética: $\overline{ab6}_7$; $\overline{ax2}_7$; $\overline{ax5}_7$; ... ; $\overline{b35}_7$, tiene 31 términos; determine el primer término en base decimal.

A) 144 B) 141 C) 138
D) 135 E) 132

18. Para escribir los primeros $\overline{2ab}$ números enteros positivos se han empleado $\overline{6ab}$ cifras. ¿Cuántas cifras se emplearán para escribir los primeros $\overline{aba}$ números enteros positivos?

A) 1527 B) 1 548 C) 1493
D) 1475 E) N. A.

19. Un libro solo fue enumerado en una de las páginas de cada hoja. Se arrancan las hojas que terminan en cifra 6, en estas hojas se han empleado 673 cifras. ¿Cuál es el número de hojas, si la última hoja arrancada fue la antepenúltima?

A) 1948 B) 1958 C) 1968
D) 1978 E) N. A.

20. Si el vigésimocuarto término de la siguiente serie en PA: $\overline{ab}$; ...; 83; 90; ..., es 195, hallar: a + b

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

21. Hallar "a + b", si para escribir todos los números enteros consecutivos desde $\overline{1ab}$ hasta $\overline{ab2}$, se han empleado $\overline{1ab1}$ cifras.

A) 9 B) 10 C) 11
D) 13 E) 15

22. En las 100 últimas páginas de un libro se han utilizado 300 cifras de las cuales 120 son 2. ¿Cuántas cifras se empleó al enumerar el libro?

A) 800 B) 789 C) 870
D) 798 E) 720

23. Si queremos escribir la serie natural de los números hasta haber marcado 1412 veces la cifra 7, ¿en qué número debemos detenernos?

A) 4765 B) 4675 C) 3678
D) 4700 E) 4770

24. ¿Cuántas páginas tiene un libro, si al enumerar 20 páginas intermedias, se han empleado 51 cifras y en la enumeración de las restantes se han escrito 288 cifras?

A) 120 B) 133 C) 219
D) 123 E) 149

25. Al enumerar todos los números enteros desde el $\overline{3ba}_7$ hasta el $\overline{ab3}_7$, se emplearon $\overline{ab4}_7$ cifras. Hallar: a + b.

A) 9 B) 13 C) 12
D) 11 E) 10

26. En un sistema de numeración de base par, existen 72 numerales de la forma: $\overline{a(b-2)(2a)b}$. ¿Cuántos numerales de tres cifras, existen en dicha base?

A) 2548 B) 2524 C) 2512
D) 2500 E) 2486

27. ¿Cuántos numerales de 4 cifras existen en base 7, tales que tienen por lo menos dos cifras iguales?

A) 1324 B) 1276 C) 1338
D) 1528 E) N. A.

28. ¿Cuántos números de 4 cifras existen, tal que el producto de sus cuatro cifras resulte un número par?

A) 8375 B) 6225 C) 3400
D) 6475 E) N. A.

29. ¿Cuántos números de 3 cifras tienen exactamente una cifra que pertenece a A = {2; 3; 4; 5}?

A) 378 B) 384 C) 390
D) 396 E) 402

30. ¿En qué sistema de numeración se tienen 66 numerales de la forma $\overline{a(a+b)b}$?

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

31. Hallar el sistema de numeración, en la que existen 330 numerales capicúas de 5 cifras, donde su primera cifra es impar y la suma de sus cifras no extremas es par.

A) 6 B) 7 C) 9
D) 10 E) 11

32. De los numerales de 4 cifras, ¿cuántos tienen por lo menos dos cifras significativas?

A) 246 B) 250 C) 252
D) 236 E) 242

33. ¿Cuántos números impares de 4 cifras diferentes entre sí existen, si su segunda cifra solo puede ser 3; 5 y 9?

A) 540 B) 432 C) 504
D) 840 E) 588

34. ¿Cuántas páginas de un libro se podrán enumerar con el doble número de tipos de imprenta que se utilizan para enumerar un libro de 500 páginas?

A) 962 B) 966 C) 965
D) 964 E) 948

35. ¿Cuántos números de 3 cifras del sistema heptanario utilizan algún 5, pero ningún 6, en su escritura?

A) 60 B) 70 C) 80
D) 90 E) 100

36. ¿Cuántos números de 3 cifras existen en el sistema heptanario, que tengan por lo menos 2 cifras "dos" en su escritura?

A) 18 B) 24 C) 30
D) 21 E) N. A.

37. Hallar "n", sabiendo que en la base 12 existen 6480 numerales de "n" cifras, tales que todas sus cifras son pares.

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

38. En qué sistema de numeración existen 330 numerales capicúas de 5 cifras, tales que empiezan en cifra impar y la suma de sus cifras no extremas termina en cifra par.

A) 6 B) 7 C) 9
D) 10 E) 11

39. ¿Cuántos numerales capicúas de 4 cifras existen en el sistema decimal, de tal modo que sus cifras de orden impar son diferentes y suman 12?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 2

40. ¿Cuántos numerales de tres cifras tienen algún 2 o 5 en su escritura?

A) 321 B) 420 C) 275
D) 545 E) 452

41. ¿Cuántos numerales de la forma:

$\overline{(5-m)\left(\frac{m}{2}\right)(p+5)(7-p)}$ existen en el sistema duodecimal?

A) 18 B) 24 C) 15
D) 56 E) 36

42. En qué sistema de numeración, cuya base es par, existen 72 numerales de la forma: $\overline{mn\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{m}{2}\right)}$

A) 12 B) 22 C) 18
D) 20 E) 6

43. Al escribir la secuencia adjunta que tiene 113 términos, ¿cuántas cifras en total se han utilizado?

$$66^{67};\ 69^{70};\ 72^{73};\ 75^{76};\ ...$$

A) 664 B) 665 C) 650
D) 653 E) 655

44. Se escriben en forma consecutiva los números enteros positivos, uno a continuación del otro, hasta emplear 2226 cifras. ¿Cuál es la última cifra escrita?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

45. En la enumeración de las primeras $\overline{1ab}$ páginas de un libro se han empleado $\overline{3ab}$ cifras. ¿Cuántas páginas tiene el libro, si se han empleado en su enumeración $\overline{3ab1}$ cifras?

A) 1133 B) 1140 C) 1162
D) 891 E) 1161

46. En un libro de 1000 páginas se han empleado 2770 tipos de imprenta; se desea saber a partir de qué página se empezó la enumeración, si las primeras no se enumeraron.

A) 60 B) 63 C) 65
D) 66 E) 67

47. Para enumerar las 22 últimas páginas de un libro, se usaron 71 tipos de imprenta. ¿Cuántos tipos se emplearon en total?

A) 3909 B) 2909 C) 1978
D) 2499 E) N. A.

48. Para escribir los 50 últimos términos de la siguiente secuencia: $100^{\overline{1a}};\ 100^{\overline{2a}};\ 100^{\overline{3a}};\ ...$, se han empleado 328 cifras. Hallar la suma de cifras del exponente del último término.

A) 1a − 1 B) 1a − 2 C) 1a
D) 1a + 1 E) 1a + 2

49. Al escribir la siguiente secuencia:
$1^1;\ 2^2;\ 3^3;\ ...;\ \overline{abc}^{\overline{abc}}$; se han empleado 522 tipos de imprenta. Hallar: a + b + c.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

50. De un libro de 321 hojas se arrancaron cierto número de hojas del principio, observándose que en las páginas restantes se emplearon 1679 tipos de imprenta. ¿Cuántas hojas se arrancaron?

A) 37 B) 39 C) 41
D) 43 E) 45

51. ¿Cuántos números de 3 cifras del sistema decimal utilizan al menos una cifra 2, o al menos una cifra 3 en su escritura?

A) 402 B) 448 C) 450
D) 452 E) 454

52. ¿Cuántos números de la base x de tres cifras, se escriben en la base x + 1 también con tres cifras? (x > 2)

A) $x^3 - x + 1$ B) $x(x^2 - x - 2) - 1$
C) $x(x^3 - x + 1)$ D) $x^2 - x + 1$
E) $x^3 + 1$

53. En cuántas bases se puede considerar la siguiente suma: $\overline{abc}_{(x)} + \overline{2ab2}_{(x)} + \overline{43x}_{(7)}$; considerar a, b y c fijos.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

54. Si: $3^a + 3^b + 3^c = 327$; $a > b > c$; $\overline{cba} = 5^x + 5^y - 5^z$ halle x + y + z

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

55. ¿Cuántos números de la forma $\overline{abc}$, con a, b y c diferentes entre sí existen?, tales que:
a: 1; 2; 3; 4; 5; 6 o 7

b: 1; 3; 5; o 7
c: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 o 8

A) 160 B) 161 C) 167
D) 168 E) 210

56. En el sistema de base nueve, la cantidad de números capicúas de 4 cifras es:

A) 72 B) 74 C) 81
D) 90 E) 160

57. En qué sistema de numeración cuya base es impar, existen 231 números de 3 cifras que terminan en cifra par o comienzan en cifra impar.

A) 13 B) 11 C) 9
D) 5 E) 7

58. En qué sistema de numeración se emplean 2240 cifras para escribir todos los números capicúas de 5 cifras.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

59. Halle un número de tres cifras que sea igual a 12 veces la suma de sus cifras. De como respuesta la suma de las cifras del número.

A) 4 B) 6 C) 8
D) 9 E) 12

60. En el sistema de base cuatro existen 3072 números que se representan con "n" cifras. Entonces "n" es:

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

61. Si: $\overline{abcabc}_{(n)} = \overline{mnppq}_{(7)}$; $n > 5$,
halle: $a + b + c + m + n + p + q$

A) 10 B) 13 C) 15
D) 17 E) 19

62. Sabiendo que $\overline{43ab}_n = \overline{m9}_{n^2}$; con "n" impar. ¿Cuántos valores distintos puede adoptar b?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

63. $\overline{1b}_{\overline{1b}_{\overline{1b}_{\ddots_{\overline{1b}_{(\overline{aa})}}}}}$ ($\overline{aa} + 1$ numerales) $= \overline{(a+1)(a+2)(a+3)}_{a^3} = \overline{a(3a+1)4}_9$

Calcule el valor de (a)(b)

A) 14 B) 12 C) 16 D) 18 E) 10

64. Un número capicúa de 3 cifras de base "k" se escribe con 3 cifras en base 9 donde su primera cifra es mayor que 5 y la última cifra es "k". ¿Cuánto vale la suma de cifras de dicho capicúa?

A) 13 B) 15 C) 18
D) 20 E) 22

65. Sabiendo que $a + b + c = 19$, siendo a y c valores consecutivos y b y c son cifras pares, calcule el valor de $P = \overline{abc}_9 + \overline{ab}_{(c+3)} + \overline{ca}_b$

A) 428 B) 589 C) 672
D) 684 E) 702

66. El número 21200_a, se expresa en base 9 como $\overline{7ac}_9$. De igual modo el número $\overline{4paq}_5$ se expresa en base c como $\overline{aba0}_c$.
Calcule $a + b + c + p + q$ máximo.

A) 12 B) 17 C) 14 D) 15 E) 16

67. Se cumple que:

$\overline{1a}_{\overline{1a}_{\overline{1a}_{\ddots_{\overline{1a}_8}}}}$ (a numerales) $= \overline{(b-1)(b-1)b}$

¿Cuántos numerales de "a" cifras diferentes de la base "b" comienzan en "a"?

A) 20 B) 30 C) 36
D) 60 E) 24

68. El máximo numeral de "a + 1" cifras de la base "a + 1" se expresa en base 5 como $\overline{bcde}_5$. ¿Cuál será la suma de cifras al expresar en base "n + 1" el número $\overline{d(2b)(a+2)(2a+1)}_n$? ($n > 7$)

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

CLAVES

1. A	10. D	19. B	28. A	37. C	46. E	55. D	64. D
2. D	11. B	20. C	29. B	38. E	47. B	56. A	65. E
3. C	12. B	21. D	30. C	39. B	48. A	57. E	66. B
4. A	13. D	22. B	31. E	40. B	49. E	58. C	67. E
5. E	14. E	23. A	32. C	41. E	50. A	59. D	68. A
6. D	15. D	24. E	33. E	42. C	51. D	60. C	
7. B	16. B	25. D	34. D	43. E	52. B	61. C	
8. C	17. E	26. A	35. C	44. D	53. D	62. C	
9. C	18. A	27. C	36. A	45. C	54. B	63. D	

Cuatro operaciones | 04 capítulo

Pierre de Fermat nació el 17 de agosto de 1601 y murió el 12 de enero de 1665. Fue un jurista y matemático francés. Fermat fue junto con René Descartes uno de los principales matemáticos de la primera mitad del siglo XVII.

Descubrió el cálculo diferencial antes que Newton y Leibniz y fue el cofundador de la teoría de probabilidades junto a Blaise Pascal e independientemente de Descartes, descubrió el principio fundamental de la Geometría analítica. Sin embargo, es más conocido por sus aportaciones a la teoría de números, en especial por el conocido como «último teorema de Fermat», que preocupó a los matemáticos durante aproximadamente 350 años, hasta que fue demostrado en 1995 por Andrew Wiles ayudado por Richard Taylor sobre la base del teorema de Shimura-Taniyama.

Cabe destacar que Fermat estudió y analizó las matemáticas en sus tiempos libres, ya que él tenía otra profesión. Hombre erudito y embebido en la cultura clásica grecorromana, era enciclopédico por la amplitud de su bagaje. Hacía anotaciones en las márgenes de los libros que leía, con observaciones y esbozos de demostraciones. No era matemático profesional ni escribía libros. Era de su interés el saber humano de su tiempo.

Actualmente, la mansión del siglo XV donde nació es un museo. La escuela más antigua y prestigiosa de Toulouse se llama Pierre de Fermat y en ella se imparten clases de Ingeniería y Comercio. Está situada entre las diez mejores de Francia para clases preparatorias.

Fuente: Wikipedia

ADICIÓN

La adición o suma es una operación directa que consiste en reunir dos o más cantidades homogéneas, llamadas sumandos, en una sola.

A continuación, veremos algunas operaciones de adición en distintas bases.

Ejemplos:

1. Efectuar: $635_8 + 624_8 + 356_8$

Resolución:

Como la operación está escrita en base 8, interesará formar grupos de 8.
Sumando ordenadamente:

En unidades: $5 + 4 + 6 = 15$
Con 15 unidades formamos (1) grupo de 8 unidades sobran [7], en unidades

En decenas: (1) + 3 + 2 + 5 = 11
Con 11 unidades formamos (1) grupo de 8 unidades sobran [3] en decenas

En centenas: (1) + 6 + 6 + 3 = 16
Con 16 unidades formamos (2) grupos de 8 unidades sobra [0] en centenas.

En unidad de millar: (2) = [2] en unidad de millar

Luego, tenemos:

$$\begin{array}{cccc} ② & ① & ① & \\ & 6 & 3 & 5_8 + \\ & 6 & 2 & 4_8 \\ & 3 & 5 & 6_8 \\ \hline \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{3} & \boxed{7}_8 \end{array}$$

∴ El resultado es: 2037_8

2. Efectuar:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 5_6 + \\ 3 & 0 & 4_6 \\ 5 & 2 & 3_6 \\ \hline \end{array}$$

Resolución:

En base 6, interesa formar grupos de 6 unidades.
Sumando ordenadamente:
En unidades:

$5 + 4 + 3 = 12$ — Con 12 unidades formamos (2) grupos de 6 unidades sobran [0] en unidades

En decenas:

$2 + 1 + 0 + 2 = 5$ — Con 5 unidades no formamos ningún grupo de 6 sobran [5] en decenas

En centenas:

$1 + 3 + 5 = 9$ — Con 9 unidades formamos (1) grupo de 6 unidades sobran [3] en centenas

En unidades de millar: 1
Luego, tenemos:

$$\begin{array}{cccc} ① & & ② & \\ & 1 & 1 & 5_6 + \\ & 3 & 0 & 4_6 \\ & 5 & 2 & 3_6 \\ \hline 1 & 3 & 5 & 0_6 \end{array}$$

∴ El resultado es: 1350_6

Tenga presente de que existen expresiones literales que se resuelven con esta operación.

3. Sabiendo que: $\overline{AA} + \overline{BB} + \overline{CC} = \overline{ABC}$
hallar el valor de cada letra.

Resolución:

Ordenando los sumandos:

$$\begin{array}{r} \overline{AA} + \\ \overline{BB} \\ \overline{CC} \\ \hline \overline{ABC} \end{array}$$

En unidades: A + B + C = ...C
Se cumple: A + B = 10 ...(1)
(llevamos una unidad)

En decenas: (1) + A + B + C = ...B
Se cumple: 1 + A + C = 10
(Llevamos una unidad)
A + C = 9 ...(2)

En centenas: (1) = A ...(3)

⇒ [A = 1]

(3) en (1): 1 + B = 10 ⇒ [B = 9]

(3) en (2): 1 + C = 9 ⇒ [C = 8]

∴ Los valores son: A = 1; B = 9; C = 8

4. Sabiendo que: $\overline{ABC}_9 + \overline{AB}_9 + \overline{BA}_9 = \overline{BAB}_9$
hallar el valor de cada letra.

Resolución:

Ordenando los sumandos:

$$\begin{array}{r} \overline{ABC}_9 + \\ \overline{AB}_9 \\ \overline{BA}_9 \\ \hline \overline{BAB}_9 \end{array}$$

En el 1.^{er} orden: C + B + A = ...B
Se cumple:
C + A = 9 ...(1) (llevamos una unidad)

En el 2.° orden: (1) + B + A + B = ...A
⇒ 1 + 2B = 9 (llevamos una unidad)
⇒ [B = 4] ...(2)

En el 3.^{er} orden: (1) + A = B
⇒ 1 + A = 4 [A = 3]

En (1): $C + 3 = 9 \Rightarrow \boxed{C = 6}$

$\therefore$ Los valores son: $A = 3$; $B = 4$; $C = 6$

SUMA DE TÉRMINOS QUE FORMAN UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Ejemplo:

Efectuar la siguiente suma:

$$S = 13 + 20 + 27 + ... + 160 + 167 + 174$$

Resolución:

Hallamos el número de sumandos:

$$\frac{174 - 13}{7} + 1 = 24 \text{ sumandos}$$

Escribimos la serie en formas ascendente y descendente:

$$S = 13 + 20 + 27 + ... + 160 + 167 + 174$$
$$S = 174 + 167 + 160 + ... + 27 + 20 + 13$$

Sumando miembro a miembro:

$$2S = \underbrace{187 + 187 + 187 + ... + 187 + 187 + 187}_{24 \text{ sumandos}}$$

Luego: $S = \left(\frac{187}{2}\right)(24)$

- $\left(\frac{187}{2}\right)$ → Semisuma del primer y último término
- (24) → n.° de sumandos

Se deduce que la suma de términos que forma una progresión aritmética está dada por:

$$\boxed{\text{Suma de términos de una PA} = \left(\frac{\text{primer término} + \text{primer término}}{}\right)\left(\text{Número de términos}\right)}$$

Ejemplos:

1. Efectuar: $S = 23 + 31 + 39 + ... + 295$

   Resolución:

   Los sumandos forman una PA, se tiene:

   - 1.^er término = 23
   - Último término = 295
   - n.° de términos $= \frac{295 - 23}{8} + 1 = 35$

   Hallamos la suma pedida: $S = \left(\frac{23 + 295}{2}\right)35 = 5565$

2. Efectuar: $S = \underbrace{10 + 23 + 36 + ...}_{48 \text{ sumandos}}$

   Resolución:

   Hallamos el último término de la PA:

   $\frac{U - 10}{13} + 1 = 48 \Rightarrow U = 621$

   Ahora, hallamos la suma de los términos:

   $S = \left(\frac{10 + 621}{2}\right)48 = 15\,144 \quad \therefore S = 15\,144$

3. Efectuar: $S = \underbrace{8 + 10 + 17 + 20 + 26 + 30 + ...}_{71 \text{ sumandos}}$

   Resolución:

   En la serie dada, se tienen dos PA:

   $S = \underbrace{(8) + 10 + (17) + 20 + (26) + 30 + ...}_{71 \text{ sumandos}}$

   Primera serie: $S_1 = \underbrace{8 + 17 + 26 + ...}_{36 \text{ sumandos}}$

   Su último término: $\frac{U_1 - 8}{9} + 1 = 36 \Rightarrow U_1 = 323$

   La suma: $S_1 = \left(\frac{8 + 323}{2}\right)36 = 5958$

   Segunda serie: $S_2 = \underbrace{10 + 20 + 30 + ...}_{35 \text{ sumandos}}$

   Su último término: $U_2 = 350$

   La suma: $S_2 = \left(\frac{10 + 350}{2}\right)35 = 6300$

   Luego, la suma total es:

   $S = S_1 + S_2 = 5958 + 6300 = 12\,258$

   $\therefore S = 12\,258$

SUMAS NOTABLES

Son expresiones que simplifican enormemente algunas operaciones.

Suma de los "n" primeros números enteros positivos:

$$\boxed{1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n + 1)}{2}}$$

Como una sumatoria: $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \left(\frac{n(n + 1)}{2}\right)}$

Suma de los cuadrados de los "n" primeros números enteros positivos:

$$\boxed{1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}}$$

Como una sumatoria: $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}}$

Suma de los cubos de los "n" primeros números enteros positivos:

$$\boxed{1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n + 1)}{2}\right]^2}$$

Como una sumatoria: $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n + 1)}{2}\right]^2}$

Ejemplos:

1. Efectuar: $S = 3 + 12 + 27 + ... + 1200$

Resolución:

Factorizando el 3: $S = 3(1 + 4 + 9 + ... + 400)$

En forma equivalente:

$$S = 3(\underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 20^2}) $$

$$S = 3\left(\frac{20 \times 21 \times 41}{6}\right) 8610$$

2. Efectuar: $N = 1 \times 49 + 2 \times 48 + 3 \times 47 + ... + 25 \times 25$

Resolución:

En cada sumando, la suma de los factores es 50.
$(1 + 49 = 2 + 48 = 3 + 47 = ... = 25 + 25 = 50)$

Escribimos el segundo factor de cada término en función del primero:

$N = 1(50 - 1) + 2(50 - 2) + 3(50 - 3) + ... + 25(50 - 25)$

Efectuando adecuadamente:

$N = (1 \times 50 - 1^2) + (2 \times 50 - 2^2) + (3 \times 50 - 3^2) + ... + (25 \times 50 - 25^2)$

Agrupando convenientemente:

$N = 50(1 + 2 + 3 + ... + 25) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 25^2)$

$$N = 50\left(\frac{25 \times 26}{2}\right) - \frac{25 \times 26 \times 51}{6}$$

$N = 50 \times 325 - 5525 = 10\ 725$

$\therefore N = 10\ 725$

3. Efectuar: $A = \sum_{k=1}^{30}(2k^2 - 5k + 6)$

Resolución:

Aplicación de propiedad distributiva:

$$A = 2\sum_{k=1}^{30}2k^2 - \sum_{k=1}^{30}5k + \sum_{k=1}^{30}6$$

$$A = 2\sum_{k=1}^{30}k^2 - 5\sum_{k=1}^{30}k + \sum_{k=1}^{30}6$$

Reemplazando:

$$A = 2\left(\frac{30 \times 31 \times 61}{6}\right) - 5\left(\frac{30 \times 31}{2}\right) + 6 \times 30$$

$\therefore A = 111\ 315$

4. Si el enésimo término de una serie es: $a_n = n(4n - 3)$, hallar la suma de los 25 primeros términos.

Resolución:

La suma de sus primeros 25 términos será:

$$T = \sum_{n=1}^{25} n(4n - 3) = \sum_{n=1}^{25}(4n^2 - 3n)$$

Propiedad distributiva: $T = 4\sum_{n=1}^{25}n^2 - 3\sum_{n=1}^{25}n$

Reemplazando:

$$T = 4\left(\frac{25 \times 26 \times 51}{6}\right) - 3\left(\frac{25 \times 26}{2}\right) = 21\ 125$$

$\therefore T = 21\ 125$

SUSTRACCIÓN

Es una operación inversa a la adición que, dadas dos cantidades llamadas Minuendo y Sustraendo, consiste en poder encontrar otra cantidad llamada Diferencia, tal que sumada con el sustraendo reproduzca el minuendo.

Términos: M: Minuendo; S: Sustraendo; D: Diferencia

Representación:

$$M - S = D \quad \vee \quad \begin{array}{r} M - \\ \underline{S} \\ D \end{array}$$

Observación

Algunas expresiones que suelen usarse son las siguientes:

- De A restar B: $A - B$
- Restar B de A: $A - B$
- A excede a B: $A - B$

Propiedades de la sustracción

La suma de los tres términos de una sustracción, siempre es igual al doble del minuendo:

$$M + \underbrace{S + D}_{M} = 2M$$

Para todo número de tres cifras (no capicúa) se cumple: "Al restarle el número que resulta de invertir el orden de sus cifras, se obtiene una diferencia tal que en el sistema decimal su cifra de decenas es 9 y sus cifras de unidades y centenas también suman 9".

En base decimal: $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{pqr}$

Tal que: $\boxed{q = 9}$ y $\boxed{p + r = 9}$

Además, si al resultado obtenido se le suma el número que resulta de invertir el orden de sus cifras, en el sistema decimal, siempre resulta 1089.

Es decir: $\overline{pqr} + \overline{rqp} = 1089$

Ejemplos:

1. Si de 743 restamos 347, tenemos:

$743 - 347 = 396$

Además: $396 + 693 = 1089$

Se deduce la propiedad en base "n": $\overline{abc}_n - \overline{cba}_n = \overline{xyz}_n$

Tal que: $\boxed{y = n - 1}$ y $\boxed{x + z = n - 1}$

Además: $\overline{xyz}_n + \overline{zyx}_n = \overline{10(n-2)(n-1)}_n$

2. Al restar 245_8 de 542_8; se tiene: $542_8 - 245_8 = 275_8$

Además: $275_8 + 572_8 = 1067_8$

3. De la siguiente operación:

$\overline{(p+4)(q-2)(r-1)}_9 - \overline{(p-1)(q)(r+2)}_9 = \overline{abc}_9$

hallar los valores de a; b y c.

Resolución:

En base "n", al prestar una unidad a la cifra de orden inmediato inferior, será "n" unidades más, mientras que la primera disminuye en una unidad.

Arreglando el minuendo: (+9)

Número original: $\overline{(p+4)(q-2)(r-1)}_9 -$

Modificando la última cifra: (9) $\overline{(p+4)(q-3)(r+8)}_9$

Modificando la penúltima cifra: $\overline{(p+3)(q+6)(r+8)}_9$

Luego, al efectuar:

$$\begin{array}{r} \overline{(p+3)(q+6)(r+8)}_9 - \\ \overline{(p-1)\quad(q)\quad(r+2)}_9 \\ \hline \underbrace{(p+3-p+1)}_{a}\underbrace{(q+6-q)}_{b}\underbrace{(r+8-r-2)}_{c}{}_9 \end{array}$$

$\therefore\ a = 4;\ b = 6;\ c = 6$

4. Sabiendo que: $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{mnp}$
hallar: $m + n + p$.

Resolución:

De: $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{mnp}$

Por propiedad: $n = 9$ y $m + p = 9$

$\therefore\ m + n + p = 18$

5. La suma de los tres términos de una sustracción es 792. Si el sustraendo es 4/9 menos del minuendo, hallar la diferencia.

Resolución:

Por dato: $\underbrace{M + S + D}_{} = 792$

Por propiedad: $2M = 792 \Rightarrow M = 396$

Hallamos el sustraendo: $S = 396 - \left(\frac{4}{9}\right)396 = 220$

Hallamos la diferencia: $D = 396 - 220 = 176$

$\therefore\ D = 176$

Complemento aritmético

El complemento aritmético (CA) de un número natural, son las unidades que le faltan a dicho número, para que sea igual a la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene el número.

$$CA(\underbrace{\overline{ab\ldots c}}_{\text{"n" cifras}}) = \underbrace{100\ldots00}_{\text{"n" ceros}} - \underbrace{\overline{ab\ldots c}}_{\text{"n" cifras}}$$

Ejemplo:

$CA(4726) = 10\,000 - 4726 = 5274$

$CA(470\,500) = 1\,000\,000 - 470\,500 = 529\,500$

$CA(427_9) = 1000_9 - 427_9 = 462_9$

Método práctico. En forma práctica, el CA de un numeral, escrito en base "n", consiste en restar de "n" a la última cifra significativa, mientras que a las demás cifras de orden superior se restan de "n – 1".

Ejemplo:

Calcular el CA de los siguientes numerales:

a) 72 472 b) 4 635 000
c) 4123_7 d) 30620000_8

Resolución:

a) Si el numeral está escrito en base decimal, se restará de 10 la última cifra significativa, mientras que las demás cifras de orden superior, se restarán de 9.

$$\begin{array}{l} \ \ \ \ \ \ \ \ 9\ \ 9\ \ 9\ \ 9\ \ 10 \\ CA(7\ \ 2\ \ 4\ \ 7\ \ 2) = 27\,528 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l} \ \ \ \ \ \ \ \ 9\ \ 9\ \ 9\ \ 10 \\ CA(4\ \ 6\ \ 3\ \ 5\ \ 0\ \ 0\ \ 0) = 5\,365\,000 \end{array}$$

Observaciones

La última cifra significativa se resta de 10; las demás cifras, de orden superior, se restan, de 9, y al resultado le agregamos igual cantidad de ceros del número original, el resultado se completa con igual cantidad de cifras cero.

c) En el sistema heptanario, la última cifra significativa se restará de 7 y las demás cifras (de orden superior) se restarán de 6.

$$\begin{array}{l} \ \ \ \ \ \ \ \ 6\ \ 6\ \ 6\ \ 7 \\ CA(4\ \ 1\ \ 2\ \ 3_7) = 2\ \ 5\ \ 4\ \ 4_7 \end{array}$$

d) En el sistema octanario, la última cifra significativa se restará de 8, y sus demás cifras (de orden superior) se restará de 7. El resultado se completa con igual cantidad de cifras ceros del numeral.

$$\begin{array}{l} \ \ \ \ \ \ \ \ 7\ 7\ 7\ 8 \\ CA(3\ 0\ 6\ 2\ 0'0\ 0\ 0\ {}_8) = 47160000_8 \end{array}$$

Nota

Para la resolución de los problemas de CA, se recomienda aplicar primero la regla práctica y luego la definición.

Ejemplo:

Encontrar el numeral de la forma $\overline{abcd}$, sabiendo que su CA es igual a la suma de sus cifras.

Resolución:

Por dato: $CA(\overline{abcd}) = a + b + c + d$. Pero, el valor máximo de $(a + b + c + d)$ es 36, es decir que $(a + b + c + d)$ se escribirá a lo más con dos cifras.

Luego, tenemos: $CA(\overline{abcd}) = \overline{xy}$

Aplicando la regla práctica:

$$\begin{array}{l} \ \ \ \ \ \ \ \ 9\,9\,9\,10 \\ CA(\overline{abcd}) = \underbrace{(9-a)}_{0}\underbrace{(9-b)}_{0}\underbrace{(9-c)}_{x}\underbrace{(10-d)}_{y} = \overline{xy} \end{array}$$

(Las dos primeras cifras del resultado son ceros).

$\Rightarrow a = b;\ b = 9$

Se cumple: $CA(\overline{99cd}) = 9 + 9 + c + d$

Usando la definición: $10\,000 - \overline{99cd} = 18 + c + d$

Descomponiendo polinómicamente:

$10\,000 - 9900 - 10(c) - d = 18 + c + d$

Reduciendo: $82 = 11(c) + 2(d)$

$\qquad\qquad\quad\ \downarrow \qquad \downarrow$

$\qquad\qquad\quad\ 6 \qquad 8$

$\Rightarrow c = 6;\ d = 8 \quad \therefore$ El numeral es: 9968

MULTIPLICACIÓN

La multiplicación es una operación directa, que consiste en repetir como sumando un número llamado multiplicando, tantas veces como lo indica otro número llamado multiplicador y así conseguir un resultado llamado producto.

Términos:

Multiplicando: a Multiplicador: b Producto: P

$$P = a \times b = \underbrace{(a + a + \ldots + a + a)}_{\text{"b" veces}}$$

Ejemplo:

$$3 \times 5 = \underbrace{(3 + 3 + 3 + 3 + 3)}_{5 \text{ veces}} = 15$$

$$5 \times 3 = \underbrace{(5 + 5 + 5)}_{3 \text{ veces}} = 15$$

A los términos de la multiplicación se les conoce también como factores del producto.

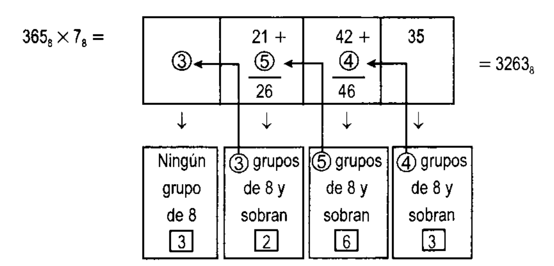
Multiplicación en otra base. Efectuar: $365_8 \times 47_8$

Resolución:

Para multiplicar en base 8, se multiplica como si fuera base decimal y enseguida se forman grupos de 8.

En el resultado se escriben las unidades que sobran y los grupos formados se llevan al siguiente orden:

Analizamos el primer producto parcial:



Analizamos el segundo producto parcial:

$365_8 \times 4_8 =$

①	12 + ③ = 15	24 + ② = 26	20	$= 1724_8$
↓	↓	↓	↓	
Ningún grupo de 8 y sobran 7	① grupo de 8 y sobran 7	③ grupos de 8 y sobran 7	② grupos de 8 y sobran 4	

Ordenamos los productos parciales y sumamos en base 8.

		3	6	5_8	×
		4	7_8		
	3	2	6	3_8	
1	7	2	4_8		
2	2	5	2	3_8	

$\therefore$ Se obtiene: 22523_8

Cantidad de cifras posibles de un producto

La cantidad de cifras posibles con las que puede contar un producto, dependerá de la cantidad de cifras de sus factores.

Tenga presente que la cantidad de cifras que tiene un numeral se puede delimitar con las potencias de 10.

Por ejemplo:

Si ei número A, tiene 2 cifras: $10 \le A < 10^2$

Si el número B, tiene 3 cifras: $10^2 \le B < 10^3$

Si el número C, tiene 4 cifras: $10^3 \le C < 10^4$

En general, si N tiene "n" cifras: $10^{n-1} \le N < 10^n$

Ejemplos:

1. Cuántas cifras puede tener P, si: $P = (A^2)(B^3)$. Además, A y B tienen 5 y 6 cifras, respectivamente.

   Resolución:

   Si: A tiene **5** cifras, se cumple: $10^4 \le A < 10^5$

   Luego A^2: $10^8 \le A^2 < 10^{10}$ ...(1)

   Si: B tiene 6 cifras, se cumple: $10^5 \le B < 10^6$

   Luego B^3: $10^{15} \le B^3 < 10^{18}$ ...(2)

   Multiplicando (1) y (2) miembro a miembro:

   $10^8 \times 10^{15} \le (A^2)(B^3) < 10^{10} \times 10^{18}$

   $10^{23} \le \quad P \quad < 10^{28}$

   Entonces, P puede tener de 24 a 28 cifras.

2. Hallar la mínima y máxima cantidad de cifras que puede tener N, si: $N = \dfrac{A^4T^2}{Y^3}$. Además A, T e Y tienen 8; 7 y 4 cifras, respectivamente.

   Resolución:

   Si A tiene 8 cifras, se cumple: $10^7 \le A < 10^8$

   Luego A^4:

   $10^{28} \le A^4 < 10^{32}$ ...(1)

   Si T tiene 7 cifras, se cumple: $10^6 \le T < 10^7$

   Luego T^2:

   $10^{12} \le T^2 < 10^{14}$ ...(2)

   Si: Y tiene 4 cifras, se cumple: $10^3 \le Y < 10^4$

   Luego Y^3: $10^9 \le Y^3 < 10^{12}$

   Tomando su inversa:

   $\dfrac{1}{10^{12}} \le \dfrac{1}{Y^3} \le \dfrac{1}{10^9}$ ...(3)

   Multiplicando (1) ; (2) y (3) miembro a miembro:

   $$\frac{10^{28} \times 10^{12}}{10^{12}} \le \frac{A^4 \times T^2}{Y^3} \le \frac{10^{32} \times 10^{14}}{10^9}$$

   $$10^{28} \le N < 10^{37}$$

   $\therefore$ N puede tener de 29 a 37 cifras.

Criterio de la última cifra de un producto

Mediante este criterio, es posible averiguar la última cifra de un producto. Es suficiente conocer la última cifra de cada uno de los factores, los cuales se multiplican tomándose la última cifra del resultado.

Ejemplos:

1 Averiguar la última cifra del siguiente producto:
$P = 57\,294 \times 8057 \times 7983 \times 1479$

Resolución:

Considerando la última cifra de cada factor:

$P = (___4)(___7)(___3)(___9) = ___6$

Multiplicamos las últimas cifras: $4 \times 7 \times 3 \times 9 = 75$⑥

∴ La última cifra de P es 6.

2. ¿En qué cifra terminará el resultado de multiplicar 347; 146 veces?

Resolución:

Debemos efectuar: $P = \underbrace{347 \times 347 \times ... \times 347}_{146 \text{ factores}}$

Abreviando: $P = 347^{146} = (___7)^{146} = ____7^{146}$

Analizamos la última cifra de las potencias de 7.

$7^1 = ...7 \quad 7^2 = ...9 \quad 7^3 = ...3 \quad 7^4 = ...1$

$7^5 = ...7 \quad 7^6 = ...9 \quad 7^7 = ...3 \quad 7^8 = ...1$ etc.

Vemos que se obtienen 4 resultados diferentes.

Luego, los exponentes al ser expresados con respecto al módulo 4, tenemos:

$7^{\overset{o}{4}+1} = ...7 \qquad 7^{\overset{o}{4}+2} = ...9$

$7^{\overset{o}{4}+3} = ...3 \qquad 7^{\overset{o}{4}} = ...1$

Ahora, expresamos el exponente (146) con respecto al módulo 4: $146 = \overset{o}{4} + 2$

Reemplazando: $(___7)^{146} = ___7^{\overset{o}{4}+2} = ___9$

∴ 347^{146} terminará en cifra 9.

DIVISIÓN

La división es una operación inversa a la multiplicación, que consiste en conocer dos cantidades llamadas Dividendo y Divisor para encontrar otra cantidad denominada Cociente, tal que multiplicada por el divisor, reproduzca al dividendo.

Términos: D: Dividendo; d: Divisor; q: Cociente

Condición: $\boxed{D = d \times q}$

Nota

En una división, el divisor es diferente de cero.

Clases de división entera

Si los términos de una división son números enteros, esta puede ser de dos clases: división exacta o división inexacta.

División exacta. Se dice que una división es exacta, cuando el cociente exacto es un número entero.

Ejemplo:

Hallar el cociente exacto de dividir 1536 por 96.

Resolución:

Al efectuar:

```
1536 |96
 --   16
```

Vemos que el cociente exacto es 16 y como es un número entero, se trata de una división exacta.

División inexacta. Se dice que una división es inexacta, cuando el cociente exacto no es un número entero.

Ejemplo:

Hallar el cociente exacto de dividir 1376 por 40.

Resolución:

Al efectuar:

```
1376 |40
 --   34,4
```

Vemos que el cociente exacto es 34,4 y como no es un número entero, se trata de una división inexacta.

En estos casos, el cociente exacto que no es un número entero, se aproxima a los números enteros más cercanos del cociente encontrado.

Es decir, 34,4 se aproxima a los números enteros 34 y 35.

Clases de división inexacta

Una división inexacta puede ser expresada de dos maneras: por defecto o por exceso.

Por defecto. La división inexacta es por defecto, cuando el cociente entero multiplicado por el divisor resulta ser menor que el dividendo.

Ejemplo:

Efectuar por defecto la siguiente división: 1376 entre 40.

Resolución:

Al efectuar:

```
1376 |40
1360  34
 —16
```

Vemos que el cociente por defecto es 34 y su respectivo residuo por defecto es 16.

Comprobando la operación: $1376 = 40 \times 34 + 16$

En general:

```
D |d
r  q
```

$\Rightarrow \boxed{D = d \times q + r}$

Donde: q: Cociente por defecto
r: Residuo por defecto

Por exceso. La división es por exceso cuando el cociente entero multiplicado por el divisor resulta mayor que el dividendo.

Ejemplo:

Efectuar por exceso la siguiente división: 1376 entre 40.

Resolución:

Al efectuar:

```
1376 |40
1400  35
 -24
```

Vemos que el cociente por exceso es 35 y su respectivo residuo por exceso es 24.

Comprobando la operación: $1376 = 40 \times 35 - 24$

En general:

```
D  |d
r'  q + 1
```

$\Rightarrow \boxed{D = d(q + 1) + r}$

Donde: $q + 1$: cociente por exceso
r': residuo por exceso

Observaciones

I. De las divisiones inexactas, ambos residuos son menores que el divisor.
Es decir: $16 < 40$ y $24 < 40$

II. La suma de ambos residuos, por defecto y por exceso, es igual al divisor de la división.
Es decir: $16 + 24 = 40$

Propiedades de los residuos. En toda división inexacta, se cumple:

I. El residuo de una división inexacta siempre es menor que el divisor.

$\boxed{r < d}$ y $\boxed{r' < d}$

II. La suma de los residuos, por defecto y por exceso, siempre es igual al divisor.

$\boxed{r + r' = d}$

III. El residuo máximo es una unidad menor que el divisor.

$\boxed{r_{máx} = d - 1}$

Ejemplo:

1. Hallar el mayor número natural, tal que al dividirse por 38 deja como residuo al triple de su cociente respectivo.

Resolución:

Sea N el mayor número natural, tal que:

```
N       |38
r = 3q   q
```

$\Rightarrow N = 38q + 3q = 41q$ ....(1)

Por propiedad: $r < d$

Es decir: $3q < 38$

$\Rightarrow q < 12\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow q_{máx} = 12$

En (1): $N = 41 \times 12 = 492$

$\therefore$ El mayor número natural es 492

2. En una división inexacta, al residuo le faltan 16 unidades para que sea máximo y le sobran 13 unidades para que sea mínimo. Hallar el dividendo, si el cociente es 48.

Resolución:

Faltan 16 unidades para el residuo máximo:

$r + 16 = r_{máx} = d - 1$

$\Rightarrow r + 16 = r + r' - 1 \Rightarrow \boxed{r' = 17}$

Sobran 13 unidades para el residuo mínimo:

$r - 13 = r_{mín} = 1 \Rightarrow \boxed{r = 14}$

Hallamos el divisor: $d = 17 + 14 = 31$

Pero, el cociente: $q = 48$

Luego, el dividendo será:

$D = 31 \times 48 + 14 = 1502$

$\therefore$ El dividendo es 1502

Alteraciones en la división entera. En una división inexacta al agregar o quitar ciertas unidades al dividendo, el cociente aumenta o disminuye respectivamente.

Ejemplo:

Si dividimos 1632 por 45, ¿cuántas unidades como mínimo y como máximo se deben agregar al dividendo para que el cociente aumente en 3 unidades?

Resolución:

Realizando la división:

```
1632 |45
1620  36
  12
```

Tenemos: $q = 36$; $r = 12$ y $r' = 45 - 12 = 33$

Para que el cociente aumente 3 unidades seguimos los siguientes pasos:

1.° Al dividendo le sumamos el residuo por exceso (33) y el cociente aumentará una unidad (37).

2.° Al nuevo dividendo le sumamos el divisor (45) y el cociente aumenta otra unidad (38).

3.° Al nuevo dividendo le volvemos a sumar el divisor (45) y el cociente aumenta nuevamente otra unidad (39).

4.° Finalmente, le sumamos el residuo máximo ($45 - 1 = 44$) y el cociente deja de aumentar (39).

De los resultados obtenidos, se deduce la máxima y mínima cantidad que se le debe agregar al dividendo para que el cociente aumente 3 unidades.

Es decir: Mínima cantidad: $33 + 45 + 45 = 123$;
Máxima cantidad: $33 + 45 + 45 + 44 = 167$

En general: si queremos que el cociente "q" de dividir "D" por "d" aumente "n" unidades se agregará al dividendo como:

Mínimo: $r' + \underbrace{d + d + ... + d}_{(n-1)\text{ veces}} = r' + d(n - 1)$

Máximo: $r' + \underbrace{d + d + ... + d}_{(n-1)\text{ veces}} + (d - 1) = r' + (d)(n) - 1$

Ejemplo:

Encontrar la mínima y máxima cantidad que se le debe agregar a 3725, de manera que el cociente de dividirlo por 78 aumente 6 unidades.

Resolución:

Hallamos los términos iniciales:

$$\begin{array}{r|l} 3725 & 78 \\ \cline{2-2} 3666 & 47 \\ 59 & \end{array}$$

De donde: $q = 47$; $r = 59$; $r' = 19$

Para que el cociente aumente 6 unidades debemos agregar al dividendo como:

Mínimo: $19 + 78 \times 5 = 409$

Máximo: $19 + 78 \times 6 - 1 = 486$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Encontrar las cuatro últimas cifras del resultado de efectuar la siguiente suma:

$S = 7 + 77 + 777 + ...$ (60 sumandos)

Resolución:

Ordenando los sumandos. Para encontrar cuatro últimas cifras, sumamos las cuatro últimas columnas, respetando el orden correspondiente.

$$60 \text{ sumandos} \left\{ \begin{array}{r} 777...7777 \; + \\ 77...7777 \\ .... \\ 7777 \\ 777 \\ 77 \\ 7 \\ \hline \end{array} \right.$$

4 2 0	Unidades: $7 \times 60 = 420$
4 1 3	Decenas: $7 \times 59 = 413$
4 0 6	Centenas: $7 \times 58 = 406$
3 9 9	U. de millar: $7 \times 57 = 399$
4 1 5 0	

∴ Las cuatro últimas cifras son 4150

2. Efectuar: $S = \underbrace{9 + 99 + 999 + ...}_{\text{"n" sumandos}}$

Resolución:

Por dato, debemos efectuar:

$S = 9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{99 ... 99}_{\text{"n" cifras}}$

Escribiendo los "n" sumandos en forma equivalente:

$S = (10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + ... + (10^n - 1)$

Agrupando adecuadamente:

$S = (10 + 10^2 + 10^3 + ... + 10^n) - \underbrace{(1 + 1 + ... + 1)}_{\text{"n" sumandos}}$

Sumamos y restamos la unidad:

$S = (1 + 10 + 10^2 + 10^3 + ... + 10^n) - 1 - 1(n)$

$$S = \frac{10^{n+1} - 1}{10 - 1} - 1 - n$$

Efectuando: $S = \dfrac{10^{n+1} - 9n - 10}{9}$

∴ La suma es: $\dfrac{10^{n+1} - 9n - 10}{9}$

3. Hallar el valor de: $a + b$, sabiendo que:

$1 \times 5 + 2 \times 6 + 3 \times 7 + ... + a \times b = 3710$

Resolución:

El segundo factor de cada término excede al primero en 4 unidades. Luego escribimos la serie en forma equivalente.

$1(1 + 4) + 2(2 + 4) + 3(3 + 4) + ... + a(a + 4) = 3710$

Efectuando:

$(1^2 + 1 \times 4) + (2^2 + 2 \times 4) + (3^2 + 3 \times 4) + ... + (a^2 + a \times 4) = 3710$

Ordenando los términos:

$(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + a^2) + 4(1 + 2 + 3 + ... + a) = 3710$

$$\frac{a(a + 1)(2a + 1)}{6} + 4\left[\frac{a(a + 1)}{2}\right] = 3710$$

Efectuando:

$a(a + 1)(2a + 13) = 6 \times 3710 = 20 \times 21 \times 53$

$\Rightarrow a = 20$

Pero: $b = a + 4 \Rightarrow b = 24 \quad \therefore a + b = 44$

4. Hallar la suma de los $\overline{2a}$ términos de la siguiente sucesión: $\overline{a24}$; $\overline{a26}$; $\overline{a28}$; ....; $\overline{a78}$

Resolución:

Hallamos el valor de "a":

$$\overline{2a} = \frac{\overline{a78} - \overline{a22}}{2} = \frac{56}{2} = 28 \Rightarrow a = 8$$

Hallamos la suma de los términos:

$S = 824 + 826 + 828 + ... + 878$

$$S = \left(\frac{824 + 878}{2}\right)28 = 23\,828$$

∴ La suma de los términos es 23 828

5. Hallar la suma de todos los números pares de tres cifras, que se pueden formar con las cifras: 0; 2; 3; 5 ; 6 y 9.

Resolución:

Los números que se suman se formarán combinando las cifras dadas:

	a	b	c	
	↓	↓	↓	
	2	0	0	
	3	2	2	
	5	3	6	
	6	5		
	9	6		
		9		
Total de números:	5 ×	6 ×	3	= 90 números

Hallamos el número de veces que se repite la suma de cada columna:

Unidades: $\frac{90}{3} = 30$ veces Decenas: $\frac{90}{6} = 15$

Centenas: $\frac{90}{5} = 18$ veces

Hallamos la suma en cada orden:
Unidades: $(0 + 2 + 6)(30) = 240$
Decenas: $(0 + 2 + 3 + 5 + 6 + 9)(15) = 375$
Centenas: $(2 + 3 + 5 + 6 + 9)(18) = 450$
En la suma de todos los números se cumple:

		$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{c}$
		↓	↓	↓
		2	0	0
		3	2	2
		5	3	6
		6	5	
		9	6	
			9	
		2	4	0
	3	7	5	
4	5	0		
4	8	9	9	0

$\therefore$ La suma será: 48 990

6. Hallar la suma (en base decimal) de los términos de la siguiente serie, sabiendo que forman una progresión aritmética: $41_n; 46_n; 54_n; ...; 466_n$.

Resolución:

Hallamos la base mediante la razón aritmética:
$46_n - 41_n = 54_n - 46_n$
Descomponiendo polinómicamente:
$4n + 6 - 4n - 1 = 5n + 4 - 4n - 6$
$n = 7$
Reemplazando: $41_7; 46_7; 54_7; ...; 466_7$
Suma pedida: $S = 41_7 + 46_7 + 54_7 + ... + 466_7$
En base decimal: $S = 29 + 34 + 39 - ... + 244$

Cantidad de sumandos: $\frac{244 - 24}{5} = 44$ términos

$\Rightarrow S = \left(\frac{29 + 244}{2}\right)44 = 6006$

$\therefore$ La suma es 6006

7. De la siguiente operación:
$\overline{19ab} + \overline{18ab} + \overline{17ab} + ... + \overline{1ab} = \overline{xyz77}$
determinar el valor de $a + b + x + y + z$

Resolución:

Se deduce que la cantidad de sumandos es: 19

Vemos que $\overline{ab}$ se sumará 19 veces y termina en 77.

Luego: $\overline{ab}(19) = ...77 \Rightarrow b = 3$

Tenemos:
$$\begin{array}{r} 19 \times \\ a3 \\ \hline 57 \\ (9a) \\ \hline 77 \end{array} \Rightarrow 9 \times a = ...2 \Rightarrow a = 8$$

Reemplazando, la suma será:
$1983 + 1883 + 1783 + ... + 183 = \overline{xyz77}$
$\left(\frac{1983 + 183}{2}\right)19 = \overline{xyz77} \Rightarrow 20\,577 = \overline{xyz77}$
$\Rightarrow x = 2;\ y = 0;\ z = 5$
$\therefore a + b + x + y + z = 18$

8. En la siguiente suma:
$\overline{aa}_{\overline{1a}} + \overline{aa}_{\overline{3a}} + \overline{aa}_{\overline{5a}} + ... + \overline{aa}_{\overline{17a}} = \overline{bc00}$
hallar: $a + b + c$ (0 = cero)

Resolución:

Vemos que la cantidad de sumandos es: 9
Factorizamos la cifra "a":
$a[11_{\overline{1a}} + 11_{\overline{3a}} + 11_{\overline{5a}} + ... + 11_{\overline{17a}}] = \overline{bc00}$
Descomponiendo polinómicamente:
$a[\overline{1a} + \overline{3a} + \overline{5a} + ... + \overline{17a} + 1 \times 9] = \overline{bc00}$
$a[(10 + 30 + 50 + ... + 170) + 9(a) + 9] = \overline{bc00}$
$a[9(a) + 819] = \overline{bc00}$
Para que se verifique la operación, se deduce que:
$a = 9$
Reemplazando: $9(900) = \overline{bc00}$
$8100 = \overline{bc00} \Rightarrow b = 8;\ c = 1$
$\therefore a + b + c = 18$

9. Si: $\underbrace{10_n + 11_n + 12_n + ...}_{30 \text{ sumandos}} = 645$
hallar: n^2

Resolución:

Los términos en base decimal:
$\underbrace{n + (n + 1) + (n + 2) + ... + (n + 29)}_{30 \text{ sumandos}} = 645$

Al efectuar: $\left(\frac{n + n + 29}{2}\right)30 = 645 \Rightarrow n = 7$

$\therefore$ El valor de n^2 es 49

10. Se tienen "n" piedras dispuestas en línea recta, separadas entre sí 8 metros. Si un obrero que se encuentra en la primera piedra, recorre 2832 m, llevando todas las piedras a la del lugar $\left(\frac{n}{3} + 4\right)$.

Hallar "n", si cada vez solo puede llevar una sola piedra.

Resolución:

Haciendo un diagrama:

P_1 P_2 P_3 P_4 P_x P_{n-1} P_n
● ● ● ●... ●... ● ●
8 m 8 m 8 m 8 m ; $x = \frac{n}{3} + 4$

Hallamos las distancias recorridas a la izquierda de la piedra P_x.

De P_1 a P_x: $8(x - 1)$ m
De P_2 a P_x: $2 \times 8(x - 2)$ m

De P_3 a P_x: $2 \times 8(x-3)$ m
⋮
De P_{x-1} a P_x: $2 \times 8(1)$ m

Hasta el momento ha recorrido:

$D_1 = 8(x-1) + 2 \times 8(x-2) + 2 \times 8(x-3) + ... + 2 \times 8 \times 1$

$D_1 = 8(x-1) + 2 \times 8[(x-2) + (x-3) + ... + 1]$

$D_1 = 8(x-1) + 16\left[\frac{(x-2)+1}{2}\right](x-2)$

$\Rightarrow D_1 = 8(x-1)^2$ ...(1)

Hallamos las distancias recorridas a la derecha de la piedra P_x:

De P_x a P_{x+1}: $2(8 \times 1)$
De P_x a P_{x+2}: $2(8 \times 2)$
De P_x a P_{x+3}: $2(8 \times 3)$
⋮
De P_x a P_n: $2[8(n-x)]$

Esta vez ha recorrido:

$D_2 = 2(8 \times 1) + 2(8 \times 2) + 2(8 \times 3) + ... + 2 \times 8(n-x)$

$D_2 = 16[1 + 2 + 3 + ... + (n-x)]$

$D_2 = 16\left(\frac{1+n-x}{2}\right)(n-x)$

$\Rightarrow D_2 = 8(n-x+1)(n-x)$ ...(2)

Luego: $D_1 + D_2 = 2832$

$8(x-1)^2 + 8(n-x+1)(n-x) = 2832$

Pero: $x = \frac{n}{3} + 4$

$8\left(\frac{n}{3} + 3\right)^2 + 8\left(\frac{2}{3}n - 3\right)\left(\frac{2}{3}n - 4\right) = 2832 \Rightarrow n = 27$

∴ El valor de "n" es 27

11. Efectuar: $T = 6^2 + 10^2 + 14^2 + 18^2 + ... + 102^2$
Indicar la suma de las cifras de T.

Resolución:

El enésimo término de los sumandos es:

$a_n = (4n+2)^2 = 16n^2 + 16n + 4$; $n = \{1; 2; ...; 25\}$

La suma de los 25 términos será:

$T = \sum_{n=1}^{25}(16n^2 + 16n + 4)$

$\Rightarrow T = 16\left(\sum_{n=1}^{25} n^2 + 16\sum_{n=1}^{25} n + \sum_{n=1}^{25} 4\right)$

$T = 16\left(\frac{25 \times 26 \times 51}{6}\right) + 16\left(\frac{25 \times 26}{2}\right) + 4 \times 25$

$\Rightarrow T = 93\,700$ ∴ La suma de las cifras de T: 19

12. Hallar la suma de todos los números de dos cifras, tales que la suma de sus cifras sea impar.

Resolución:

Sea $\overline{ab}$ el número de dos cifras.

Tal que: a + b = Impar
↓ ↓

1.^{er} caso: Par + Impar = Impar
2.° caso: Impar + Par = Impar

1.^{er} caso: a: par; b: impar
$S_1 = 21 + 23 + 25 + ... + 89 = 1100$

2.° caso: a: impar; b: par
$S_2 = 10 + 12 + 14 + ... + 98 = 1350$

La suma total: 1100 + 1350 = 2450

∴ La suma pedida es 2450

13. César le pregunta a Nathaly por su edad y ella le responde que tiene "n" años, advirtiéndole lo siguiente: "La suma de todos los números de "n" cifras cuyo producto de cifras es 7, termina en 19". ¿Qué edad tiene Nathaly?

Resolución:

Los números de "n" cifras cuyo producto de cifras es 7, son:

"n" cifras

	7	1	1	...	1	1	1 +
	1	7	1	...	1	1	1
"n" sumandos	1	1	7	...	1	1	1
	.	.	.	...	.	.	.
	.	.	.	...	.	.	.
	.	.	.	...	.	.	.
	1	1	1	...	1	1	7
	.	.	.	...	.	1	9

Se cumple: $\underbrace{11 + 11 + ... + 11 + 71 + 17}_{\text{"n" sumandos}} = ...19$

Luego: $11(n-2) + 71 + 17 = ...19$

$11n + 66 = ...19$

$11n = ...19 - 66$

$11n = ...53$

$\Rightarrow n = 23$ ∴ La edad de Nathaly es 23 años

14. Sabiendo que: $a_1 = 2$

$a_k = a_{k-1} + 2k$; $k > 1$

Además: $\sum_{k=1}^{n} a_k = 1632$. Calcular el valor de "n".

Resolución:

Hallamos los términos de la serie:

Si: $k = 2 \Rightarrow a_2 = a_1 + 2(2) = 6$ (a_1 ↓ 2)

Si: $k = 3 \Rightarrow a_3 = a_2 + 2(3) = 12$ (a_2 ↓ 6)

Si: $k = 4 \Rightarrow a_4 = a_3 + 2(4) = 20$ (a_3 ↓ 12)

Luego, la serie es: 2; 6; 12; 20
diferencias: 4 6 8
diferencias: 2 2

Hallamos el k-ésimo término: $a_k = k^2 + k$

Hallamos la suma de los "n" términos:

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2 + k) = 1632$$

Enseguida: $\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = 1632$

Reemplazando:

$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = 1632$

Efectuando: $n(n+1)(n+2) = 3 \times 1632$

Descomponiendo como el producto de tres números consecutivos:

$n(n+1)(n+2) = 16 \times 17 \times 18 \quad \therefore n = 16$

15. Si: $\overline{cba}_k$ excede a $\overline{abc}_k$ en 72 y sumados es $\overline{xy2z}_k$. determinar el valor de: $x + y + z + a + b + c + k$

Resolución:

Por dato: $\overline{cba}_k - \overline{abc}_k = 72$

Descomponiendo polinómicamente:

$ck^2 + bk + a - ak^2 - bk - c = 72$

Factorizando: $(c - a)k^2 - (c - a) = 72$

$\Rightarrow (c - a)(k^2 - 1) = 72 = 24 \times 3$

Igualando convenientemente:

$k^2 - 1 = 24 \quad \Rightarrow k = 5$

$c - a = 3 \quad \Rightarrow c = 4;\ a = 1$

También: $\overline{abc}_5 + \overline{cba}_5 = \overline{xy2z}_5$ ...(1)

En el primer orden: $c + a = z_5 \Rightarrow 4 + 1 = z_5$

$5 = z_5 \Rightarrow 10_5 = z_5$

$\Rightarrow z = 0$ (llevamos una unidad al siguiente orden)

En el segundo orden: $1 + b + b = ...2_5 \Rightarrow 2b = ...1_5$

Para que termine en 1, en base 5: $b = 3$

Reemplazando en (1):

$134_5 + 431_5 = 1120_5 \Rightarrow \overline{xy2z}_5 = 1120_5$

$\Rightarrow x = 1;\ y = 1$

$\therefore x + y + z + a + b + c + k = 15$

16. Si al numeral $\overline{xyz}$ se le suma el numeral $\overline{ab2}$, se obtiene $\overline{zyx}$. Hallar el valor de "y" sabiendo que las cifras "x" ; "y" y "z" forman una PA.

Resolución:

Del dato: $\overline{xyz} + \overline{ab2} = \overline{zyx}$

También: $\overline{zyx} - \overline{xyz} = \overline{ab2}$

Por propiedad: $b = 9$; $a = 7$

Descomponiendo: $99(z - x) = 792$

$\Rightarrow z - x = 8$ ...(1)

$\downarrow \quad \downarrow$

$9 \quad 1$

Pero, en PA: $1 \underbrace{\quad}_{r} y \underbrace{\quad}_{r} 9$

$y = \frac{9+1}{2} = 5 \quad \therefore y = 5$

17. Sabiendo que: $\overline{abc}_n = 2(\overline{cba}_n)$ y: $a \times b + c = 73$ hallar el menor valor de "n"

Resolución:

Tenemos: $\overline{abc}_n = \overline{cba}_n + \overline{cba}_n$

Luego: $\overline{abc}_n - \overline{cba}_n = \overline{cba}_n$

Por propiedad: $b = n - 1$ y $a + c = n - 1$

Pero: $a \times b + c = 73$

Reemplazando: $a(n - 1) + n - a - 1 = 73$

$\Rightarrow n = \frac{74 + 2a}{a + 1}$

Las posibles soluciones son:

- $a = 1;\ n = 38;\ b = 37;\ c = 36$
- $a = 3;\ n = 20;\ b = 19;\ c = 16$
- $a = 5;\ n = 14;\ b = 13;\ c = 8$
- $a = 7;\ n = 11;\ b = 10;\ c = 3$

$\therefore$ El menor valor de $n = 11$

18. Si: $\overline{abc}_n - \overline{cba}_n = \overline{xyz}_n \ \wedge\ \overline{xyz}_n + \overline{zyx}_n = \overline{abcd}_n$

Además: $a + b + c + d = 22$. Hallar el valor de "n".

Resolución:

De: $\overline{abc}_n - \overline{cba}_n = \overline{xyz}_n$

$\Rightarrow y = n - 1;\ x + z = n - 1$

También: $\overline{xyz}_n + \overline{zyx}_n = \overline{abcd}_n$

Por propiedad: $\overline{10(n-2)(n-1)}_n = \overline{abcd}_n$

$\Rightarrow a = 1;\ b = 0;\ c = n - 2;\ d = n - 1$

Pero: $a + b + c + d = 22$

Reemplazando: $1 + 0 + (n - 2) + (n - 1) = 22$

$\Rightarrow n = 12 \quad \therefore$ El valor de "n" es 12

19. Hallar el número de 4 cifras abcd ($a > c > d > b > 0$), tal que la diferencia con el número que resulta de invertir el orden de sus cifras es 3366. Calcular el valor de: $a + b + c + d$.

Resolución:

Por dato: $\overline{abcd} - \overline{dcba} = 3366$ $(a > c > d > b > 0)$

Como: $d < a \Rightarrow 10 + d - a = 6$

$\Rightarrow a - d = 4$ ...(1)

Luego: $c - 1 - b = 6 \Rightarrow c - b = 7$ ...(2)

De (1) y (2): $a = 9;\ b = 1;\ c = 8;\ d = 5$

$\therefore a + b + c + d = 23$

20. ¿Cuál es el mayor número de 4 cifras significativas, tal que la diferencia de la suma de sus cifras y la suma de las cifras de su CA es 11? Dar la suma de sus cifras.

Resolución:

Sea el número $\overline{abcd}$.

Donde: $CA(\overline{abcd}) = \overline{(9-a)(9-b)(9-c)(10-d)}$

Por dato:

$(a + b + c + d) - (9 - a + 9 - b + 9 - c + 10 - d) = 11$

$\Rightarrow a + b + c + d = 24$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

El mayor número: $9 \quad 9 \quad 5 \quad 1$

$\therefore$ Suma de sus cifras: 24

21. Sabiendo que: $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{mnp}$ ∧
$\overline{mnp} + CA(\overline{cba}) + \overline{abc} - CA(\overline{pnm}) = 1287$
¿cuántos numerales de la forma $\overline{abc}$, existen?

Resolución:

De: $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{mnp}$ $\begin{cases} n = 9 \\ m + p = 9 \end{cases}$

Además:
$\overline{mnp} + 1000 - \overline{cba} + \overline{abc} - 1000 + \overline{pnm} = 1287$
$\Rightarrow \overline{abc} - \overline{cba} + \overline{mnp} + \overline{pnm} = 1287$
$\overline{mnp} + 1089 = 1287 \Rightarrow \overline{mnp} = 198$

También:
$\overline{abc} - \overline{cba} = 198 \Rightarrow 99(a - c) = 198$
$a - c = 2 \Rightarrow a = c + 2$

El número $\overline{abc}$ es: $\overline{(c+2)bc}$

Luego, valores respectivos $\begin{cases} b = 0; 1; 2; ...; 9 & \Rightarrow 10 \\ c = 0; 1; 2; ... ; 7 & \Rightarrow 8 \end{cases}$

Total de números: $10 \times 8 = 80$
∴ Existen 80 números de la forma $\overline{abc}$.

22. Si el CA de un numeral capicúa de 5 cifras es otro capicúa de 4 cifras, determinar la suma de cifras del número original.

Resolución:

Por dato: $CA(\overline{abcba}) = \overline{xyyx}$
Por regla práctica:
$\overline{(9-a)(9-b)(9-c)(9-b)(10-a)} = \overline{xyyx}$

En el primer orden: $10 - a = x$ ...(1)
En el segundo orden: $9 - b = y$ ...(2)
En el tercer orden: $9 - c = y$ ...(3)
En el cuarto orden: $9 - b = x$ ...(4)
En el quinto orden: $9 - a = 0$ ...(5)

$\Rightarrow a = 9; \quad x = 1; \quad b = 8; \quad y = 1; \quad c = 8$
El número original: 98 889
∴ Σcifras: $9 + 8 + 8 + 8 + 9 = 42$

23. ¿Cuántos números de la forma $\overline{aba}$ existen, tales que la suma de las cifras de su CA sea 19?

Resolución:

Hallamos: $CA(\overline{aba}) = \overline{(9-a)(9-b)(10-a)}$
Por dato: $9 - a + 9 - b + 10 - a = 19$
$2a + b = 9$
↓ ↓
1 7 (El número: 171)
2 5 (El número: 252)
3 3 (El número: 333)
4 1 (El número: 414)

∴ Existen 4 números

24. Hallar la suma de las cifras del CA del número:
$$A = 5 \times 10^{n-2} + 7 \times 10^{n-3}$$

Resolución:

De: $A = 5 \times 10^{n-2} + 7 \times 10^{n-3}$
$\Rightarrow A = 10^{n-3}(5 \times 10 + 7) \Rightarrow A = 57 \times 10^{n-3}$

$CA(A) = CA(57)10^{n-3} \Rightarrow CA(A) = 43 \times 10^{n-3}$
∴ Σcifras: $4 + 3 = 7$

25. Hallar: a + b + c, en base 10, si se cumple:
$(\overline{abc}_7)(666_7) = ...241_7$

Resolución:

Por regla práctica: $\overline{abc000}_7 - \overline{abc}_7 = ...241_7$
$... \overline{(6-a)(6-b)(7-c)}_7 = ...241_7$
$\Rightarrow 7 - c = 1 \Rightarrow c = 6 \qquad 6 - b = 4 \Rightarrow b = 2$
$\Rightarrow 6 - a = 2 \Rightarrow a = 4 \qquad ∴ a + b + c = 12$

26. Sabiendo que el séxtuplo del número $\overline{abcdef}$ resulta $\overline{defabc}$, hallar: a + b + c + d + e + f.

Resolución:

Por dato: $(\overline{abcdef})6 = \overline{defabc}$
Por descomposición en bloques:
$(\underbrace{\overline{abc000}}_{1000(\overline{abc})} + \overline{def}) \times 6 = \underbrace{\overline{def000}}_{1000(\overline{def})} + \overline{abc}$

Efectuando y reduciendo: $857(\overline{abc}) = 142(\overline{def})$

$\Rightarrow$ el numeral: $\overline{abcdef} = 142\ 857$
∴ $a + b + c + d + e + f = 27$

27. ¿Cuántos números de la forma $\overline{abcdef}$ existen, tales que su cuádruple es $\overline{efabcd}$?

Resolución:

Por dato: $(\overline{abcdef})4 = \overline{efabcd}$
Descomponiendo en bloques:
$(\overline{abcd00} + \overline{ef})4 = \overline{ef0000} + \overline{abcd}$
$\Rightarrow 400(\overline{abcd}) + 4(\overline{ef}) = 10\ 000(\overline{ef}) + \overline{abcd}$
$\underbrace{399}_{19 \times 21}(\overline{abcd}) = \underbrace{9996}_{476 \times 21}(\overline{ef})$
$\Rightarrow 19(\overline{abcd}) = 476(\overline{ef})$ ...(α)

Debemos conseguir dos factores en cada miembro, uno de dos cifras y el otro de 4 cifras, tenemos:

α×3: $57(\overline{abcd}) = 1428(\overline{ef})$
El número $\overline{abcdef} = 142\ 857$ (1.ª solución)

α×4: $76(\overline{abcd}) = 1904(\overline{ef})$
El número $\overline{abcdef} = 1904(\overline{ef})$ (2.ª solución)

α×5: $95(\overline{abcd}) = 2380(\overline{ef})$
El número $\overline{abcdef} = 238\ 095$ (3.ª solución)

∴ Existen 3 números.

28. Si el cuádruple del número $\overline{abcde}$ es $\overline{edcba}$, hallar el valor de: a + b + c + d + e.

Resolución:

Por dato:

$$\begin{array}{r} \overline{abcde} \times \\ 4 \\ \hline \overline{edcba} \end{array}$$

Como: $4(e) = ...a \Rightarrow a = \text{par} < 3 \Rightarrow a = 2$

Luego: $4(e) = ...2 \Rightarrow e = 8 \quad (e > 2)$

Enseguida: $4(d) + 3 = ...b \Rightarrow b = \text{impar} < 3$

$\Rightarrow b = 1 \Rightarrow 4(d) + 3 = ...1 \Rightarrow d = 7$

Luego: $4(c) + 3 = ...c \Rightarrow c = 9$

$\Rightarrow a = 2;\ b = 1;\ c = 9;\ d = 7;\ e = 8$

$\therefore a + b + c + d + e = 27$

29. Si: $\overline{abc} \times \overline{bc} \times \overline{cb} = 422\,500$, hallar: a + b + c.

Resolución:

Descomponemos 422 500 en factores de la forma: $\overline{abc}$, $\overline{bc}$ y $\overline{cb}$

$422\,500 = 325 \times 25 \times 52 \Rightarrow abc = 325$

$\therefore a + b + c = 10$

30. Si: $(\overline{abc}_4)(\overline{b0a}_4) = \overline{caa0ba}_4$, donde 0 = cero, hallar el valor de: a + b + c.

Resolución:

Se deduce que: c = 1

Además: $(a)(b) = ...b$; $(a \text{ y } b < 4)$

En base 4: a = 3 y b = 2

Luego: $321_4 \times 203_4 = 133023_4$

$\therefore a + b + c = 6$

31. Calcular la suma de las cifras del resultado de multiplicar $\underbrace{77 ... 77}_{100\text{ cifras}}$ por $\underbrace{99 ... 99}_{100\text{ cifras}}$

Resolución:

Por regla práctica:

$$\begin{array}{r} \overbrace{77 ... 77}^{100\text{ cif.}}\overbrace{7000 ... 000}^{100\text{ cif.}} - \\ 777 ... 777 \\ \hline \underbrace{77 ... 77}_{99\text{ cif.}}6\underbrace{222 ... 22}_{99\text{ cif.}}3 \end{array}$$

La suma de las cifras del resultado:

$7 \times 99 + 6 + 2 \times 99 + 3 = 900$

32. Hallar el divisor y el cociente de una división, sabiendo que el dividendo es 529 565 y los residuos sucesivos obtenidos en la determinación del cociente son: 246; 222 y 542.

Resolución:

Por dato:

$$\begin{array}{lrl} & 529565 & \underline{|N} \\ a \times N \rightarrow & \underline{\quad\ \ }\downarrow & abc \\ & 2466 & \\ b \times N \rightarrow & \underline{\quad\ \ }\downarrow & \\ & 2225 & \\ c \times N \rightarrow & \underline{\quad\ \ } & \\ & 542 & \end{array}$$

N > 222; 246; 542

Se tiene:

$a \times N = 5295 - 246 = 5049 = 9 \times 561$

$b \times N = 2466 - 222 = 2244 = 4 \times 561$

$c \times N = 2225 - 542 = 1683 = 3 \times 561$

$\Rightarrow N = 561;\ a = 9;\ b = 4 \text{ y } c = 3$

$\therefore$ El cociente es: 943 y el divisor es: 561.

33. En una división inexacta, el cociente, el divisor y el residuo son números consecutivos (en ese orden). El mínimo número que hay que añadir al dividendo, para que el cociente aumente 3 unidades es 55. Hallar la suma de las cifras del dividendo.

Resolución:

De la división inexacta: $D = d \times q + r$

Si el cociente, el divisor y el residuo son consecutivos, se cumple: $r = n;\ d = n + 1 \text{ y } q = n + 2$

La menor cantidad que se le debe sumar al dividendo para que el cociente aumente 3 unidades es: $(d - r) + 2d = 3d - r$

Por dato: $3d - r = 55$

Luego: $3(n + 1) - n = 55 \Rightarrow n = 26$

Entonces: $q = 28;\ d = 27 \text{ y } r = 26$

Hallamos el dividendo: $D = 27 \times 28 + 26 = 782$

$\therefore \Sigma\text{cifras} = 7 + 8 + 2 = 17$

34. En una división entera inexacta, la suma de sus 4 términos es 455. Si se multiplica el dividendo y el divisor por 4, la nueva suma de sus términos es 1733. Hallar el dividendo.

Resolución:

Sea la división: $D = d \times q + r$ ...(α)

Por dato: $D + d + q + r = 455$ ...(1)

Cuando se multiplica el dividendo y divisor por 4, se cumple:

$4D = 4d \times q + 4r$

$\Rightarrow 4D + 4d + q + 4r = 1733$ ...(2)

Enseguida: $(1) \times 4 - (2)$:

$4 \times q - q = 4 \times 455 - 1733 \Rightarrow q = 29$

En (α): $D = 29d + r$

En (1): $29d + r + d + 29 + r = 455$

$\Rightarrow 15d + r = 426;\ (d > r)$

$\downarrow \quad \downarrow$

Valores adecuados: 29 9

$\Rightarrow D = 29 \times 29 + 9 = 850$

$\therefore$ El dividendo es 850

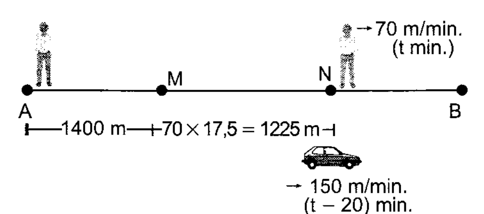
35. Jean va trotando desde A hasta B. Sale al mediodía con una velocidad de 70 m/min y en cierto punto sube a un bus que viaja a 150 m/min y que partió de A a las 12:20 p. m. Así, Jean llega a B 20 minutos antes que si hubiese continuado caminando. ¿Cuál es la distancia entre A y B?

Resolución:

A las 12:20 p. m., Jean caminó: $20 \times 70 = 1400$ m, y el bus parte de A.

Tiempo en el que el bus alcanza a Jean:

$\frac{1400}{150-70} = 17,5$ min



En $\overline{NB}$: $70 \times t = 150(t - 20)$ ⇒ $t = 37,5$ min.

Distancia: NB: 2625 m

Distancia:. AB: 1400 + 1225 + 2625 = 5250 m

∴ Distancia AB: 5250 m

36. Un cierto número escrito en el sistema decimal termina en la cifra u. Si esta cifra u se pone al inicio, resulta un número que es la tercera parte del inicial. Hallar la suma de las soluciones.

Resolución:

$N = \overline{ab\ldots xu}$ (n cifras)

$N/3 = \overline{uab\ldots x}$

⇒ $N = 3 \times \overline{uab\ldots x} = \overline{ab\ldots xu}$

$3(u \times 10^{n-1} + \overline{ab\ldots x}) = \overline{ab\ldots x}\,.\,10 + u$

⇒ $3 \times 10^{n-1}u + 3(\overline{ab\ldots x}) = 10(\overline{ab\ldots x}) + u$

$(3 \times 10^{n-1} - 1)u = 7(\overline{ab\ldots x})$

$299\ldots9 \times u = 7(\overline{ab\ldots x})$ ...(1)

(n cifras) (n – 1 cifras)

$u \neq 7$ porque se igualaría un número de n cifras con el que tiene (n – 1) cifras.

299... 9 contiene a 7 dividimos, agregando 9 en forma sucesivas hasta obtener una división exacta:

```
299999 |7
28      42 857
–19
 14
 –59
  56
  –39
   35
   –49
    49
    ––
```

⇒ 299999 posee 6 cifras, se reemplaza en (1), donde $\overline{ab\ldots x}$ tendrá 5 cifras.

⇒ $\underbrace{299999}_{7 \times 42857}(u) = 7(\overline{abcdx})$

⇒ $42857(u) = \overline{abcdx}$ (donde: u = 1 ∨ 2)

Existen 2 soluciones:

Si: u= 1 ⇒ $N_1 = 42857$

Si: u= 2 ⇒ $N_2 = 85714$

∴ $N_1 + N_2 = 1\ 285\ 713$

37. Sea $S_n = (1,2,3,\ldots n)$, $n \leq 10$. Hallar la suma de los números n para los cuales S_n puede ser expresado como la unión de dos subconjuntos disjuntos de modo que la suma de los elementos de cada una de ellas sea la misma.

Resolución:

Para que S_n pueda ser expresado como la unión de dos subconjuntos disjuntos (no poseen elementos comunes), de manera que la suma de los elementos sea la misma: $S_n = A \cup B$

⇒ Suma de elementos de A = Suma de elementos de B

Como A y B son disjuntos:

Suma de elementos de S_n = Suma de elementos de A + Suma de elementos de B

(Iguales)

⇒ Suma de elementos de S_n = 2 (Suma de elementos de A) = Par

Definido $S_n = \{1; 2; 3\ldots; n\}$

La suma de los elementos de S_n será par:

n = 3: 1 + 2 + 3 = 6 ⇒ A = {1; 2} ∧ B = {3}

n = 4: 1 + 2 + 3 + 4 = 10 ⇒ A= {1; 4} ∧ B = {2; 3}

n = 7: 1 + 2 + ...+ 7 = 28

⇒ A = {1; 6; 7} ∧ B = {2; 3; 4; 5}

n = 8: 1 + 2 +...+ 8 = 36

⇒ A = {3; 7; 8} ∧ B = {1; 2; 4; 5; 6}

Como $n \leq 10$, no se encuentran más soluciones:

∴ 3 + 4 + 7 + 8 = 22

38. Al multiplicar N por 243 se obtuvo como suma de productos parciales 45 369. Calcule la suma de cifras de N.

Resolución:

```
    N
  243
  ———
   3N ⎫
  4N  ⎬ Productos parciales
 2N   ⎭
 ———
```

3N + 4N + 2N = 9N = 45 369

N = 5041 ∴ Σcifras = 10

39. Si $\overline{abcd}_{(7)} \times 666_{(7)} = \ldots 1134_{(7)}$. Calcule: a + b + c + d

Resolución:

$\overline{abcd}_{(7)} \times 666_{(7)} = \ldots 2134_{(7)}$

$\overline{abcd}_{(7)} \times (1000_{(7)} - 1) = \ldots 2134_{(7)}$

$\overline{abcd000}_{(7)}$ –

$\overline{abcd}_{(7)}$

$\ldots 1134_{(7)}$

- 7 – d = 4 ⇒ d = 3
- 6 – c = 3 ⇒ c = 3
- 6 – b = 1 ⇒ b = 5

- $d - 1 - a = 1 \Rightarrow 3 - a = 2 \Rightarrow a = 1$

$\therefore a + b + c + d = 12$

40. Cuántos números enteros positivos elevados al cuadrado, al agregarles 1 048 576 dan como resultado el cuadrado de otro entero.

Resolución:

$N^2 + 1\,048\,576 = K^2$

$\Rightarrow 1\,048\,576 = \underbrace{K^2 - N^2}_{(K+N)(K-N)}$ Diferencia de cuadrados

Pero: $1\,048\,576 = 2^{20}$

Como debe de descomponerse en dos factores, siendo N y K enteros se tendrá:

$2^{20} = 2^1 \times 2^{19} = 2^2 \times 2^{18} = ... = 2^9 \times 2^{11}$

$\therefore$ 9 posibles soluciones

41. Dos autos están separados por $\overline{ab}$ km. Las velocidades son $\overline{ab}$ m/s y 129,6 km/h. Para que se encuentren al cabo de 10 minutos, al partir simultáneamente, a + b debe ser:

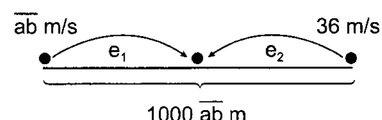
Resolución:

Uniformizando las unidades en metros y segundos:

$\overline{ab}$ km = $1000(\overline{ab})$ m

$129{,}6 \text{ km/h} = 129{,}6 \times \frac{1000}{3600} \times \frac{m}{s} = 36 \text{ m/s}$

10 minutos = 600 s



Se observa:

$1000(\overline{ab}) = \underbrace{600(\overline{ab})}_{e_1} + \underbrace{600(36)}_{e_2}$

$\Rightarrow 4\overline{ab} = 6 \times 36 \Rightarrow \overline{ab} = 54$

Luego: a + b = 5 + 4 = 9

42. Se tiene un recipiente lleno de alcohol puro, en el cual se reemplaza sucesivamente por agua, 1/2, 1/3, 1/4, ..., 1/n del volumen total. Si finalmente el grado alcohólico de la mezcla es igual al 10% de 1° alcohólico, calcule el número de operaciones de reemplazo.

Resolución:

Se retira de alcohol puro: 1/2; 1/3; 1/4, ... 1/n

Quedando al final:

$$\frac{n-1}{n}\left(...\left(\frac{4}{5}\left(\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(1)\right)\right)\right)\right)...\right) = \frac{1}{n} \quad ...(1)$$

1.ª vez
2.ª vez
3.ª vez
⋮
(n − 1).ª vez

Donde: $\frac{1}{n}(1) = 10\%(1\%) = \frac{1}{1000} \Rightarrow n = 1000$

Se ha efectuado 1000 − 1 = 999 operaciones

43. Una barrica contiene 337 litros de vino que debe ser envasado en 398 botellas, una de 7/8 de litro y otra de 5/6 de litro. ¿Cuántas botellas de la menor capacidad se utilizó?

Resolución:

Sean a y b el número de botellas de cada tipo que ha utilizado:

- $a + b = 398$ ...(1)
- $\frac{7}{8}a + \frac{5}{6}b = 337$

Multiplicando por 24

$\Rightarrow 21a + 20b = 8088$ ...(2)

De (1) y (2): a = 128; b = 270

Menor capacidad son las botellas de 5/6 de litro

$\therefore$ Se utiliza 270 botellas

44. Un país tenía una deuda externa de $\overline{ab} \times 10^{50}$ dólares pagó $\overline{ba} \times 10^{50}$ dólares y quedó debiendo más de 4×10^{51} pero menos de 5×10^{51} dólares. ¿A cuánto asciende (en dólares) la deuda externa actual de dicho país?

Resolución:

Falta pagar:

$10^{50}(\overline{ab}) - 10^{50}(\overline{ba}) = 9(a-b)10^{50}$ ... (1)

Donde: $\underbrace{4 \times 10^{51}}_{40 \times 10^{50}} < 9(a-b)10^{50} < \underbrace{5 \times 10^{51}}_{50 \times 10^{50}}$

$\Rightarrow 40 < 9(a-b) < 50$

Luego $a - b = 5$

Deuda actual en (1): $D = 9(5)10^{50} = 45 \times 10^{50}$

45. Escribir, uno a continuación de otro, los números: 1; 2; 3; 4;...; 59; 60. Anular de izquierda a derecha; 100 cifras de esta serie, con la condición de que el número formado por las cifras restantes sea la mayor posible. Dar como respuesta la suma de las cifras del número resultante.

Resolución:

Del 1 al 60 se escriben

(60 + 1)(2) − 11 = 111 cifras

- Se deben de tachar 100 cifras quedan escritas 11 cifras, las que deben formar el mayor número Del 1 al 60 hay seis cifras 9 pero estas no pueden estar juntas porque después de la sexta cifra 9 (de 59) solo habrían dos cifras más por escribir: 6,0 (de 60)

  $\Rightarrow$ Las cinco primeras son 9: 99999

- Habrá que escribir otras cifras, 6; 7; 8 etc. pero la sexta cifra 9 a lo más podrá ubicarse en centenas.

  $\Rightarrow$ Las tres últimas son: 960

- Se está escribiendo 99999 $\underbrace{***}_{\text{faltan 3 cifras}}$ 960

  de estas que faltan, la primera no puede ser 8 (de 58) porque para el sexto 9 solo hay una cifra 5 y se necesita cubrir dos cifras.

  $\Rightarrow$ Se escribe: 7 8 5 (7 de 57, 8 de 58, 5 de 59)

Número mayor posible: 99999785960

$\Rightarrow$ Suma de cifras $6(9) + 5 + 6 + 7 + 8 + 0 = 80$

46. $\overline{aba}$ troncos de igual diámetro se han dispuesto colocando 31 troncos en la base, luego 30, 29, 28, sucesivamente hacia arriba, hasta llegar a "n" en la parte superior. Calcular "n", si el total de troncos es un número con raíz cúbica exacta.

Resolución:

Total de troncos: $\overline{aba} = k^3$ posee cúbica exacta

Solo $k = 7$: $7^3 = 343 = \overline{aba}$

Del enunciado:

$343 = \underbrace{31 + 30 + 29 + 28 + ... + (32 - x)}_{\text{x sumandos}}$

$\Rightarrow 343 = \dfrac{x(31 + 32 - x)}{2} = \dfrac{x(63 - x)}{2}$

$2 \times 343 = \underbrace{2 \times 7 \times 7 \times 7}_{14 \times 49} = x(63 - x)$

Identificando $x = 14$

Luego: $n = 32 - 14 = 18$

Las respuestas están en función de $\overline{ab} = 34$, se observa:

$n = 18 = \dfrac{34}{2} + 1 = \dfrac{\overline{ab}}{2} + 1$

47. En un avión los $\overline{ab}$ pasajeros de primera categoría pagan $270 cada uno; los 30 pasajeros de segunda pagan $250 cada uno y los $\overline{ba}$ pasajeros de tercera pagan $200 cada uno. Si en total se pagó $26 920, calcular a + b.

Resolución:

En total se pagó: $26 920

$= 270(\overline{ab}) + 250(30) + 200(\overline{ba})$

$= (2700a + 270b) + 7500 + (2000b + 200a)$

Reduciendo y simplificando:

$\Rightarrow 19\,420 = 2900a + 2270b$

$\Rightarrow \underbrace{1942}_{...2} = \underbrace{290a}_{...0} + \underbrace{227b}_{\text{debe acabar en 2}}$

Solo $b = 6$, reemplazando:

$1942 = 290a + 227(6) \Rightarrow a = 2$

$\therefore a + b = 2 + 6 = 8$

48. Un vehículo que cae por una pendiente recorre sucesivamente en cada segundo: 1, 3, 5, 7, ... metros y llega al fondo en 10 segundos. ¿Cuántos metros desciende verticalmente, si por cada 5 m desciende 3 verticalmente?

Resolución:

Calculando el recorrido:

$R = \underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + ...}_{\text{10 sumandos (son 10 s)}}$ Suma de impares

$R = 10^2 = 100$ m

Luego: recorre 5 m desciende 3 m

$\Rightarrow$ Recorre 100 m desciende x

$\Rightarrow x = \dfrac{100 \times 3}{5} = 60$ m

49. En una multiplicación; si al multiplicando se le aumenta 7 unidades el producto aumenta en 217; si al multiplicador se le disminuye 11 unidades el producto disminuye en 2112. Calcule el producto inicial.

Resolución:

Producto inicial: $M \times m = P$

- $(M + 7)m = P + 217$

  $M \times m + 7m = P + 217 \Rightarrow m = 31$
- $M(m - 11) = +P - 2112$

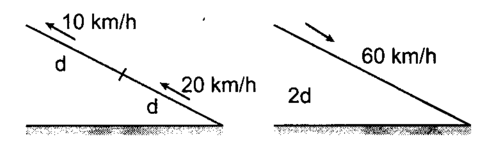
  $M = 192 \quad \therefore P = 5952$

50. Un ciclista puede bajar un pendiente a 60 km/h, si la empieza a subir a 20 km/h y a la mitad se cansa y lo que falta lo hace solo a 10 km/h. ¿Cuál es la velocidad promedio?

Resolución:

La longitud de la pendiente sea 2d:

- Subida
- Bajada



Velocidad promedio: $v_p = \dfrac{\text{espacio total}}{\text{tiempo total}}$

$v_p = \dfrac{d + d + 2d}{\dfrac{d}{10} + \dfrac{d}{20} + \dfrac{2d}{60}} \Rightarrow v_p = \dfrac{4}{\left(\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{20} + \dfrac{2}{60}\right)}$

$v_p = 21\dfrac{9}{11} = 21,\widehat{81}$

51. Se compran 4000 huevos a 18 soles el ciento. Se rompen 28 decenas y se regala 10 docenas. ¿A cómo debe venderse la docena si se desea ganar 180 soles?

Resolución:

El costo realizado es: $S/.18\underbrace{\left(\dfrac{4000}{100}\right)}_{\text{Número de cientos}} = S/.720$

Se desea ganar 180 soles

Debe recibirse por la venta: 720 + 180 = S/.900

Se rompen: 28(10) = 280 huevos

Se regalan: 10(12) = 120 huevos

$\Rightarrow$ No se venden 280 + 120 = 400

De los 4000 son vendidos: 4000 – 400 = 3600

$\Rightarrow$ N.° docenas a vender: $\frac{3600}{12} = 300$

Se debe de vender cada docena:

$\frac{S/.900}{300} = S/.3$ cada docena

52. Timoteo, del total de su fortuna, la tercera parte más S/.500 dio a su hijo mayor, de lo que le quedaba, la cuarta parte más S/.125 dio el segundo y de lo que le quedaba las tres quintas partes más S/.800 dio al último. Si todavía le queda S/.2000, ¿cuál es la fortuna de Timoteo?

Resolución

	Entrega	Queda
1.°	$\frac{F}{3} + 500$	$Q_1 = \frac{2}{3}F - 500$
2.°	$\frac{Q_1}{4} + 125$	$Q_2 = \frac{3}{4}Q_1 - 125$
3.°	$\frac{3}{5}Q_2 + 800$	$Q_3 = \frac{2}{5}Q_2 - 800$

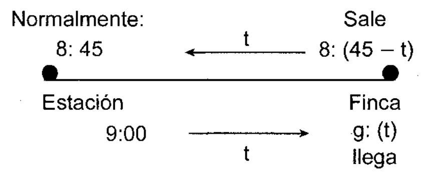
Al final queda $Q_3 = 2000$

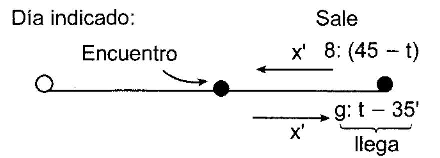
- $Q_3 = \frac{2}{5}Q_2 - 800 = 2000 \Rightarrow Q_2 = 7000$
- $Q_2 = \frac{3}{4}Q_1 - 125 = 7000 \Rightarrow Q_1 = 9500$
- $Q_1 = \frac{2}{3}F - 500 = 9500 \Rightarrow F = 15\,000$

53. Para ir del Cusco a su finca, un ganadero toma el ferrocarril hasta una cierta estación A, a la que el tren tiene fijado oficialmente la llegada a las 9 de la mañana. Para llevarlo a su finca, en dicha estación debe esperarlo un coche de caballos desde 15 minutos antes de la hora marcada para la llegada del tren. No obstante estas previsiones, el viajero llega con tanta anticipación a la estación A que el coche no está aún en ella. Empieza a caminar por la carretera para ir al encuentro del coche de caballos, se sube a él y continúa hasta la finca; a donde llega 35 minutos antes de lo calculado. Determinar la hora exacta que se encontraron el viajero y el coche de caballos.

Resolución:

Suponiendo que el coche de caballos demora t minutos para llegar a la estación de la finca:





Tiempo que demoró el coche:

x'+ x' = 9h(t – 35)' – 8h(45 – t)'

$\Rightarrow$ 2x' = 2t – 20 $\Rightarrow$ x' = t – 10

Hora de encuentro:

8: (45 – t)'+ (t – 10)' = 8:35

54. Un juego consiste en: Si al tirar una moneda sale cara nos dan 200 soles, pero si sale sello debemos pagar 80 soles. Si después de 12 juegos he ganado 1000 soles, entonces el número de veces que salió cara es:

Resolución:

a: n.° veces que sale cara

b: n.° veces que sale sello

a + b = 12 ...(1)

200a – 80b= 1000

$\Rightarrow$ 5a – 2b = 25 ... (2)

De (1) y (2): a = 7 $\wedge$ b = 5

$\therefore$ Salió cara 7 veces

55. Se tenían S/.28,25 entre monedas de $1,00; $0,50 y $0,25. Si todas las monedas se colocan en contacto por sus bordes perfectamente alineadas forman una longitud de 1,057 m. Determinar el número de monedas de cada clase, si se sabe que por cada moneda de $0,50 hay tres de $1,00 (diámetros: 28 mm; 22 mm y 21 mm respectivamente). Dar como respuesta el número total de monedas.

Resolución:

Se conoce de las monedas:

Valor	Diámetro	Número
1,00	28 mm	3a
0,50	22 mm	a
0,25	21 mm	b

Se tiene S/.28,25

3a(1) + a(0,50) + b(0,25) = 28,25

(× 4): 12a + 2a + b = 113

$\Rightarrow$ 14a + b = 113 ...(1)

Longitud total 1057 m = 1057 mm

3a(28) + a(22) + b(21) = 1057

$\Rightarrow$ 106a + 21b = 1057 ...(2)

Resolviendo: a = 7; b = 15

$\therefore$ Total de monedas: 3(7) + 7 + 15 = 43

56. Responder V o F

I. Al dividir –42 entre 8 y 42 entre –8 se obtiene el mismo resto, por defecto y cocientes consecutivos.

II. En una división entera el cociente por defecto es siempre menor que el cociente por exceso.

III. Al dividir −42 entre −8 por defecto y por exceso se cumple: Resto por defecto + resto por exceso = −8

Resolución:

En una división entera inexacta:

- Por defecto:
  Dividendo > (divisor)(cociente por defecto)
- Por exceso:
  Dividendo < (divisor)(cociente por exceso)

I. • Dividendo −42 entre 8

Por defecto	Por exceso
−42 ⌊8 → −6, residuo +6	42 ⌊8 → −5, residuo −2

• Dividiendo 42 entre −8

Por defecto	Por exceso
42 ⌊−8 → −5, residuo 2	42 ⌊−8 → −6, residuo −6

Las restas por defecto son diferentes.
⇒ I es falsa

II. Cuando en una división entera, el divisor es negativo:

Cociente por defecto > Cociente por exceso.
⇒ II es falsa

III. En toda división entera:

Suma de residuos = |divisor|
⇒ III es falsa

∴ FFF

57. Dada la siguiente suma:

5 + 35 + 245 + ... (100 sumandos)

exprese el resultado en base 7 y dar como respuesta la suma de sus cifras, en base 10.

Resolución:

Dando forma a cada sumando en base 7

$S_1 = 5 = 5 \times 1 = 5$

$S_2 = 35 = 5 \times 7 = 50_7$

$S_3 = 245 = 5 \times 7^2 = 500_7$

$S_4 = ... = 5 \times 7^3 = 5000_7$

⋮

$S_{100} = ... = 5 \times 7^{99} = 50...000_7$

$S_1 + S_2 + S_3 ... + S_{100} = \underbrace{55...5555_7}_{100 \text{ cifras}}$

Se desea hallar la suma de las cifras del resultado:

$\underbrace{5 + 5 + 5 + ... + 5 + 5}_{100 \text{ sumandos}} = 500$

58. Hallar la cifra de segundo orden de la suma:

1 + 2 + 3 + 24 + 54 + 96 + ... + 3750

Resolución:

Convenientemente, sumamos los tres primeros valores:

S = (1 + 2 + 3) + 24 + 54 + 96 + ... + 3750

$S = \underbrace{6}_{6\times1} + \underbrace{24}_{6\times4} + \underbrace{54}_{6\times9} + \underbrace{96}_{6\times16} + .. + \underbrace{3750}_{6\times625}$

$S = 6 \times 1^2 + 6 \times 2^2 + 6 \times 3^2 + 6 \times 4^2 + ... + 6 \times 25^2$

$S = 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... 25^2)$

$\Rightarrow S = 6\left(\frac{25 \times 26 \times 51}{6}\right) = 33\,150$

∴ Cifra de segundo orden = 5

59. Calcula la suma: S = 24 + 35 + 48 + 63 + ... + 1680

Resolución:

Dando forma:

$24 = 25 - 1 = 5^2 - 1$

$35 = 36 - 1 = 6^2 - 1$

$48 = 49 - 1 = 7^2 - 1$

$63 = 64 - 1 = 8^2 - 1$

⋮

$1680 = 1681 - 1 = 41^2 - 1$

} 37 sumandos

$\underbrace{24 + 35 ... + 1680}_{S} = \underbrace{(5^2 + 6^2 + ... + 41^2)}_{37 \text{ sumandos}} - \underbrace{(1 + 1 + ... + 1)}_{37 \text{ sumandos}}$

$\Rightarrow S = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + ... + 41^2) ... - (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) - (37)$

$S = \frac{41 \times 42 \times 83}{6} - \frac{4 \times 5 \times 9}{6} - 37$

⇒ S = 23 754

También se puede resolver:

(15) 24 35 48 63 ... 1680

(9) 11 13 15

(2) 2 2

$\Rightarrow t_n = An^2 + Bn + C$, donde:

$A = \frac{2}{2} = 1;\ B = 9 - 1 = 8;\ C = 15$

Luego: $t_n = n^2 + 8n + 15$

Igualando al último término:

$n^2 + 8n + 15 = 1680 \Rightarrow n = 37$

Se desea la suma $\sum_{n=1}^{37} t_n$

$S = \sum_{n=1}^{37} (n^2 + 8n + 15)$

$S = \sum_{1}^{37} n^2 + 8\sum_{1}^{37} n + 15\sum_{1}^{37}$

$S = \frac{37 \times 38 \times 75}{6} + 8\left(\frac{37 \times 38}{2}\right) + 15 \times 37$

⇒ S = 23 754

60. Si las 3 últimas cifras de la suma de 40 sumandos:

S = 7 + 77 + 777 + ... + 77 ... 7

son $\overline{abc}$, hallar: a + b + c

Resolución:

Sumando los 3 órdenes respectivos.

S unidades = $40 \times 7 = 280$

S decenas = $39 \times 7 = 273$

S centenas = $38 \times 7 = 266$

La suma tendrá:

$$\begin{array}{r} 280\ + \\ 273 \\ 266 \\ \hline ...610 \end{array} \Rightarrow a = 6;\ b = 1;\ c = 0$$

$\therefore\ a + b + c = 7$

61. Hallar el resultado de la siguiente suma:
$S = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + ...$ sabiendo que tiene 99 términos.

Resolución:

$$S = \underbrace{1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + ... + 99 \times 100}_{99\ \text{sumandos}}$$

$$\begin{array}{rcccl} 1 \times 2 & = & 1(1 + 1) & = & 1^2 + 1 \\ 2 \times 3 & = & 2(2 + 1) & = & 2^2 + 2 \\ 3 \times 4 & = & 3(3 + 1) & = & 3^2 + 3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 99 \times 100 & = & 99(99 + 1) & = & 99^2 + 99 \end{array}$$

$S = (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 99^2) + (1 + 2 + 3 + ... + 99)$

$$\Rightarrow S = \frac{99 \times 100 \times 199}{6} + \frac{99 \times 100}{2}$$

$\therefore\ S = 333\ 300$

62. Si $\overline{SEND} + \overline{MORE} = \overline{MONEY}$, donde letras diferentes representan cifras diferentes y O es cero, hallar: E + M + R

Resolución:

$$\begin{array}{r} S\,E\,N\,D\ + \\ M\,O\,R\,E \\ \hline M\,O\,N\,E\,Y \end{array}$$

• Se observa $S + M \approx \overline{MO}$

Solo M = 1

Además: S = 9, porque en el orden anterior se tiene:

$E + \underbrace{O}_{\text{cero}} \approx N \Rightarrow$ N debe tener una cifra ($N \neq$ O cero)

Como cifras distintas son representadas con letras distintas

$E \neq N$: solo $E + 1 = N$ ... (1)

- En el orden de decenas:

$$\underbrace{\underbrace{N}_{E+1} + R = \overline{1E}}_{R = 9} \quad \text{o} \quad \underbrace{1 + \underbrace{N}_{E+1} + R = \overline{1E}}_{R = 8}$$

No porque $R \neq S$ — cumple

- Luego $D + E = \overline{1y}$ (unidades)

Puede ser: 2, 3, 4, 5, 6, 7 $\left\{\begin{array}{l}\text{Para que sumen } \overline{1y} \\ \text{(dos cifras)}\end{array}\right.$

Solo D + E = $\left\{\begin{array}{l} 12 = 5 + 7 \\ 13 = 6 + 7 \end{array}\right.$

Para que las cifras sean diferentes solo cumple:

$E = 5;\ D = 7 \Rightarrow N = E + 1 = 5 + 1 = 6$

En otros casos se repiten las cifras:

$\therefore\ E + M + R = 5 + 1 + 8 = 14$

63. Si: $\overline{abc} + \overline{db} + \overline{3ca} = \overline{bb(3b-2)(b+2)}$
hallar el valor de (a + b + c + d).

Resolución:

Ordenando la suma en forma vertical se observa $a + 3 \approx \overline{bb} \Rightarrow$ solo b = 1

Reemplazando:
$$\begin{array}{r} \overline{a1c}\ + \\ \overline{d1} \\ \overline{3ca} \\ \hline 1113 \end{array}$$

- Unidades: $c + 1 + a = ...3 = 13$
$\Rightarrow c + a = 12$ ...(1)
- Decenas: lleva 1 $\Rightarrow (1) + 1 + d + c = ...1 = 11$
$\Rightarrow d + c = 9$ ...(2)
- Centenas: lleva 1 $\Rightarrow (1) + a + 3 = 11 \Rightarrow a = 7$

$\Rightarrow$ En (1) y (2): c = 5; d = 4

$\therefore\ a + b + c + d = 7 + 1 + 5 + 4 = 17$

64. Si: $\overline{aa} \times \overline{bb} = \overline{bcd3}$, calcular a + b + c + d.

Resolución:

$$\underbrace{\overline{aa}}_{11a} \times \underbrace{\overline{bb}}_{11b} = \overline{bcd3}$$

$\Rightarrow 121 \times \underbrace{a \times b}_{\text{acaba en 3: 3 o 63}} = \overline{bcd3}$

- $a \times b = 3 = 1 \times 3$
$\Rightarrow 121 \times 3 = 363$ no tiene 4 cifras
- $a \times b = 63 = 9 \times 7$
$\Rightarrow 121 \times 63 = 7623$

$\Rightarrow$ a = 9; b = 7; c = 6; d = 2

Luego: a + b + c + d = 24

65. Si $\overline{abcd} \times 999^2 = 6578$, hallar: a + b + c + d

Resolución:

$\overline{abcd} \times 999^2 = ...6578$

$\underbrace{(\overline{abcd} \times 999)}_{\overline{...xyzw}} \times 999 = ...6578$

$\overline{...xyzw} \times (1000 - 1)$

$\Rightarrow \overline{...xyzw000} - \overline{...xyzw} = ...6578$

$\Rightarrow \overline{...xyzw000} = \overline{...xyzw} + \overline{...6578}$

Donde:

$w + 8 = 10 \Rightarrow w = 2$

$z + 7 = 9 \Rightarrow z = 2$

$y + 5 = 9 \Rightarrow y = 4$

$x + 6 = ...(w - 1) = ...1 \Rightarrow x = 5$

Se obtiene: $\overline{abcd} \times 999 = ...\overset{\overset{xyzw}{\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow}}{5422}$

Repitiendo lo anterior:

$\overline{...abcd000} = \overline{...abcd} + ...5422$

Donde: $d + 2 = 10 \Rightarrow d = 8$

$c + 2 = 9 \Rightarrow c = 7$
$b + 4 = 9 \Rightarrow b = 5$
$a + 5 = \ldots (d - 1) \Rightarrow a = 2$
$\therefore a + b + c + d = 22$

66. Si $\overline{abc} \times a = 486$; $\overline{abc} \times b = 972$ y $\overline{abc} \times c = 729$, hallar: $\overline{abc} \times \overline{cba}$

Resolución:
Hallando el producto de $(\overline{abc})(\overline{cba})$, señalando los productos parciales:

$$\begin{array}{rl} \overline{abc} \times & \\ \overline{cba} & \\ \hline 486 & \leftarrow \overline{abc} \times a \\ 972 & \leftarrow \overline{abc} \times b \\ 729 & \leftarrow \overline{abc} \times c \\ \hline 83106 & \end{array}$$

$\therefore (\overline{abc})(\overline{cba}) = 83\,106$

67. Se tiene $(\overline{abcc})(\overline{ba}) = 7\ldots71$, donde cada punto representa una cifra. ¿Cuál es el valor de $a + b + c$, sí sabemos que las tres cifras son diferentes?

Resolución:
Se observa: $(c)(a) = \ldots1$
Solo cumple $(c)(a) = 21 = 3 \times 7$
Además:

$$\begin{array}{r} 2 \\ abcc \times \\ ba \\ \hline \ldots 31 \\ \ldots 4 \\ \hline 7\ldots71 \end{array}$$

$a \times b \approx 7$; solo $b \times c = \ldots4$

Se encuentra: $a = 3$; $b = 2$; $c = 7$
$\Rightarrow 3277 \times 23 = 75\,371$ $\therefore a + b + c = 12$

68. Si: $\overline{2a3}_n \times \overline{4b4}_n = \ldots5_n$; $\overline{abc}_{(n-1)} \times 555_{(n-1)} = \ldots312_{(n-1)}$ hallar: $a + b + c$

Resolución:
- $\underbrace{\overline{2a3}_n}_{\ldots3_n} \times \underbrace{\overline{4b4}_n}_{\ldots4_n} = \ldots5_n$

  Se observa: $3 \times 4 = 12 = \ldots5_n$
  $\Rightarrow 12 = 7 + 5 = 15_7$
  Solo cumple $n = 7$
- $\overline{abc}_6 \times \underbrace{555_6}_{\text{mayor numeral de 3 cifras de base 6}} = \ldots312_6$

  $\overline{abc}_6(1000_6 - 1) = \ldots312_6$
  $\Rightarrow \overline{abc000}_6 - \overline{abc}_6 = \ldots312_6$
  $\Rightarrow \overline{\ldots000}_6 = \overline{abc}_6 + \ldots312_6$
  Donde: $c + 2 = 6 \Rightarrow c = 4$
  $b + 1 = 5 \Rightarrow b = 4$
  $a + 3 = 5 \Rightarrow a = 2$

$\therefore a + b + c = 4 + 4 + 2 = 10$

69. Calcular $(a + b + c + d + e)$ en el número $\overline{abcde4}_{(5)}$ el cual para triplicar su valor, basta con pasar la cifra 4 a la izquierda de la cifra a.

Resolución:
$N = \overline{abcde4}_5$
$3N = \overline{4abcde}_5$
$\Rightarrow 3(\overline{abcde4}_5) = \overline{4abcde}_5$
$3(\overline{abcde}_5 \times 5 + 4) = 4 \times 5^5 + \overline{abcde}_5$
Haciendo $\overline{abcde}_5 = k$
$\Rightarrow 3(k \times 5 + 4) = 4 \times 5^5 + k$
Resolviendo $k = 892 = 12032_5$
$a = 1$; $b = 2$; $c = 0$; $d = 3$; $e = 2$
$\therefore a + b + c + d + e = 8$

70. La suma de los dígitos de un número de dos cifras es 12 y el cociente de su división por su cifra de unidades es 31. ¿Cuánto vale la cifra de las decenas).

Resolución:
Sea $N = \overline{ab}$, $a + b = 12$
Además: $\overline{ab} / b = 31$ cociente
$\Rightarrow \overline{ab} = 31b \Rightarrow 10a + b = 31b$
Luego: $10a = 30b \Rightarrow a = 3b$
Como $a + b = 3b + b = 12 \Rightarrow b = 3$; $a = 9$
$\therefore$ Cifra de decenas = 9

71. Un número senario (base 6), de cuatro cifras es tal que para ser duplicado, basta con escribir sus cifras en orden inverso. Hallar la suma de sus cifras, en dicha base.

Resolución:
$N = \overline{abcd}_6$; $2N = \overline{dcba}_6$
$\Rightarrow 2(\overline{abcd}_6) = \overline{dcba}_6$
$2[6^3(a) + 6^2(b) + 6(c) + d] = 6^3(d) + 6^2(c) + 6(b) + a$
Reduciendo: $\underbrace{431a}_{\text{par: 2 o 4}} + 66b = 24c + 214d$
Sea: $a = 2 \Rightarrow 862 + 66b = 24c + 214d$
$\Rightarrow 431 + \underset{1}{33b} = \underset{3}{12c} + \underset{4}{107d}$
$\therefore a + b + c + d = 2 + 1 + 3 + 4 = 10 = 14_6$

72. La suma del dividendo y el divisor de una división inexacta es 41 veces el residuo y la diferencia de los mismos es 31 veces el residuo. Hallar el cociente.

Resolución:
En una división inexacta:

$\begin{array}{l|l} D & d \\ \cline{2-2} R & q \end{array} \Rightarrow D = dq + R$ ...(1)

$\left.\begin{array}{l} D + d = 41R \\ D - d = 31R \end{array}\right\} \begin{array}{l} D = 36R \\ d = 5R \end{array}$

En (1): $\underbrace{36R}_{D} = \underbrace{(5R)}_{d}q + R$
$\therefore$ Se obtiene: $q = 7$

73. Un número de 5 cifras que multiplicado por 4 da por resultado un número formado por las mismas 5 cifras pero dispuestas en orden invertido, hallar la suma de sus cifras.

Resolución:

$\overline{abcde} \times 4 = \overline{edcba}$

$\Rightarrow \overline{abcde} \times 4 = \overline{edcba}$ (par)

Se observa $4 \times a \approx e \rightarrow$ una cifra

solo $a = 2$

$\Rightarrow \overline{2bcde} \times 4 = \overline{edcb2}$

$4 \times e = \ldots 2$ → 3 u 8

Pero $4 \times a \approx e$

Solo cumple: $e = 8$

En forma similar se halla d y b:

$$\begin{array}{r} 333 \\ 21c78 \times \\ 4 \\ \hline 87c12 \end{array}$$

$\Rightarrow 4 \times c + 3 = \overline{3c}$

$4c + 3 = 30 + c$

$\Rightarrow c = 9$

$\therefore$ Suma de cifras: $2 + 1 + 9 + 7 + 8 = 27$

74. La suma de los cuatro términos de una división inexacta por defecto es 835, pero si la división se hubiera realizado por exceso, la suma de sus términos sería 869. Si las cocientes suman 27, hallar la suma de las cifras del dividendo.

Resolución:

División inexacta por defecto:

$D = dq_D + R_D$

$\Rightarrow D + d + q_D + R_D = 835$ ...(1)

D. I. por exceso:

$D = dq_E - R_E$

$\Rightarrow D + d + q_E + R_E = 869$ ...(2)

Además: $q_E = q_D + 1$ | $q_D = 13$

Donde: $q_D + q_E = 27$ | $q_E = 14$

En (2): $\underbrace{D}_{14d - R_E} + d + R_E = 855 \Rightarrow d = 57$

En (1): $\underbrace{D}_{13 \times 57 + R_D} + R_D = 765 \Rightarrow R_D = 12$

Luego: $D = 13 \times 57 + 12 = 753$

$\therefore$ Suma de cifras de D: $7 + 5 + 3 = 15$

75. Dos números de tres y cuatro cifras respectivamente. Determinar la posible cantidad de cifras que puede tener el producto de ellos y sus respectivos complementos aritméticos.

Resolución:

Sea N_k posee K cifras

$\Rightarrow 10^{k-1} \leq N_k < 10^k$

Luego $1 \leq CA(N_k) < 10^k$

$10^{k-1} \leq N_k \times CA(N_k) < 10^{2k}$

El CA de un número puede tener una, dos, o tantas cifras como tiene el número.

Para números de 3 y 4 cifras

$10^2 \leq N_3 \times CA(N_3) < 10^6$

$10^3 \leq N_4 \times CA(N_4) < 10^8$

$10^5 \leq \underbrace{N_3 \times CA(N_3) \times N_4 \times CA(N_4)}_{P} < 10^{14}$

$\therefore$ El producto P tendrá de 6 a 13 cifras

76. Dados tres números enteros positivos A, B y C, donde A tiene cuatro cifras más que C y B tiene dos cifras menos que A. Si $\dfrac{A^5 \times B^6}{C^3}$ tiene como mínimo 46 cifras enteras, hallar la cantidad de cifras que tiene C.

Resolución:

A posee a cifras.

B posee (a − 2) cifras.

C posee (a − 4) cifras.

Luego: $10^{a-1} \leq A \Rightarrow 10^{5a-5} \leq A^5$

$10^{a-2-1} \leq B \Rightarrow 10^{6a-18} \leq B^6$

$10^{a-4} > C \Rightarrow 10^{3a-12} > C^3$

$\Rightarrow 10^{(5a-5)+(6a-18)-(3a-12)} < \dfrac{A^5 8^6}{C^3}$

46 cifras enteras como mínimo

$46 - 1 = 5a - 5 + 6a - 18 - 3a + 12$

Resolviendo: $a = 7$

$\therefore$ C posee: $7 - 4 = 3$ cifras

77. Al dividir $CA(\overline{ab})$ entre $\overline{ab}$, se obtiene de residuo $\overline{ab} - 5$. Hallar la suma de todos los posibles valores de $\overline{ab}$.

Resolución:

$$\begin{array}{l|l} CA(\overline{ab}) & \overline{ab} \\ \hline \overline{ab} - 5 & q \end{array} \Rightarrow \underbrace{CA(\overline{ab})}_{100 - \overline{ab}} = \overline{ab} \times q + \overline{ab} - 5$$

Se obtiene: $105 = \overline{ab}(q + 2)$

$\overline{ab}$ divide exactamente a 105

$\Rightarrow \overline{ab} = 15; 21; 35 \quad \therefore \Sigma\overline{ab} = 15 + 21 + 35 = 71$

78. De las siguientes afirmaciones:

I. Si $x > 1$

$\Rightarrow \overline{kk \ldots k}_{(x)} \rightarrow$ n cifras

$\overline{kk \ldots k}_{(x)} \rightarrow (n + 1)$ cifras

$\rightarrow$ es constante $\forall\, k \in \langle 0; 1 \rangle$

II. Si "x" es un número irracional, entonces $\sqrt[5]{x^4}$ es también un número irracional.

III. El complemento aritmético del mayor número de "k" cifras en base "M" (M > 1) es siempre la unidad.

Hallar los respectivos valores de verdad.

Resolución:

I. Se observa que:

$\underbrace{\overline{kk \ldots k}_{(x)}}_{\text{n cifras}} = k(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1) = k\left(\dfrac{x^n - 1}{x - 1}\right)$

Similar: $\underbrace{\overline{kk\ldots k}_{(x)}}_{n+1 \text{ cifras}} = k = \dfrac{(x^{n+1}-1)}{x-1}$

entonces:

$$\frac{k[(x^n-1)/(x-1)]}{k[(x^{n+1}-1)/(x-1)]} = \frac{x^n-1}{x^{n+1}-1} \Rightarrow \text{es constante para todo k}$$

Pero k es entero: $k \notin \langle 0; 1\rangle$

Si $k \in \langle 0; 1\rangle$ la expresión es incorrecta.

II. Si $x = \sqrt[4]{32}$; irracional

Luego $\sqrt[5]{(\sqrt[4]{32})^4} = \sqrt[5]{32} = 2 \in \mathbb{Z}$

¡No cumple!

III. Para que la expresión sea correcta se debe indicar que es el mayor número entero:

CA(99,9) = 0,1

∴ FFF

79. En el mes de febrero del presente año José decide ahorrar cada día una cantidad igual al producto de la fecha en que se encuentra por la cantidad de días que faltan para acabar dicho mes. ¿Cuánto ahorró en febrero?

Resolución:

Sea A_{feb}: ahorro febrero

$A_{feb} = 1(27) + 2(26) + 3(25) + 4(24) + \ldots + 27(1)$

$A_{feb} = 1(28-1) + 2(28-2) + 3(28-3) + 4(28-4) + \ldots + 27(28-27)$

$A_{feb} = 28(1+2+3+\ldots+27) - (1^2+2^2+3^2+\ldots+27^2)$

$\therefore A_{feb} = 28 \times \dfrac{27\times 28}{2} - \dfrac{27\times 28\times 55}{6} = 3654$

80. En una división entera inexacta la suma de sus cuatro términos es 105. Si al dividendo y al divisor se les multiplica por 4, la suma de los cuatro términos de la nueva división es 399. ¿Cuál es el cociente primitivo?

Resolución:

Sea: D = dq + R

Donde: D + d + q + R = 105 ... (1)

Si se multiplica por 4:

4D = (4D)q + 4R

cociente no varía — residuo se multiplica por 4

⇒ 4D + 4d + q + 4R = 399 ...(2)

De (1) y (2) se obtiene:

D + d + R = 98 y q = 7

81. Calcule la suma de las cifras del mayor número de la forma $\overline{abcd}$ que dividido entre $\overline{ba}$ se obtiene 175 de cociente y por residuo $\overline{cd}$.

Resolución:

$\overline{abcd} \,|\, \overline{ba}$; residuo $\overline{cd}$, cociente 175 — En una división inexacta $\overline{ba} > \overline{cd}$

$\Rightarrow \overline{abcd} = 175 \times \overline{ba} + \overline{cd}$

$100\overline{ab} + \overline{cd} = 175\overline{ba} + \overline{cd}$

$\Rightarrow 4\overline{ab} = 7\overline{ba} \Rightarrow a = 2b$

$\Rightarrow b_{máx} = 4$, $a_{máx} = 8$; $48 > \overline{cd} \Rightarrow \overline{cd}_{máx} = 47$

∴ Se pide a + b + c + d = 8 + 4 + 4 + 7 = 23

82. Al dividir D y 14D entre d se obtuvo como residuos 4 y 17, respectivamente. ¿Cuál es el resto de dividir 210D entre d?

Resolución:

D | d, residuo 4, cociente k ⇒ D = dk + 4, Donde d > 4

14D | d, residuo 17, cociente k' ⇒ 14D = dk' + 17; 14(dk + 4) = dk' + 17

Se obtiene 39 = d(k' − 14k)

d está contenido en 39 y 17 < d ⇒ d = 39

Luego 210D = 210(dk + 4) = 210dk + 840

Como 840 | d = 39, residuo 21, cociente 21 ⇒ 210D = d × q + 21

∴ El resto es 21

83. Al efectuar una división entera, se notó que la diferencia entre el residuo por exceso y el cociente por exceso es igual a la diferencia del residuo por defecto y el cociente por defecto. Si el dividendo es un número de 2 cifras y el mayor posible, además el divisor es igual a 7, hallar el cociente.

Resolución:

Divisor: $d = 7 = R_D + R_E$

$R_E - q_E = R_D - q_D$, donde $q_E = q_D + 1$

Se obtiene: $R_E - R_D = 1$ y $R_E + R_D = 7$ ⇒ $R_E = 4$, $R_D = 3$

Dividendo: $\overline{ab} = 7q_D + 3 < 100$

Luego: $9_D < 13{,}8$ ...(1)

Como $\overline{ab}$ es máximo, q_D también

∴ De (1): $q_D = 13$

84. Hallar la cantidad de números enteros positivos de tres cifras que al ser divididos entre −420, se obtiene como residuo un número igual a diez veces el valor absoluto del cociente.

Resolución:

Como el dividendo es positivo, entonces el cociente tendrá el mismo signo que el divisor:

Divisor = −420; cociente = −q

Residuo = 10|−q| = 10q

Luego D = d(−q) + R

$\Rightarrow \overline{abc} = (-420)(-q) + 10q = 430q$

Como posee 3 cifras solamente

q = 1: $\overline{abc} = 430$ ∧ q = 2: $\overline{abc} = 860$

∴ Existen 2 números.

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2010 - II)

Al multiplicar un número de cinco cifras por 99 se obtiene un nuevo número cuyas últimas cifras son 18 828. Calcule la diferencia entre el mayor y el menor número formado con las cifras del número original.

A) 72 349 B) 74 394 C) 74 943
D) 79 342 E) 79 472

Resolución:

Sea el número: $\overline{abcde}$

Por dato: $\overline{abcde} \times 99 = \ldots 18\,828$

$\Rightarrow (\overline{abcde})(100 - 1) = \ldots 18\,828$

$\overline{abcde00} - \overline{abcde} = \ldots 18\,828$

$\overline{abcde00} = \ldots 18\,828 + \overline{abcde}$

Acomodando la suma en forma vertical:

$$\begin{array}{r} 1111 \\ \ldots 18\,828 \; + \\ \overline{abcde} \\ \hline \overline{abcde00} \end{array}$$

Analizando la suma:

- $8 + e = \ldots 0 \Rightarrow e = 2$
- $3 + d = \ldots 0 \Rightarrow d = 7$
- $9 + c = \ldots 2 \Rightarrow c = 3$
- $9 + b = \ldots 7 \Rightarrow b = 8$
- $2 + a = \ldots 3 \Rightarrow a = 1$

Luego, el mayor y menor número que se forman con las cifras del número inicial son: 87 321 y 12 378

$\therefore$ Nos piden: 87 321 − 12 378 = 74 943

Clave: C

PROBLEMA 2 (UNI 2012 - I)

Al multiplicar un número de cinco cifras por 101 se obtiene un nuevo número cuyas últimas cifras son 8513. Se sabe también que el número inicial tiene todas sus cifras distintas. Indique la cantidad de números que cumplen la condición descrita.

A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) 8

Resolución:

Sea el número: $\overline{abcde}$

Dato: $\overline{abcd} \times 101 = \ldots 8513$

$$\begin{array}{r} \overline{abcde} \; + \\ \overline{abcde00} \\ \hline \ldots 8513 \end{array} \quad \Rightarrow e = 3;\ d = 1;\ c = 2;\ b = 7$$

$a \Rightarrow$ 4; 5; 6; 8; 9 (distinto de los anteriores)

$\therefore$ existen 5 números que cumplen

Clave: C

PROBLEMA 3 (UNI 2012 - I)

Determine los litros de agua que contiene un recipiente de 17 litros de leche adulterada con agua y que pesa 17,32 kg. si un litro de leche pura pesa 1,032 kg y un litro de agua pesa 1 kg.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Resolución:

Los 17 litros pesa 17,32 kg

Si los 17 litros son de agua, entonces pesan 17 kg

Falta 17,32 kg − 17 = 0,32 kg

Cambio 1 litro de agua × 1 litro de leche

n.° litros de leche $= \dfrac{0{,}32}{0{,}032} = 10$ litros

$\therefore$ 17 − 10 = 7 litros de leche

Clave: C

PROBLEMA 4 (UNI 2012 - I)

Mi padre, que nació en la primera mitad del siglo 20, afirma que en el año x^2 cumplió x/4 años. Determine la edad que tuvo en el año 2008.

A) 83 B) 86 C) 88
D) 90 E) 92

Resolución:

Año de nacimiento $\overline{19ab}$

Se cumple: $\overline{19ab} + \dfrac{x}{4} = x^2$ $\{x = \overset{\circ}{4}$ mayor que $40\}$

$\Rightarrow x = 44$

Luego: $\overline{19ab} + 11 = 1936$, $a = 2$, $b = 5$

$\therefore$ La edad en el 2008: 2008 − 1925 = 83 años

Clave: A

PROBLEMA 5 (UNI 2012 - II)

Se tiene un número capicúa de seis cifras cuya última cifra es 2. Sea N el residuo de dividir dicho número entre 1000 y M el cociente. Si N − M = 99, calcule el valor máximo que puede tomar la suma de las cifras del número capicúa.

A) 24 B) 26 C) 28
D) 30 E) 32

Resolución:

Sea el número capicúa: $\overline{\underbrace{2bc}_{M}\underbrace{cb2}_{N}}$

$N - M = 99 \Rightarrow \overline{cb2} - \overline{2bc} = 99$

$99(c - 2) = 99$

$c - 2 = 1 \Rightarrow c = 3$

El número sería: $N = \overline{2b33b2}$

El máximo valor de la suma de cifras de N es cuando b = 9

$\therefore 2 + 9 + 3 + 3 + 9 + 2 = 28$

Clave: C

PROBLEMA 6 (UNI 2013 - II)

Determine las veces que aparece el número cinco al efectuar la suma:

$7^2 + (77)^2 + (777)^2 + (7777)^2 + (77777)^2$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Resolución:

$$\begin{aligned} 7^2 &= 49\ + \\ 77^2 &= 5929 \\ 777^2 &= 603729 \\ 7777^2 &= 60481729 \\ 77777^2 &= 6049261729 \\ \hline & 61103\text{⑤}316\text{⑤} \end{aligned}$$

$\therefore$ El 5 aparece 2 veces

Clave: B

PROBLEMA 7 (UNI 2013 - II)

Al multiplicar un número A de cuatro cifras por 999 se obtiene un número que termina en 5352. Calcule la suma de las cifras del número A.

A) 18 B) 19 C) 20
D) 21 E) 22

Resolución:

Sea: $A = \overline{abcd}$

Se cumple que: $\overline{abcd} \times 999 = \ldots 5352$

$(\overline{abcd})(1000 - 1) = \ldots 5352$; $\overline{abcd000} - \overline{abcd} = \ldots 5352$

Luego:

$$\begin{aligned} &\overline{abcd000}\ - \\ &\quad\ \overline{abcd} \\ \hline &\ \ \ldots 5352 \end{aligned} \qquad \Rightarrow a = 2;\ b = 6\ ;\ c = 4;\ d = 8 \\ \Rightarrow A = 2648$$

$\therefore\ 2 + 6 + 4 + 8 = 20$

Clave: C

PROBLEMA 8 (UNI 2014 - I)

Determine cuántos pares de números naturales de dos dígitos cumplen con que su diferencia sea 50.

Considere que el par {x; y} es igual al par {y; x}

A) 10 B) 30 C) 40
D) 49 E) 50

Resolución:

Sabiendo que: $\{x; y\} \equiv \{y; x\}$

Además:

$\overline{ab} - \overline{mn} = 50$

60	10 ⇒ {60; 10}		
61	11 ⇒ {61; 11}		Hay 40 pares de números naturales
62	12 ⇒ {62; 12}		
⋮	⋮	⋮	
99	49 ⇒ {99; 49}		

Clave: C

PROBLEMA 9 (UNI 2014 - I)

Si se cumple que $\overline{abc} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}$, calcule el valor de $a + b - c$, sabiendo que a, b, c son positivos.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Resolución:

Del enunciado: $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = \overline{abc}$

Entonces: $a + b = 10 \Rightarrow a + c = 9 \Rightarrow a = 1$

Piden: $a + b - c = 1 + 9 - 8 = 2$

Clave: A

PROBLEMA 10 (UNI 2015 - I)

Se sabe que en una división entera el divisor es 50 y el residuo es 15. ¿Cuántas unidades como mínimo se le debe disminuir al dividendo, para que el cociente disminuya en 13 unidades?

A) 614 B) 615 C) 616
D) 617 E) 618

Resolución:

Del enunciado: $\begin{array}{r|l} D & 50 \\ \hline 15 & q \end{array} \Rightarrow D = 50q + 15$

$\begin{array}{r|l} D - \overset{\text{mín.}}{n} & 50 \\ \hline \underset{\text{r máx.}}{49} & q - 13 \end{array}$

$D - n = 50(q - 13) + 49$

↓

$50q + 15 - n = 50q - 650 + 49$

$\Rightarrow 15 + 650 - 49 = n \quad \therefore\ 616 = n$

Clave: C

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Encontrar el numeral de dos cifras significativas de la base 16, tal que sea igual a la suma de todas las cifras que se emplean en dicho sistema a excepción de dichas dos cifras.

A) $\overline{\alpha A}$ B) $\overline{\beta 6}$ C) 69
D) $\overline{6\alpha}$ E) $\overline{9\gamma}$

2. Hallar la suma de los 37 términos de la siguiente serie de números que forman una PA.

$$\overline{10b};\ 116;\ ...;\ \overline{b01}$$

A) 11 211 B) 11 311 C) 11 411
D) 11 511 E) 11 611

3. Hallar: x + y + z + v, si: $\overline{xyz}_9 + \overline{2z3}_9 + \overline{yxz}_9 = \overline{vx74}_9$

A) 13 B) 10 C) 12
D) 16 E) 19

4. Determinar la suma de los siguientes números, sabiendo que forman una PA:

$$M = 10_n + 24_n + 41_n + ... + 412_n$$

Dar la respuesta en el sistema decimal.

A) 2054 B) 2044 C) 2034
D) 2024 E) 2014

5. Hallar la suma de todos los números pares, comprendidos entre 200 y 800, que se pueden formar con las cifras: 0; 2; 3; 5; 6 y 9.

A) 31 992 B) 31 892 C) 31 792
D) 31 692 E) 31 592

6. Efectuar: $S = \underbrace{1 \times 7 + 2 \times 8 + 3 \times 9 + ...}_{28\text{ sumandos}}$

A) 10 110 B) 10 120 C) 10 130
D) 10 140 E) 10 150

7. Si la suma de los "n" primeros números impares mayores que "n" es 253, hallar "n", sabiendo que es impar.

A) 9 B) 7 C) 11
D) 13 E) 17

8. En una perforación diamantina se avanza: 42 cm el primer día; 49 cm el segundo día; 56 cm el tercer y así sucesivamente hasta que en el 24.° día y el último día avanzaron 4,48 m en total. ¿Cuál fue el avance acumulado?

A) 44,25 m B) 44,75 m C) 43,05 m
D) 42,25 m E) 42,75 m

9. Sabiendo que: $S_n = \underbrace{92 + 90 + 88 + ...}_{\text{"n" sumandos}}$

calcular el valor de: $T = S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_{40}$

A) 55 520 B) 52 350 C) 25 550
D) 55 600 E) 54 120

10. Si: $\overline{1b} + \overline{2b} + \overline{3b} + ... + \overline{abb} = 12\,691$
calcular: a + b

A) 10 B) 11 C) 13
D) 14 E) 12

11. Calcular el valor de: a + c + e, si se cumple que:

$$\overline{a3c}_8 + 93_{11} + \overline{bd4}_8 = \overline{edb7}_8$$

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

12. ¿Cuántos números de tres cifras existen, tales que al sumarles la suma de sus cifras, resulte un número de tres cifras iguales?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

13. Si: $52_n + 52_{n+1} + 52_{n+2} + ... + 52_{3n} = 1080$
hallar: $25_n + 25_{n+1} + ... + 25_{3n}$, expresado en el sistema decimal:

A) 540 B) 860 C) 625
D) 720 E) 495

14. De una PA de 84 términos, se cumple que la suma del tercero y antepenúltimo término es 123. Hallar la suma de todos los términos.

A) 5166 B) 5412 C) 5658
D) 5904 E) N. A.

15. Efectuar: P = 6 + 96 + 996 + ...(20 sumandos)
Dar como respuesta la suma de las cifras de P.

A) 18 B) 21 C) 48
D) 52 E) 36

16. Hallar: a + b, sabiendo que:
$\overline{a2b} + \overline{a3b} + \overline{a4b} + ... + \overline{a8b} = 5992$

A) 14 B) 15 C) 16
D) 17 E) 18

17. Si la suma de los "n" primeros números enteros positivos resulta un número de tres cifras iguales, hallar "n^2".

A) 1225 B) 625 C) 36
D) 100 E) 1296

18. Efectuar: A + B
A = 11 + 13 + 15 + ... (50 sumandos)
B = 9 + 17 + 25 + ... (50 sumandos)

A) 13 250 B) 12 250 C) 15 500
D) 14 500 E) N. A.

19. Calcular el valor de la siguiente sumatoria:
$11 + 22 + 33 + ... + \overline{aba}$
sabiendo que: $a + b = 6$

A) 2653 B) 2530 C) 3036
D) 2783 E) N. A.

20. Si al sumar los 25 términos de la progresión aritmética:
45_n; 50_n; 54_n; ...$\overline{abc}_n$, se obtuvo como resultado: $\overline{vxyz}_n$.
hallar: $a + b + c + v + y + z + n$

A) 25 B) 26 C) 27
D) 28 E) 29

21. Si la siguiente serie está en PA y tiene 76 términos:
$\overline{ab}$; $\overline{am}$; $\overline{na}$; ...; $\overline{aab}$
Determinar la suma de dichos términos sabiendo que son enteros.

A) 17 070 B) 15 070 C) 12 224
D) 14 000 E) 14 060

22. Hallar la razón de una PA, si la suma de sus "n" términos es $n(5n + 3)$.

A) 2 B) 4 C) 8
D) 10 E) 18

23. Si la suma de los términos de la siguiente PA:
31; ...; $\overline{abc}$; 139; ...; $\overline{(2A)59}$ es 2900,
hallar el valor de: $a + b + c$

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

24 La siguiente serie de números en PA:
$\overline{ab}_n$; $\overline{a7}_n$; $\overline{b1}_n$; ...; $\overline{1ba}_n$. consta de 36 términos.
Hallar la suma de los términos en base "n".

A) 2300 B) 2308 C) 3400
D) 4400 E) N. A.

25. El primero y último término de una PA son $\overline{36a}$ y $\overline{aa}$, respectivamente, su razón es "a" y consta de 51 términos. hallar la suma de los términos.

A) 11 016 B) 11 036 C) 11 056
D) 11 076 E) N. A.

26. Hallar la suma de todos los números capicúas de 3 cifras, que se pueden formar con las cifras: 0; 1; 3; 6; 7 y 9. Dar como respuesta la suma de sus cifras.

A) 17 B) 18 C) 19
D) 20 E) 21

27. Dadas las series:
Primera: 2
Segunda: 4; 6
Tercera: 8; 10; 12
Cuarta: 14 ; 16 ; 18 ; 20
Hallar la suma de las cifras, de la suma de todos los términos de la centésima serie.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

28. En una oficina hay $\overline{abc}$ útiles de escritorio, de los cuales $\overline{a0c}$ son plumones, $\overline{ab}$ son estilógrafos, "a" son computadoras y "c" son cuadernos. Hallar el número de útiles si está comprendido entre 150 y 300.

A) 240 B) 223 C) 235
D) 225 E) 248

29. De 1147 postulantes, se sabe que $\overline{aba}$ de ellos saben Aritmética; $\overline{bab}$ saben Álgebra y $\overline{ab}$ saben los dos cursos. Hallar: $a + b$

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

30. De Pepe, se sabe lo siguiente:
- Año de nacimiento: $\overline{19ab}$
- Día de nacimiento: $\overline{ac}$
- Mes de nacimiento: $\overline{cb}$
- Además: $\overline{19ab} + \overline{ac} + \overline{cb} = 1975$

¿Cuántos años tendrá Pepe en el 2004?

A) 51 B) 57 C) 64
D) 72 E) 71

31. Si se cumple: $\overline{1a}_{14} + \overline{1a}_{13} + \overline{1a}_{12} + ... + \overline{1a}_{(a+1)} = 132$
hallar el valor de "a".

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) N. A.

32. Encontrar el número de 4 cifras, sabiendo que sumado con el triple de la suma de sus cifras da 7939. Dar como respuesta la cifra de unidades.

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 7

33. Hallar el valor de:
$S = 5 + 55 + 555 + ...$("n" sumandos)

A) $\frac{1}{81}(10^{n-1} - 9n - 10)$ B) $\frac{1}{27}(10^{n-1} - 9n - 10)$

C) $\frac{5}{27}(10^{n-1} - 9n - 10))$ D) $\frac{5}{81}(10^{n+1} - 9n - 10)$

E) $\frac{5}{9}(10^{n-1} - 9n - 10)$

34. Sabiendo que:
$\overline{abcd} = 22_6 + 30_6 + 34_6 + ...$ (35 sumandos)
hallar: $a + b + c + d$

A) 21 B) 20 C) 19
D) 18 E) 17

35. Si la suma de tres números de una sola cifra cada uno, diferentes entre sí, es 18; hallar la suma de todos los números de tres cifras diferentes entre sí, que se pueden formar con dichas cifras.

A) 3996 B) 4886 C) 3896
D) 4896 E) N. A.

36. La suma de 25 números enteros y consecutivos es 900. Hallar la suma de los números anteriores a dichos 25 números.

A) 673 B) 726 C) 276
D) 267 E) 246

37. Hallar la suma de todos los números de 4 cifras que no son capicúas. Dar la suma de sus cifras.

A) 17 B) 15 C) 18
D) 19 E) N. A.

38. Sea: $a_1 = 2$

$a_n = a_{n-1} + 2n \ (n \geq 2)$

calcular "k", si:

$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k = 2280$

A) 18 B) 19 C) 20
D) 21 E) 22

39. Hallar: $\overline{abc}$, si: $\overline{a7c} + \overline{c6a} + \overline{5b9} = \overline{1c26}$

A) 374 B) 394 C) 384
D) 484 E) 396

40. Si: $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{dd} = \overline{(c-1)dd}$

hallar: a + c + b

A)10 B) 11 C) 9
D) 12 E) 13

41. Calcular la suma de las cifras del resultado de operar:

$7 + 97 + 997 + 9997 + ... + \underbrace{999...997}_{80 \text{ cifras}}$

A) 92 B) 93 C) 94
D) 95 E) 96

42. Con 1540 canicas se forma una pirámide de base triangular; ¿cuántas canicas hay en el cuarto nivel medido desde la base?

A) 17 B) 136 C) 210
D) 120 E) 118

43. Si se cumple que:

f(1) = 4; f(2) = 10; f(3) = 18; f(4) = 28; f(5) = 40

Encontrar el valor de S:

$$S = \sum_{n=1}^{0} f(n)$$

A) 3250 B) 3300 C) 3350
D) 3400 E) 3500

44. Si: $\overline{a74b} + \overline{5ba2} + \overline{c7a} = \overline{bba68}$

hallar el valor de "c".

A) 2 B) 4 C) 6 D) 5 E) 3

45. Hallar la suma de todos los números de la forma $\overline{abab}$ que se puedan formar con las cifras: 0; 2; 7; 8 y 9. La mayor cifra del resultado es:

A) 6 B) 8 C) 10
D) 9 E)7

46. Hallar: "a + b + c"; si se sabe que:

$\overline{cabb} + \overline{abcc} = 11\,499$

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

47. Hallar: a + b + c; si: $\overline{ab(a-4)} + \overline{bca} = 1010$

A) 16 B) 15 C) 17
D) 12 E) 14

48. Si: $x = 1981(1 + 2 + 3 + ... + 1982)$

$y = 1982(1 + 2 + 3 + ... + 1981)$

señale lo correcto:

A) $x < y - 1$ B) $x < y - 2$ C) $x < y - 3$
C) $x > y$ E) $x = y - \frac{1}{2}$

49. Hallar: P + Q + R, sabiendo que:

$P = 1 \times 5 + 2 \times 6 + 3 \times 7 + ... + 15 \times 19$

$Q = 4 + 7 + 7 + 11 + 10 + 15 + ...$ (21 sumandos)

$R = 3 + 6 + 11 + 18 + ...$ (15 sumandos)

A) 4259 B) 3779 C) 3449
D) 1249 E) N. A.

50. Determinar las 2 últimas cifras de:

$$\begin{array}{r} \overbrace{4242...4242}^{40 \text{ cifras}} + \\ 373...7373 \\ 42...4242 \\ \vdots \quad \vdots \\ 42 \\ 3 \end{array}$$

A) 50 B) 20 C) 30
D) 80 E) N. A.

51. Determinar: A + N

$\overline{2A} + \overline{3A} + \overline{4A} + ... + \overline{10A} = \overline{ANA}$

A) 4 B) 13 C) 9
D) 10 E) 12

52. Se disponen bolas de billar formando un cuadrado con ellas, luego encima de este se forma otro cuadrado con una bola menos por lado y así sucesivamente hasta formar una pirámide de base cuadrangular. Si la base mayor tiene 12 bolas por lado, hallar el total de bolas utilizadas.

A) 325 B) 720 C) 625
D) 650 E) 520

53. Sabiendo que: $\overline{cm4}_7 + \overline{mac}_7 = \overline{cdcm}_7$
calcular el valor de: c + m + a + d

A) 10 B) 9 C) 8
D) 5 E) 11

54. Si: $\overline{mabc} + \overline{mbc} + \overline{mc} = \overline{100m0}$
calcular: E = a + b + c + m

A) 9 B) 10 C) 12
D) 14 E) N. A.

55. Si: $\overline{aa} + \overline{bb} + \overline{cc} = 198$, calcular:
$S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$
Dar como respuesta la suma de sus cifras.

A) 9 B) 12 C) 15
D) 18 E) 27

56. Hallar el valor de (a + b), si se cumple:
$\overline{aba} = \overline{aa} + \overline{bb} + 443$

A) 11 B) 10 C) 12
D) 13 E) 14

57. Si: $\overline{a83} + \overline{5b9} + \overline{64c} = 1659$
hallar: a + b + c

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

58. ¿Cuántos números de la forma $\overline{aba}$ existen, tales que la suma de las cifras de su CA sea 19?

A) 3 B) 4 C) 9
D) 19 E) 13

59. Si: $CA(\overline{abc}) = \overline{(a+1)(c-3)(a-3)}$
calcular: a + b + c

A) 14 B) 15 C) 16
D) 17 E) 18

60. Hallar la suma de los complementos aritméticos de los números capicúas de tres cifras, cuya cifra central sea 5.

A) 4000 B) 4995 C) 4005
D) 4015 E) N. A.

61. Cuántos valores toma "n", si está comprendido entre 4 y 16, además: $\overline{abc}_n = 2(\overline{cba}_n)$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

62. Si $CA(\overline{abc}) - CA(\overline{mn}) = 493$
Además se sabe que: $\overline{abc} + \overline{mn} = 557$
Indicar el mayor de los números.

A) 482 B) 428 C) 111
D) 911 E) 452

63. Se resta un número capicúa de 3 cifras de otro capicúa de 4 cifras, obteniéndose como resultado un capicúa de 2 cifras. Indicar la cifra central del sustraendo.

A) 1 B) 4 C) 5 D) 8 E) 7

64. Hallar (a + b + c), si $\overline{abc}$ es igual a la suma del doble de su complemento aritmético más el CA de la suma de las cifras que no forman el número.

A) 23 B) 16 C) 15
D) 20 E) 11

65. En una sustracción, la suma de sus tres términos es 7452; si el sustraendo es 4/9 menos que el minuendo, hallar la diferencia.

A) 1662 B) 1660 C) 1658
D) 1656 E) N. A.

66. Si el numeral $\overline{(p+2)(q-3)(p+3)q}_7$ excede al numeral $\overline{abcd}_7$, se obtiene $\overline{(p-1)qp(q+1)}_7$. Hallar a + b + c + d.

A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 16

67. En una sustracción, la suma de sus términos tomados de dos en dos son: 1277; 961 y 746. Hallar el producto de cifras del sustraendo, si la suma de cifras de la diferencia es impar.

A) 10 B) 12 C) 36
D) 15 E) N. A.

68. En una sustracción la diferencia de los dos menores términos es 66. Si el minuendo es el cuádruple del sustraendo, hallar el mayor de los términos.

A) 120 B) 140 C) 132
D) 99 E) 144

69. ¿Cuántos números de tres cifras existen, tales que al restarle su CA dan como diferencia un número de 2 cifras que termina en cero?

A) 11 B) 10 C) 7
D) 8 E) 9

70. La diferencia: $\overline{4ab} - \overline{ba4}$ es un número de tres cifras; si: $\overline{ab} - \overline{ba} = \overline{w4}$, hallar: 2a + 3b.

A) 17 o 22 B) 20 o 32 C)18 o 52
D) 32 o 28 E)19 o 21

71. Si: $\overline{abc} + \overline{bac} = \overline{dc2}$, hallar: a + b + c + d

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 16

72. Hallar un número de 3 cifras, sabiendo que es igual a 9 veces la suma de sus cifras de su CA.

A) 243 B) 234 C) 108
D) 117 E) 171

73. ¿Cuántos números de 4 cifras diferentes existen, tales que su CA sea menor que 1000?

A) 504 B) 720 C) 648
D) 729 E) 336

74. El CA de $\overline{abc}$ es $8a + 6b + 3c$, ¿cuántos valores puede tomar $\overline{abc}$?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

75. ¿En cuántos sistemas de numeración de base mayor que 10 y menor que 20, se cumple que un número de 3 cifras al invertir el orden de sus cifras se hace el doble?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

76. Si: $\overline{abcd} - \overline{dcba} = \overline{m9b4}$, además: $a + d > 8$
calcular: $a + b + c + d + m$

A) 21 B) 22 C) 23
D) 24 E) 25

77. Si a un número de 3 cifras en base "k" se resta el que se obtiene de invertir el orden de sus cifras da por diferencia $\overline{nmp}_k$. Determinar la suma de todos los números de dos cifras diferentes que se pueden formar con las cifras m, n y p sabiendo que son diferentes entre sí:

A) $2k^2 - 1$ B) $4k^2 - 1$ C) $4(k^2 - 1)$
D) $k^2 - 1$ E) $2(k^2 - 1)$

78. Si $CA(\overline{abcd}) = \overline{ab} \times \overline{cd}$, hallar: $a + b + c + d$

A) 19 B) 21 C) 23
D) 20 E) 25

79. $CA\left(\overline{mn\left(\frac{k}{5}\right)}\right)_{13} = \overline{\left(\frac{m}{3}\right)(2n)\left(\frac{k}{8}\right)}_{13}$, calcular $k - m \times n$

A) 12 B) 13 C) 3
D) 4 E) 5

80. Si el CA de $\overline{a7b(b+2)}$ es $\overline{(d-1)bcd}$
hallar el valor de: $a + b + c + d$

A) 17 B) 18 C) 15
D) 23 E) 19

81. Se cumple que: $\overline{mup} - \overline{emt} = \overline{pum}$
además: $e - t = 3$ y $CA(u) = t$
Calcular la suma de las cifras de $\overline{muppt7}$.

A) 27 B) 29 C) 31
D) 30 E) 23

82. Determinar un número de tres cifras, sabiendo que cuando se le suma 100, se obtiene el cuádruple de su CA.

A) 780 B) 290 C) 620
D) 704 E) 520

83. Si: $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{mn3}$ y $b = a + c$
hallar $a + b^2 + c^3$

A) 90 B) 74 C) 96
D) 66 E) 79

84. ¿Cuántos números de 3 cifras que empiezan en 8, tienen un CA cuya suma de cifras es 15?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

85. Si: $\overline{4a4b}_6 - \overline{23c4}_6 = \overline{d344}_6$
hallar: $a + b + c + d$

A) 6 B) 4 C) 9 D) 10 E) 8

86. Tenemos el numeral $\overline{abc}_7$ al cual le restamos el número que resulta de invertir el orden de sus cifras y resulta un numeral de la forma:
$\overline{(x+1)y(2x-1)}_7$. Si: $a + b + c = 14$,
Hallar "b".

A) 4 B) 5 C) 6
D) 2 E) N. A.

87. Calcular: $\overline{pm} + \overline{2n}$
si: $CA(\overline{abbb}_8 - \overline{bbba}_8) = \overline{pmn2}_8$

A) 40 B) 72 C) 80
D) 60 E) 84

88. Si: $CA(\overline{ab(c+1)}_7) = \overline{bac}_7$ y $\overline{ab}_8 - \overline{ba}_7 = \overline{2x}_8$
determinar: $a \times b \times c$

A) 24 B) 36 C) 80
D) 50 E) 42

89. Calcular la suma de los complementos aritméticos de los números de tres cifras que terminan en 7.

A) 40 220 B) 42 320 C) 40 320
D) 52 320 E) 47 220

90. Si: $\overline{ab} \times b = \overline{c99}$, calcular: $CA(a + b + c)$

A) 72 B) 85 C) 15
D) 45 E) N. A.

91. Si: $\overline{7ab4} - \overline{cdOb} = \overline{a7c8}$, donde: O = cero. Determinar $a + b + c$

A) 12 B) 10 C) 11
D) 13 E) N. A.

92. Si: $CA(\overline{mnp}) + CA(\overline{pnm}) = 1190$ y $\overline{mnp} - \overline{pnm} = 3\ldots$
hallar $m + n - p$

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

93. Si: $CA(\overline{abc}) = \overline{\left(\frac{a}{2}\right)(2b)(4c)}$, hallar: $(a + b - c)^2$

A) 36 B) 49 C) 25
D) 121 E) 100

94. Hallar: c + d + e, si: $\overline{5cde} - \overline{ed0c} = 2579$

A) 11 B) 12 C) 13
D) 15 E) 9

95. La suma de los 3 términos de una sustracción es 1120; si el sustraendo es los 2/5 de la diferencia, entonces el menor de los tres términos se encuentra comprendido entre:

A) 140 y 152 B) 162 y 180 C) 152 y 165
D) 148 y 160 E) 146 y 156

96. Si: $CA(\overline{abc}) = a \times c$, ¿cuál es la suma de todos los valores de $\overline{abc}$?

A) 7946 B) 8358 C) 8595
D) 8818 E) 9236

97. Calcular: $\overline{abc}$, si:

$\overline{abc} = \overline{cba} + \overline{2xy} \quad \wedge \quad \overline{abc} = 1535 - \overline{cba}$

A) 597 B) 792 C) 458
D) 819 E) 916

98. Si: $\overline{abc}_5 - \overline{cba}_5 = \overline{def}_5 \quad \wedge \quad (\overline{def}_5 - \overline{fed}_5)(\overline{pq}) = 3744$, calcular $\overline{pq}$.

A) 12 B) 15 C) 21
D) 74 E) 78

99. Sabiendo que $CA(\overline{abc}) - \overline{cba} = 254$ y $a - c = 2$, calcular: $a \times b \times c$

A) 81 B) 90 C) 10
D) 56 E) 16

100. Calcular $CA(\overline{mcdu})$ sabiendo que $\overline{mcdu}$ es el menor posible y que $m \times c \times d \times u = 315$.

A) 4831 B) 8421 C) 6643
D) 249 E) 8643

101. Si la suma de los CA de los números: $\overline{1n2}$; $\overline{2n3}$; $\overline{3n4}$; ...; $\overline{8n9}$ es 4196. Calcular el valor de "n".

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

102. Si: $\overline{abc}_n - \overline{cba}_n = \overline{(x-1)y(x+1)}_n \wedge \overline{xy} + \overline{yx} = \overline{cb2}$ hallar "a".

A) 6 B) 8 C) 5
D) 7 E) 9

103. En la multiplicación: $\overline{abc} \times \overline{de} = 17\,949$, si el multiplicando fuera $\overline{a(b+2)(c-3)}$, el producto sería 18 476. Calcular: "a + b + c".

A) 18 B) 19 C) 20
D) 21 E) 22

104. Al efectuar el producto de 124 por otro cuya cifra de unidades era 5, por error se tomó 3 en vez de 5, obteniéndose 5332. Hallar el producto verdadero.

A) 5780 B) 5580 C) 5850
D) 5760 E) 5820

105. Si: A, B y C tienen 15; 12 y 8 cifras enteras, ¿cuántas cifras puede tener M?

$$M = \left[\frac{A \times B}{C}\right]^3$$

A) De 51 a 61 B) De 52 a 59
C) De 60 a 69 D) De 52 a 60
E) N. A.

106. De los números enteros mayores que 1, ¿cuál es el menor de los que multiplicados por 12 912 da un resultado cuya terminación es 12 912? Dar como respuesta la suma de sus cifras.

A) 13 B) 14 C) 15
D) 16 E) 17

107. En la multiplicación: $\overline{abc} \times \overline{de} = \overline{mnpqr}$. Si el multiplicando fuera $\overline{a(b+a)(c-3)}$ el producto sería $\overline{m(n+1)(p-3)q(r-3)}$. Hallar: d + e

A) 6 B) 5 C) 4
D) 9 E) 7

108. Si: $\overline{abcd}_8 \times 777_8 = \overline{\ldots 4352}_8$
hallar: a + b + c + d (en base 10).

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

109. ¿Cuántos números N < 100 cumplen que el cuadrado de su CA es 5N?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) Más de 4.

110. Si $375(N) = \overline{\ldots\ldots b2a}$ y $427(N) = \overline{\ldots 02x}$; calcular las tres últimas cifras de 156(N), sabiendo además que $3(\overline{aba}) = \overline{xy95}$.

A) 235 B) 234 C) 288
D) 188 E) 328

111. Aumentado en 13 cada uno de los factores de una multiplicación, el producto aumenta en 1612. Hallar el producto original si la diferencia de sus factores es 33.

A) 1808 B) 1908 C) 2808
D) 2816 E) 3016

112. Hallar: a + b + c + d + e, si $5(\overline{abcde7}) = \overline{7abcde}$

A) 17 B) 18 C) 19
D) 20 E) 21

113. Si: $77(\overline{aabb})$ termina en ...041; hallar a + b.

A) 7 B) 8 C) 6
D) 5 E) 9

114. ¿Cuál es el menor número por el cual es necesario multiplicar a 7 para obtener otro formado por únicamente cifras 3? Dar como respuesta la suma de sus cifras.

A) 25 B) 27 C) 29
D) 28 E) 35

115. Hallar el producto total de la siguiente multiplicación sabiendo que la diferencia de sus productos parciales es 45.

$$\overline{(a+2)(a+3)} \times \overline{a(a+1)}$$

A) 1308 B) 1435 C) 1035
D) 3466 E) 1672

116. Si: $9[\overline{aa(2A)}]$ es el producto de 4 números consecutivos. Hallar: "a"

A) 1 B) 2 C) 4 C) 3 E) 5

117. Sea el número $\overline{abcde3}_5$, el resultado de triplicar dicho número resulta $\overline{3abcde}_5$.
Hallar: a + b + c + d + e (en base 10).

A) 9 B) 11 C) 13
D) 14 E) 12

118. Calcular el valor de a + b + c; si:
$\overline{abc} \times a = 468$; $\overline{abc} \times b = 702$; $\overline{abc} \times c = 936$.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 9

119. Si: $\overline{abc} \times 19 = ...541$; $\overline{abc} \times 13 = ...107$, hallar las cuatro últimas cifras de $10 \times \overline{abc}$

A) 2390 B) 2590 C) 2190
D) 2690 E) 2790

120. Si: $\overline{aa} \times \overline{bb} \times \overline{ccc} = \overline{14102cc}$; hallar: a + b

A) 8 B) 9 C) 12
D) 14 E) 10

121. Si: $\overline{ab} \times \overline{ba} \times \overline{aba} = 1\,007\,473$; hallar el valor de a + b.

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

122. Si: $P = \dfrac{Q^2R^4}{S}$, donde S tiene 19 cifras, Q tiene 6 cifras y P tiene 11 cifras. ¿Cuántas cifras tiene R?

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

123. Si: $\overline{mnpq} \times 999 = ...5317$, calcular: m + n + p − q.

A) 16 B) 24 C) 21
D) 22 E) 18

124. Si A tiene 2 cifras y B tiene 5 cifras, hallar la diferencia entre la máxima y mínima cantidad de cifras que puede tener el resultado de A^2B^3.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

125. Hallar un número de cuatro cifras que multiplicado por 53 termina en 4987. Dar como respuesta la suma de cifras del número hallado.

A) 24 B) 25 C) 26
D) 27 E) 23

126. En qué cifra termina el siguiente producto:

$$(3 + 1)(3^2 + 1)(3^3 + 1)(3^4 + 1)\,...(3^{50} + 1)$$

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

127. Los números A, B y C tienen n; n + 1 y n + 2 cifras respectivamente. Si la expresión:
$E = A^4B^3C^2$ tiene por lo menos 98 cifras, ¿cuántas tendrá como máximo?

A) 108 B) 109 C) 105
D) 106 E) 107

128. Al multiplicar un número de cuatro cifras por 7 se obtiene un número que termina en 6638. Hallar la suma de cifras del multiplicando.

A) 12 B) 14 C) 10
D) 11 E) N. A.

129. Un número es tal, que multiplicado por 2, por 3 y por 4 da 3 números cuyo producto es 81 000. ¿Cuál es el número?

A) 13 B) 19 C) 18
D) 14 E) 15

130. Sabiendo que: $\overline{xy6} \times \overline{xy6} = \overline{...xy6}$, hallar: x + y

A) 10 B) 9 C) 11
D) 12 E) 8

131. Sabiendo que: $\overline{2abcde} \times 3 = \overline{abcde2}$
hallar: $\overline{abcde}$

A) 57 214 B) 63 284 C) 72 514
D) 85 714 E) N. A.

132. Si: $\overline{abcd}_7 \times 666_7 = ...3211_7$
hallar: a + b + c + d (en base 10).

A) 17 B) 14 C) 15
D) 16 E) 18

133. Un alumno tiene que multiplicar un número por 30; pero se olvida de poner el cero a la derecha del producto por lo que se obtiene un resultado que difiere del verdadero en 5751. Hallar dicho número.

A) 639 B) 1917 C) 213
D) 219 E) N. A.

134. Hallar: a + b + c + d ; si:
$\overline{abcd} \times \overline{bd} = 43\,904$
$\overline{bc} \times \overline{bd} = 1184$

A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

135. Si se cumple que: $(\overline{1ab})(CA(\overline{ab})) = 8844$, determinar el valor de $a \times b$

A) 12 B) 15 C) 36
D) 14 E) 18

136. Se tiene el producto de tres números. Si el primero se aumenta en 7 el producto aumenta en 13 776, pero si el aumento hubiera sido 9 al segundo, el producto aumentaría en 15 552. Calcular el tercer número si los otros dos suman 77.

A) 47 B) 48 C) 49
D) 50 E) 51

137. Sabiendo que: $\overline{ab3} \times \overline{cab} = ...\overline{6b4}$, hallar a + b − c

A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11

138. Hallar la suma de todas las cifras que faltan en el producto:

```
   4 * *  ×
     * * 5
   -------
   * 1 * *
   4 * 3
 8 * *
 ---------
 * * * 9 *
```

A) 54 B) 53 C) 52
D) 51 E) 50

139. Sea el producto: $\overline{mn}^2 \times \overline{pm} \times n \times m \times p = \overline{mnmnmn}$
hallar: m + n + p

A) 8 B) 10 C) 14
D) 11 E) N. A.

140. En la multiplicación de: $\overline{abc} \times \overline{mn} = \overline{depqr}$, si el multiplicando fuera: $\overline{a(b+3)(c-1)}$ el producto sería: $\overline{d(e+1)(p+5)q(r+8)}$. Hallar: m + n

A) 6 B) 5 C) 7
D) 9 E) N. A

141. Si el producto de multiplicar $\overline{mnpq}$ por 9 es $\overline{rqqqq}$, calcular: m + n + p + q + r.

A) 18 B) 35 C) 25
D) 30 E) 32

142. Si: $\overline{pqrs} \times 999 = ...5317$, calcular: p + q + r − s.

A) 16 B) 24 C) 21
D) 15 E) 18

143. La suma de dos números es 84, los cocientes de estos números con un tercero son 4 y 6, teniendo como residuo 1 y 3 respectivamente. Calcular la diferencia positiva de estos números.

A) 10 B) 12 C) 14
D) 16 E) 18

144. Al dividir un número entero que es el mayor posible por 60, se obtiene un cociente que es la quinta parte del resto. Calcular dicho número.

A) 700 B) 705 C) 710
D) 715 E) 720

145. En una división inexacta el divisor y el resto valen 8 y 13, el dividendo excede al cociente en 356. ¿Cuánto vale el cociente?

A) 29 B) 39 C) 49
D) 59 E) 69

146. La suma de dos números es 611, su cociente 32 y el resto de su división es el más grande posible. ¿Cuál es el menor?

A) 24 B) 26 C) 28
D) 18 E) 16

147. En la división de $\overline{abcde}$ por 37 se obtuvo 4 residuos máximos. Calcular (a + b + c + d + e).

A) 33 B) 34 C) 35
D) 36 E) 37

148. Si al dividir $\overline{abc}$ por $\overline{ca}$ se obtuvo 7 de cociente y 46 de residuo y al dividirlo por $\overline{ac}$ se obtuvo 9 de cociente y 36 de residuo. Hallar el valor de la cifra "b".

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

149. Hallar la suma de las cifras de dividendo en:

```
* * * * *  |_* 3__
1 * *        3 * *
-----
  1 * 1
  * * *
  -----
    3 * *
    * 1 *
    -----
      4 0
```

A) 18 B) 20 C) 16
D) 22 E) 15

150. En una división inexacta el divisor y el residuo son $\overline{aa(2a+1)}_4$ y $\overline{(2a)b(2a)}_n$ ¿Cuánto como máximo se le puede quitar al dividendo para que el cociente disminuya en 2 unidades?

A) 46 B) 20 C) 66
D) 69 E) 96

151. En una división entera el residuo es 37 y el cociente es 13. Hallar el dividendo, sabiendo que es menor que 560 y termina en 4.

A) 314 B) 414 C) 584
D) 614 E) 544

152. En una división el divisor es 192 y el residuo por defecto es al residuo por exceso como 13 es a 19. Si el dividendo es el menor número de cuatro cifras, hallar la suma de las cifras del dividendo.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

153. En una división entera el divisor es 37 y el residuo 13. ¿En cuántas unidades aumenta el cociente cuando se agregan 256 unidades al dividendo?

A) 7 B) 6 C) 5
D) 8 E) 9

154. En una división al residuo le falta 17 unidades para ser máximo. Si el cociente es 43, hallar el dividendo si debe ser el menor posible de 4 cifras. Dar como respuesta la suma de sus cifras.

A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

155. La suma de los cuatro términos de una división es 1079; si se multiplica al dividendo y al divisor por tres y se vuelve a realizar la división, la suma de los nuevos cuatro términos es 3185. Hallar el dividendo original.

A) 989 B) 986 C) 982
D) 979 E) 913

156. Al dividir un número por 5, el residuo es máximo y al dividirlo por 8 la división es exacta. Si la diferencia de los cocientes es 13, hallar el residuo por exceso de dividir dicho número por 9.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

157. Se efectúa una división por defecto y por exceso, y se observa que el residuo por defecto es el triple del residuo por exceso y este último es el doble del cociente por defecto. Hallar el dividendo si la diferencia de los dos residuos es 60.

A) 1830 B) 1920 C) 1890
D) 1950 E) N. A.

158. Se realiza la división de los números 2439 y 117. ¿Entre qué límites se encuentran los números "n" que pueden sumarse al dividendo, de tal manera que el nuevo cociente sea 25?

A) $485 \leq n \leq 603$ B) $485 \leq n < 603$
C) $486 < n \leq 602$ D) $486 \leq n \leq 602$
E) $486 \leq n < 602$

159. Uno de los ómnibus que hace el servicio Lima - San Bartolo, en uno de los recorridos ha recaudado en total S/.213 por la cobranza de los adultos, niños y estudiantes, cuyos precios de pasajes son S/.1,40; S/.0,80 y S/.0,50, cualquiera que sea el punto donde el pasajero suba o baje del ómnibus. Sabiendo que en total han viajado 250 pasajeros y que han pagado 40 adultos más que niños y 10 niñas más que estudiantes; ¿cuántos pasajeros no pagaron?

A) 50 B) 40 C) 30
D) 45 E) 35

160. En una división entera inexacta la suma de los cuatro términos es 744. El número mínimo que se debe quitar al dividendo para que el cociente disminuya en 1 es 49 y el número máximo que se debe agregar al dividendo para que el cociente aumente en 1 es 67. Hallar el dividendo.

A) 628 B) 826 C) 648
D) 528 E) 285

161. Hallar el promedio de todos los números de la forma $\overline{ab1}$, tal que, al dividirlo por 29 deja un residuo máximo.

A) 8496 B) 8469 C) 8503
D) 8530 E) 5451

162. Se dividen los números 1435 y 216. Hallar entre qué límites se encuentran los números que hay que restar a 1435, de manera que el cociente disminuya en dos unidades.

A) $355 < n < 571$ B) $355 \leq n < 571$
C) $350 \leq n < 500$ D) $355 < n \leq 571$
E) N. A.

163. En una división inexacta el dividendo está comprendido entre 200 y 300, el divisor es 25. Además el residuo por defecto excede al residuo por exceso en 23. Hallar el mayor valor que puede tomar el cociente.

A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

164. A un número de 4 cifras se le divide por 37 obteniéndose como cociente el número formado por sus dos últimas cifras y como resto el mayor posible. Si las cifras del número son diferentes entre sí, dar la suma de sus cifras.

A) 24 B) 22 C) 29
D) 18 E) 31

165. Determinar un número N si es el mayor posible y además al dividirlo por 50 se obtiene un resto que es el triple del cociente respectivo.

A) 1079 B) 913 C) 750
D) 848 E) 890

166. En una división inexacta el resto por defecto es el doble del resto por exceso y éste es el doble del cociente. Hallar el dividendo si la diferencia de los residuos es 64.

A) 6184 B) 6272 C) 6564
D) 7124 E) 7248

167. En una división se cumple que " r' " es igual al cociente por defecto y "r" es igual al cociente por exceso. Si el divisor es 213, hallar el dividendo.

A) 22 685 B) 22 578 C) 22 586
D) 22 875 E) N. A.

168. Al dividir un número de 3 cifras y otro de 2 cifras, se obtiene 11 de cociente y 25 de residuo. Se les toma el complemento aritmético y se vuelve a dividir, esta vez se obtiene 7 de cociente y 19 de residuo. Hallar la suma de las cifras del dividendo y divisor.

A) 25 B) 26 C) 27
D) 28 E) 29

169. Al efectuar una división entera por defecto y por exceso se observó que el resto por defecto, el resto por exceso, el cociente por defecto y el divisor, en ese orden, eran números pares consecutivos. Hallar el dividendo.

A) 36 B) 38 C) 84
D) 48 E) 34

170. ¿Cuántos números menores que 400 pueden ser dividendos de una división cuyo cociente es 12 y el residuo es 14?

A) 34 B) 32 C) 18
D) 20 E) N. A.

171. Al dividir: $\overline{7a7}$ por $\overline{3b}$ se obtiene un cociente de cifras iguales y $\overline{c7}$ de residuo. Hallar la suma $(a + b + c + q)$ siendo q una de las cifras del cociente y el dividendo el máximo.

A) 15 B) 16 C) 17
D) 18 E) 19

172. Hallar un número de 4 cifras tal que dividido por su CA se obtiene 8 de cociente y 28 de residuo. Dar como respuesta la suma de sus cifras.

A) 18 B) 22 C) 24
D) 25 E) 27

173. El residuo por exceso de una división es 37. Si el otro residuo es la tercera parte del residuo máximo, hallar el valor del divisor más el residuo por defecto.

A) 49 B) 54 C) 69
D) 73 E) 63

174. Al dividir 83 767 por un número de tres cifras se obtienen los residuos sucesivos siguientes: 303; 366 y 463. Determinar el cociente.

A) 156 B) 345 C) 234
D) 123 E) 456

175. Hallar el menor número de 3 cifras que dividido por otro se obtiene por cociente 18 y por residuo el máximo posible.

A) 638 B) 982 C) 113
D) 494 E) 114

176. Hallar el mayor número de 3 cifras que dividido por otro se obtiene por cociente 18 y por residuo el máximo posible.

A) 638 B) 987 C) 938
D) 494 E) 498

177. La diferencia de 2 números es 191 su cociente es 12 dejando un residuo que es el mayor posible. Hallar el mayor de dichos números.

A) 210 B) 116 C) 207
D) 215 E) 235

178. En una división el cociente es 156 y el residuo es 6; al agregar 1000 unidades al dividendo y al repetir la división se obtiene de cociente 173 y de residuo 54. Hallar el dividendo.

A) 8742 B) 7242 C) 8552
D) 8662 E) 8870

179. Un muchacho debía dividir 6875 por un cierto número pero el 7 del dividendo lo cambió por 1; resulta que obtuvo un cociente inferior en 5 unidades al que debió obtener, pero el resto no varió. Hallar el residuo.

A) 10 B) 9 C) 11
D) 12 E) 10

180. Sabiendo que $A \times B$ y $B \times C$ tienen 20 y 16 cifras respectivamente. ¿Cuántas cifras puede tener:

$$H = \frac{A^3B^2}{C}?$$

A) De 42 a 45 B) De 41 a 45
C) De 41 a 44 D) De 42 a 46
E) Más de 45

CLAVES

1. C	24. D	47. C	70. A	93. B	116. C	139. D	162. D
2. A	25. A	48. C	71. E	94. C	117. A	140. C	163. A
3. D	26. C	49. C	72. E	95. C	118. E	141. E	164. B
4. E	27. B	50. C	73. A	96. C	119. A	142. E	165. D
5. C	28. C	51. B	74. B	97. E	120. E	143. D	166. B
6. E	29. B	52. D	75. B	98. E	121. C	144. D	167. A
7. C	30. D	53. B	76. D	99. E	122. A	145. A	168. D
8. C	31. A	54. D	77. C	100. B	123. E	146. D	169. C
9. E	32. B	55. E	78. A	101. B	124. D	147. A	170. B
10. C	33. D	56. C	79. D	102. A	125. B	148. D	171. D
11. C	34. E	57. D	80. E	103. D	126. A	149. D	172. E
12. C	35. A	58. B	81. D	104. B	127. D	150. B	173. D
13. E	36. C	59. C	82. A	105. D	128. B	151. E	174. A
14. A	37. C	60. C	83. A	106. B	129. E	152. C	175. C
15. B	38. A	61. A	84. D	107. E	130. A	153. A	176. B
16. A	39. C	62. A	85. C	108. D	131. D	154. D	177. C
17. E	40. B	63. E	86. C	109. B	132. A	155. A	178. A
18. A	41. A	64. C	87. E	110. D	133. C	156. D	179. C
19. D	42. E	65. D	88. A	111. C	134. E	157. C	180. A
20. C	43. E	66. D	89. C	112. D	135. A	158. D	
21. E	44. C	67. D	90. B	113. B	136. B	159. E	
22. D	45. D	68. C	91. A	114. B	137. A	160. A	
23. C	46. B	69. B	92. B	115. C	138. B	161. E	

Divisibilidad

05 capítulo

Marie-Sophie Germain nació el 1 de abril de 1776 y murió el 27 de junio de 1831. Fue una matemática francesa que hizo importantes contribuciones a la teoría de números y a la teoría de la elasticidad. Uno de los más importantes fue el estudio que hizo de los que posteriormente fueron nombrados como «números primos de Sophie Germain» (números primos cuyo doble incrementado en una unidad es también un número primo). Matemática, física y filósofa. A pesar de la oposición de sus padres y las dificultades presentadas por una sociedad sexista, ganó su educación de libros extraídos de la biblioteca de su padre y de correspondencia con famosos matemáticos como Lagrange, Legendre y Gauss. Debido al prejuicio contra su sexo, no pudo establecer una carrera en matemáticas, por lo que trabajó independientemente a lo largo de su vida.

Comenzó a estudiar matemáticas a la edad de trece años. Fue autodidacta y se disfrazó de hombre para poder estudiar en lugares de matemáticos donde solo dejaban entrar varones. Debido a la época, tuvo que firmar sus investigaciones y estudios como «Sr. Leblanc» para ocultar su identidad. Su interés por la matemática era tanto que hacía todo lo que estaba a su alcance para poder demostrárselo a los demás. Así, para poder incorporarse en la escuela de París, tuvo que robar la identidad del alumno M. Leblanc y vestirse como hombre; de este modo, pudo avanzar durante años sus conocimientos, y exponer y presentar ideas nuevas.

Fuente: Wikipedia

DEFINICIÓN

Es parte de la Teoría de los Números, que consiste en averiguar si un número es divisible por otros, sin necesidad de realizar la operación de división.

DEFINICIONES PREVIAS

Números divisibles entre sí

Se dice que dos números son divisibles entre sí, cuando al dividir uno de ellos por el otro, su división es exacta.

Ejemplo:

Al realizar la siguiente división: $72 \underline{|\,8}$
— 9

Se deduce que: 72 es divisible por 8; 72 es múltiplo de 8 ($\overset{\circ}{8}$); 8 es divisor de 72; 8 es submúltiplo de 72.

En general: Si A es divisible por "n", entonces A será múltiplo de "n".

Es decir: $\boxed{A = \overset{\circ}{n}}$

Formación de los múltiplos de un número

Los múltiplos de un número, se obtienen multiplicando a dicho número por cualquier otro número entero.

Es decir: $\boxed{\overset{\circ}{n} = n \times k;\ k \in \mathbb{Z}}$

Cero es múltiplo de cualquier número entero positivo.

Ejemplos:

1. Hallar los múltiplos de 8.

   Resolución:

   La formación de los múltiplos de 8:

   $\overset{\circ}{8} = 8k;\ k \in \mathbb{Z}$

   $\overset{\circ}{8} = \{...;\ -16;\ -8;\ \underbrace{0;\ 8;\ 16;\ ...\}}_{\text{Múltiplos naturales de 8}}$

2. ¿Cuántos números de tres cifras son múltiplos de 12?

   Resolución:

   La formación de los múltiplos de 12:

   $\overset{\circ}{12} = 12k;\ k \in \mathbb{Z}^+$

   Números de 3 cifras $\overset{\circ}{12}$: $100 \le 12k < 1000$

   Dividiendo por 12: $8{,}33 \le k < 83{,}3$

   Valores enteros de k: $k = \underbrace{\{9;\ 10;\ 11;\ ...;\ 83\}}_{\text{75 números}}$

   ∴ Existen 75 números de 3 cifras $\overset{\circ}{12}$

3. ¿Cuántos números de 4 cifras que terminan en cifra 6, son múltiplos de 18?

   Resolución:

   Formación de los múltiplos de 18: $\overset{\circ}{18} = 18k$

   Números de 4 cifras $\overset{\circ}{18}$: $1000 \le 18k < 10\,000$

   Dividiendo por 18: $55{,}55 \le k < 555{,}5$

   Valores enteros de k: $k = \{56;\ 57;\ ...;\ 555\}$

   Si los $\overset{\circ}{18}$ terminan en cifra 6: $18k = ...6$

   Entonces "k" puede terminar en cifra 2 o 7.

   - Si "k" termina en cifra 2: $\underbrace{\{62;\ 72;\ ...;\ 552\}}_{\text{50 números}}$
   - Si "k" termina en cifra 7: $\underbrace{\{57;\ 67;\ ...;\ 547\}}_{\text{50 números}}$

   En total: 50 + 50 = 100 números

   ∴ Son 100 números de 4 cifras que terminan en cifra 6 múltiplos de 18.

> **Nota**
> Utilizaremos "módulo de n" para referirnos a los múltiplos de n.

Representación de un número con respecto a un módulo

Todo número entero que no es divisible por otro, llamado módulo, se puede expresar con respecto a éste de dos formas equivalentes: por defecto y por exceso.

Ejemplo:

Representar a 35 con respecto al módulo 8.

Módulo $8 \equiv \overset{\circ}{8}$: 0 8 16 24 32 40 ...
↑
35

Tenemos por defecto:

$35 = 32 + 3 \Rightarrow 35 = \overset{\circ}{8} + 3 \quad (r = 3)$

Por exceso: $35 = 40 - 5 \Rightarrow 35 = \overset{\circ}{8} - 5 (r' = 5)$

Vemos que, se cumple: $\overset{\circ}{8} + 3 = \overset{\circ}{8} - 5$

De donde: $3 + 5 = 8$

En general: Si expresamos a N con respecto al módulo "n" y se obtiene como residuo por defecto "r" y residuo por exceso "r' ", se tendrá:

Por defecto: $\boxed{N = \overset{\circ}{n} + r}$

Por exceso: $\boxed{N = \overset{\circ}{n} - r'}$

De donde: $\boxed{r + r' = n}$

Ejemplos:

- Si un número es $\overset{\circ}{9} + 3$, se puede cambiar por: $\overset{\circ}{9} - 6$
  Es decir: $\overset{\circ}{9} + 3 = \overset{\circ}{9} - 6$ (Observación: 3 + 6 = 9)
- Si un número es $\overset{\circ}{11} - 7$, se puede cambiar por $\overset{\circ}{11} + 4$
  Es decir: $\overset{\circ}{11} - 7 = \overset{\circ}{11} + 4$ (Observación: 7 + 4 = 11)

PRINCIPIOS DE DIVISIBILIDAD

Primer principio

De la suma o diferencia de 2 números que son múltiplos de "n", se obtiene otro múltiplo de "n".

$\boxed{\overset{\circ}{n} + \overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}}$ $\boxed{\overset{\circ}{n} - \overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}}$

Ejemplo:

Sean los números 40 y 24 que son múltiplos de 8.

La suma: $40 + 24 = 64 \Rightarrow \overset{\circ}{8} + \overset{\circ}{8} = \overset{\circ}{8}$

La diferencia: $40 - 24 = 16 \Rightarrow \overset{\circ}{8} - \overset{\circ}{8} = \overset{\circ}{8}$

Segundo principio

Si a un número que es múltiplo de "n", se le multiplica por cualquier otro número entero, resulta otro número múltiplo de "n".

$$\boxed{(\overset{\circ}{n})(\text{número entero}) = \overset{\circ}{n}}$$

Ejemplo:

Efectuar: $\overset{\circ}{8} \times 2002$

Resolución:

$$\overset{\circ}{8} \times 2002 = \underbrace{(\overset{\circ}{8} + \overset{\circ}{8} + \overset{\circ}{8} + \ldots. + \overset{\circ}{8})}_{2002\text{ veces}} = \overset{\circ}{8}$$

Tercer principio

Todo número entero que sea múltiplo de "n" y si es elevado a un exponente entero y positivo, se obtendrá otro múltiplo de "n".

$$\boxed{(\overset{\circ}{n})^k = \overset{\circ}{n};\ k \in \mathbb{Z}^+}$$

Ejemplos:

1. Efectuar: $(\overset{\circ}{8})^{2002}$

   Resolución:

   $$(\overset{\circ}{8})^{2002} = \underbrace{\overset{\circ}{8} \times \overset{\circ}{8} \times \overset{\circ}{8} \ldots \times \overset{\circ}{8}}_{2002\text{ veces}} = \overset{\circ}{8}$$

2. Si a un número que es múltiplo de 17, se le suma los 60 primeros números consecutivos, que le siguen a él; ¿qué residuo dejará el resultado, al dividirlo por 17?

   Resolución:

   Sumando los 60 números consecutivos, tenemos:

   $$S = \overset{\circ}{17} + (\overset{\circ}{17} + 1) + (\overset{\circ}{17} + 2) + (\overset{\circ}{17} + 3) + \ldots + (\overset{\circ}{17} + 60)$$

   Agrupando:

   $$S = \overset{\circ}{17} + \overset{\circ}{17} + \ldots + \overset{\circ}{17} + (1 + 2 + 3 + \ldots. + 60)$$

   Reduciendo:

   $$S = \overset{\circ}{17} + \underbrace{(1 + 2 + 3 + \ldots + 60)}_{\frac{60 \times 61}{2}} \Rightarrow S = \overset{\circ}{17} + 30 \times 61$$

   Escribiendo los términos con respecto al módulo 17:

   $$S = \overset{\circ}{17} + \underbrace{(\overset{\circ}{17} + 13)(\overset{\circ}{17} + 10)}_{\overset{\circ}{17} + 13 \times 10}$$

   $$S = \overset{\circ}{17} + \overset{\circ}{17} + \underbrace{130}_{\overset{\circ}{17} + 11} = \overset{\circ}{17} + 11$$

   ∴ El residuo es 11.

3. Si al dividir los números A; B y C por 13, dejaron como residuos los números 7; 9 y 12; respectivamente, hallar el residuo de dividir:
   - La suma de A, B y C por 13.
   - El producto de A, B y C por 13.

   Resolución:

   Como conocemos el residuo de dividir los números por 13, se cumple:

   $A = \overset{\circ}{13} + 7 \qquad B = \overset{\circ}{13} \qquad C = \overset{\circ}{13} + 12$

   - La suma de los números. (Se suman los residuos).

     $$A + B + C = (\overset{\circ}{13} + 7) + (\overset{\circ}{13} + 9) + (\overset{\circ}{13} + 12)$$

     $$A + B + C = \overset{\circ}{13} + \underbrace{28}_{\overset{\circ}{13} + 2} = \overset{\circ}{13} + 2$$

     ∴ El residuo de dividir la suma por 13 es 2.

   - El producto de los números. (Se multiplican los residuos).

     $$A \times B \times C = (\overset{\circ}{13} + 7)(\overset{\circ}{13} + 9)(\overset{\circ}{13} + 12)$$

     $$A \times B \times C = \overset{\circ}{13} + 7 \times 9 \times 12 = \overset{\circ}{13} + \underbrace{756}_{\overset{\circ}{13} + 2} = \overset{\circ}{13} + 2$$

     ∴ El residuo de dividir el producto por 13 es 2.

4. Sabiendo que: $\overline{ab} = \overset{\circ}{19} + 14$ y $\overline{cd} = \overset{\circ}{19} + 7$, ¿qué residuo deja al dividir $\overline{abcd}$ por 19?

   Resolución:

   Por descomposición en bloques:

   $$N = \overline{abcd} = \underbrace{\overline{ab00}}_{100 \times \overline{ab}} + \overline{cd} = 100 \times \overline{ab} + \overline{cd}$$

   Reemplazando y efectuando:

   $$N = \underbrace{100(\overset{\circ}{19} + 14)}_{\overset{\circ}{19} + 1400} + (\overset{\circ}{19} + 7) = \overset{\circ}{19} + \underbrace{1407}_{\overset{\circ}{19} + 1}$$

   $\Rightarrow N = \overset{\circ}{19} + 1 \quad$ ∴ El residuo es 1.

DIVISIBILIDAD APLICADA AL BINOMIO DE NEWTON

Se presentan dos casos:

Por defecto: $\boxed{(\overset{\circ}{n} + r)^k = \overset{\circ}{n} + r^k;\ k \in \mathbb{Z}^+}$

Por exceso: $\boxed{(\overset{\circ}{n} + r)^k = \begin{cases} \overset{\circ}{n} + r^k; & \text{si k es par} \\ \overset{\circ}{n} - r^k; & \text{si k es impar} \end{cases}}$

Algunos ejemplos:

- $(\overset{\circ}{7} + 2)^{25} = \overset{\circ}{7} + 2^{25}$
- $(\overset{\circ}{18} - 3)^{48} = \overset{\circ}{18} + 3^{48}$
- $(\overset{\circ}{27} - 6)^{51} = \overset{\circ}{27} - 6^{51}$

Ejemplo:

Hallar el residuo de dividir 37^{326} por 7.

Resolución:

Tenemos: $37 = \overset{\circ}{7} + 2$

Reemplazando:

$N = (\overset{\circ}{7} + 2)^{326} = \overset{\circ}{7} + 2^{326}$; pero: $2^3 = \overset{\circ}{7} + 1$

En términos de 2^3: $N = \overset{\circ}{7} + (\underset{\circ}{2^3})^{108}(2^2)$

Reemplazando: $N = \overset{\circ}{7} + (\overset{\circ}{7} + 1)^{108}(4)$

Efectuando: $N = \overset{\circ}{7} + (\overset{\circ}{7} + 1)(4) = \overset{\circ}{7} + 4$

∴ El residuo es 4.

RESTOS POTENCIALES

Los restos potenciales, son los residuos que dejan las potencias enteras, sucesivas y positivas de un número entero N ($N \neq 0$) al ser dividido por el módulo "n".

Ejemplos:

1. Hallar los residuos que dejan las potencias enteras, sucesivas y positivas de 5 al ser divididas por el módulo 9.

Resolución:

Hallamos las potencias de 5 y las expresamos con respecto al módulo 9:

$5^0 = \overset{\circ}{9} + 1$	$5^3 = \overset{\circ}{9} + 8$	$5^6 = \overset{\circ}{9} + 1$
$5^1 = \overset{\circ}{9} + 5$	$5^4 = \overset{\circ}{9} + 4$	$5^7 = \overset{\circ}{9} + 5$
$5^2 = \overset{\circ}{9} + 7$	$5^5 = \overset{\circ}{9} + 2$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

Luego, los restos potenciales de 5, respecto al módulo 9 son:

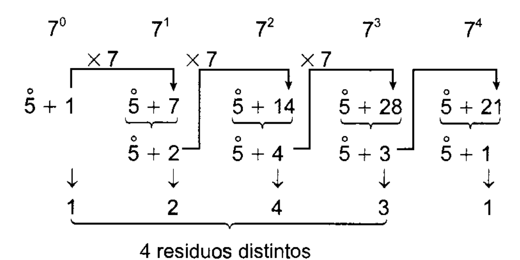
$\underbrace{1;\ 5;\ 7;\ 8;\ 4;\ 2;}_{\text{6 residuos distintos}}\ 1;\ 5;\ \ldots$

En forma práctica, los residuos se van multiplicando por 5 y el resultado se expresa con respecto al módulo 9.

2. Hallar los restos potenciales de 7 con respecto al módulo 5.

Resolución:

En forma práctica, iremos multiplicando los residuos por 7 (potencias de 7) y serán expresados con respecto al módulo 5.



3. Hallar los restos potenciales de 9 con respecto al módulo 11.

Resolución:

Potencias de 9

9^0	9^1	9^2	9^3	9^4	9^5
$\overset{\circ}{11} + 1$	$\overset{\circ}{11} + 9$	$\overset{\circ}{11} + 4$	$\overset{\circ}{11} + 3$	$\overset{\circ}{11} + 5$	$\overset{\circ}{11} + 1$
↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	9	4	3	5	1

5 residuos distintos

GAUSSIANO (G)

El gaussiano de un entero N respecto al módulo "n" es la cantidad de restos potenciales, diferentes entre sí y de cero, que se van a repetir ordenada y periódicamente.

Así:

En el ejemplo (1) los restos son: 1; 5; 7; 8; 4 y 2; entonces el gaussiano $G = 6$.

En el ejemplo (2) los restos son: 1; 2; 4 y 3; entonces el gaussiano $G = 4$.

En el ejemplo (3) los restos son: 1; 9; 4; 3 y 5; entonces el gaussiano $G = 5$.

Ejemplo:

Hallar el residuo de dividir el número 174^{2003} por $\overset{\circ}{11}$.

Resolución:

Tenemos que: $174 = \overset{\circ}{11} + 9$

Reemplazando: $(\overset{\circ}{11} + 9)^{2003} = \overset{\circ}{11} + 9^{2003}$

Luego, hallamos los restos potenciales de 9 con respecto al módulo 11.

$$\left.\begin{aligned} 9^0 &= \overset{\circ}{11} + 1 \\ 9^1 &= \overset{\circ}{11} + 9 \\ 9^2 &= \overset{\circ}{11} + 4 \\ 9^3 &= \overset{\circ}{11} + 3 \\ 9^4 &= \overset{\circ}{11} + 5 \\ 9^5 &= \overset{\circ}{11} + 1 \end{aligned}\right\} \text{5 residuos distintos} \Rightarrow G = 5$$

Relacionando el gaussiano con los restos potenciales.

El exponente lo expresamos con respecto al módulo 5 ($G = 5$).

Exponente ($G = 5$)	Resto potencial
$\overset{\circ}{5}$	$\overset{\circ}{11}$ + ①
$\overset{\circ}{5} + 1$	$\overset{\circ}{11}$ + ⑨
$\overset{\circ}{5} + 2$	$\overset{\circ}{11}$ + ④
$\overset{\circ}{5} + 3$	$\overset{\circ}{11}$ + ③
$\overset{\circ}{5} + 4$	$\overset{\circ}{11}$ + ⑤

Expresamos el exponente con respecto al gaussiano: $2003 = \overset{\circ}{5} + 3$.

Luego, el resultado será: $\overset{\circ}{11} + 3$

$\therefore$ El residuo es 3.

ECUACIONES DIOFÁNTICAS

Se denominaron así en honor al matemático griego Diofanto.

Estas ecuaciones se caracterizan porque tanto sus coeficientes como variables son números enteros, asimismo, las ecuaciones pueden tener dos o más incógnitas como también pueden ser de primer grado o de grado superior.

En este texto trataremos a las ecuaciones de primer grado:

Forma general: $Ax + By = C$

Coeficientes: A; B; C } Números enteros
Variables: x; y

Ejemplos:

1. Encontrar la solución entera y positiva de la siguiente ecuación: $13x + 17y = 850$.

   Resolución:

   De: $13x + 17y = 850$ ... (1)

   Elegimos el menor módulo y lo expresamos con respecto a dicho módulo:

   $\overset{\circ}{13} + (\overset{\circ}{13} + 4)y = \overset{\circ}{13} + 5$

   Efectuando: $\overset{\circ}{13} + \overset{\circ}{13} + 4y = \overset{\circ}{13} + 5$

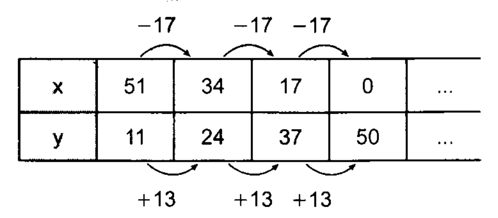
   Despejando el valor de "y": $y = \dfrac{\overset{\circ}{13} + 5}{4}$

   Buscamos el múltiplo de 13, de manera que el valor de "y" sea entero:

   $$y = \frac{13 \times 3 + 5}{4} = \frac{44}{4} = 11$$

   En (1): $13x + 17 \times 11 = 850 \Rightarrow x = 51$

   Haciendo una tabla de valores:



−17 −17 −17

x	51	34	17	0	...
y	11	24	37	50	...

+13 +13 +13

   Luego, la solución entera positiva para x e y es: (51; 11); (34; 24); (17; 37)

2. De un grupo de 50 alumnos, los 2/7 de los hombres usan jeans y los 4/11 de las mujeres usan minifalda. ¿Cuántas mujeres no usan minifalda?

   Resolución:

   Del enunciado:

   Hombres con jeans: $\frac{2}{7}H = 7 \Rightarrow H = \overset{\circ}{7}$

   $\Rightarrow 7x;\ x \in \mathbb{Z}^+$

   Mujeres con minifalda: $\frac{4}{11}M \Rightarrow M = \overset{\circ}{11}$

   $\Rightarrow 11y;\ y \in \mathbb{Z}^+$

   Pero: $H + M = 50$

   Reemplazando: $7x + 11y = 50$ .... (1)

   Escribiendo con respecto al módulo 7:

   $\overset{\circ}{7} + (\overset{\circ}{7} + 4)y = \overset{\circ}{7} + 1 \Rightarrow 4y = \overset{\circ}{7} + 1$

   Hallamos el valor entero de "y":

   $y = \dfrac{7+1}{4} = 2 \Rightarrow x = 4$

   Reemplazando en (1):

   $7x + 11(2) = 50 \Rightarrow x = 4$

   Luego: Total de hombres: $7(4) = 28$

   Total de mujeres: $11(2) = 22$

   ∴ Número de mujeres que no usan minifalda:

   $\frac{7}{11}(22) = 14$

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Son reglas que permiten determinar si un número entero es divisible por otros (módulos), en caso contrario se podrá hallar el residuo que dejaría al dividirlos.

A continuación se enuncia la regla práctica del criterio de divisibilidad de algunos módulos.

Divisibilidad por 9

Para que un número entero sea divisible por 9, la suma de sus cifras deberá ser $\overset{\circ}{9}$; en caso contrario dicha suma determina el residuo de dividir el número por 9.

Sea: $N = \overline{abcde}$

$$N = \overset{\circ}{9} \Leftrightarrow a + b + c + d + e = \overset{\circ}{9}$$

Algunos ejemplo:

- 46 035 $\quad \Sigma$ cif. $= 18 = \overset{\circ}{9}$
  ∴ El número es divisible por 9.
- 74 256 $\quad \Sigma$ cif. $= 24 \neq \overset{\circ}{9}$ pero: $24 = \overset{\circ}{9} + 6$
  ∴ El residuo de dividir el número por 9 es 6.

Ejemplo:

Hallar el valor de "a", si el numeral $\overline{2a435}$ al ser dividido por 9, el residuo es 2.

Resolución:

$$2 + a + \underbrace{4 + 3 + 5}_{\overset{\circ}{9} + 3} = \overset{\circ}{9} + 2$$

$$a + 3 = \overset{\circ}{9} \Rightarrow a = 6$$

Divisibilidad por 3

Para que un número entero sea divisible por 3, la suma de sus cifras deberá ser $\overset{\circ}{3}$; en caso contrario dicha suma determina el residuo de dividir el número por 3.

Sea: $N = \overline{abcde} \Rightarrow N = \overset{\circ}{3} \Leftrightarrow a + b + c + d + e = \overset{\circ}{3}$

Por ejemplo:

46 075 $\Rightarrow \Sigma$ cifras: $22 \neq \overset{\circ}{3}$

Pero: $22 = \overset{\circ}{3} + 1$ ∴ El residuo es 1

Ejemplo:

Hallar la suma de los valores de "x", para los cuales el numeral $\overline{52x3x1}$ es múltiplo de 3.

Resolución:

$$5 + 2 + x + 3 + x + 1 = \overset{\circ}{3}$$

$$2x + 2 = \overset{\circ}{3} \Rightarrow x = 2; 5; 8$$

∴ Suma de los valores de x: $2 + 5 + 8 = 15$

Divisibilidad por 2^n

Un número entero será divisible por 2^n, si y solo si, las "n" últimas cifras del número son ceros o forman un múltiplo de 2^n.

Sea: $N = \overline{abcde}$

Divisibilidad por 2: $N = \overset{\circ}{2} = \overset{\circ}{2^1} \Leftrightarrow e = 0$ o par

Divisibilidad por 4: $N = \overset{\circ}{4} = \overset{\circ}{2^2} \Leftrightarrow \overline{de} = 00$ o 4

Otra forma: $\overline{de} = \overset{\circ}{4} \Rightarrow 2d + e = \overset{\circ}{4}$

Divisibilidad por 8: $N = \overset{\circ}{8} = \overset{\circ}{2^3} \Leftrightarrow \overline{cde} = 000$ o $\overset{\circ}{8}$

Otra forma: $\overline{cde} = \overset{\circ}{8} \Rightarrow 4c + 2d + e = \overset{\circ}{8}$
421

Ejemplo:

Hallar la suma de los valores de "a", para que el número $\overline{a31a8}$ sea múltiplo de 8.

Resolución:

Como: $\overline{a31a8} = \overset{\circ}{8}$

El criterio de divisibilidad por 8: $\overline{1a8} = \overset{\circ}{8}$
421

$4 + 2a + 8 = \overset{\circ}{8} \Rightarrow 2(2 + a) = \overset{\circ}{8}$
2 6

$\therefore$ Suma de los valores: $2 + 6 = 8$.

Divisibilidad por 5^n

Un número entero será divisible por 5^n, si y solo si, las "n" últimas cifras del número son ceros o forman un múltiplo de 5^n.

Sea: $N = \overline{abcde}$

Divisibilidad por 5: $N = \overset{\circ}{5} = \overset{\circ}{5^1} \Leftrightarrow e = 0$ o 5

Divisibilidad por 25: $N = \overset{\circ}{25} = \overset{\circ}{5^2} \Leftrightarrow \overline{de} = 00$ o $\overset{\circ}{25}$

Divisibilidad por 125: $N = \overset{\circ}{125} \Leftrightarrow \overline{cde} = 000$ o $\overset{\circ}{125}$

Divisibilidad por 11

Para que un número entero sea divisible por 11, se debe cumplir: "La suma de sus cifras de orden impar menos la suma de sus cifras de orden par debe ser 0 o $\overset{\circ}{11}$; en caso contrario se habrá calculado el residuo de dividir el número por 11".

Sea: $N = \overline{abcde}$ $N = \overset{\circ}{11} \Leftrightarrow (a + c + e) - (b + d) = 0$ o $\overset{\circ}{11}$

Por ejemplo:

4 891 726 — Cifras de orden impar — Cifras de orden par

$\Rightarrow (4 + 9 + 7 + 6) - (8 + 1 + 2) = 15 \neq \overset{\circ}{11}$

Pero: $15 = \overset{\circ}{11} + 4$ $\therefore$ El residuo es 4.

Regla práctica. Se multiplican las cifras del número N (de derecha a izquierda) por las cifras: 1; − 1; 1; − 1; ... así sucesivamente y la suma algebraica debe ser 0 o 11; en caso contrario se habrá hallado el residuo de dividir el número por 11.

Ejemplo:

- 4 6 3 2 5 4 $\Rightarrow (6 + 2 + 4) - (4 + 3 + 5) = 0$
  − + − + − + $\Rightarrow$ El número es $\overset{\circ}{11}$
- 2 8 3 5 8 7 $\Rightarrow (8 + 5 + 7) - (2 + 3 + 8) = 7 \neq \overset{\circ}{11}$
  − + − + − +
  Pero: $7 = \overset{\circ}{11} + 7$
  $\therefore$ El residuo de dividir el número por 11 es 7.

Divisibilidad por 7

Un número entero será divisible por 7, si y solo si, la suma algebraica de multiplicar sus cifras (de derecha a izquierda) por las cifras: 1; 3; 2; − 1; − 3; − 2; 1; 3; 2; − 1; ..., respectivamente, será 0 o forma un múltiplo de 7; en caso contrario, dicha suma determina el residuo de dividir el número por 7.

Sea: $N = \overline{\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}\,d\,e\,f}$
2 3 1 2 3 1

$N = \overset{\circ}{7} \Leftrightarrow -2a - 3b - c + 2d + 3e + f = 0$ o $\overset{\circ}{7}$

Ejemplos:

- $\underline{1}\,\underline{1}\,\underline{2}\,4\,8\,3 \Rightarrow -2 - 3 - 2 + 8 + 24 + 3 = 28 = \overset{\circ}{7}$
  2 3 1 2 3 1 $\therefore$ El número es $\overset{\circ}{7}$
- $\underline{4}\,\underline{2}\,\underline{1}\,3\,4\,7 \Rightarrow -8 - 6 - 1 + 6 + 12 + 7 = 10 \neq \overset{\circ}{7}$
  2 3 1 2 3 1
  Pero: $10 = \overset{\circ}{7} + 3$ $\therefore$ El residuo es 3.
- Hallar el valor de "y", si el numeral $\overline{(y + 1)5y67}$ es múltiplo de 7.

  Resolución:

  Utilizamos el criterio: $\overline{(y + 1)5y67} = \overset{\circ}{7}$
  $\bar{3}$ $\bar{1}231$

  Efectuando: $-3y - 3 - 5 + 2y + 18 + 7 = \overset{\circ}{7}$
  $10 - y = \overset{\circ}{7} \Rightarrow y = 3$

Divisibilidad por 13

Un número entero será divisible por 13, si y solo si, la suma algebraica de multiplicar sus cifras (de derecha a izquierda) por las cifras: 1; −3; −4; −1; 3; 4; 1; −3; −4; ..., respectivamente, será 0 o múltiplo de 13; en caso contrario dicha suma determina el residuo de dividir el número por 13.

Sea: $N = \overline{a\,b\,\underline{c}\,\underline{d}\,\underline{e}\,f}$
4 3 1 4 3 1

$N = \overset{\circ}{13} \Leftrightarrow 4a + 3b - c - 4d - 3e + f = 0$ o $\overset{\circ}{13}$

Ejemplos:

- $4\,7\,\underline{2}\,\underline{5}\,\underline{2}\,6 \Rightarrow 16 + 21 - 2 - 20 - 6 + 6 = 15 \neq \overset{\circ}{13}$
  4 3 1 4 3 1
  Pero: $15 = \overset{\circ}{13} + 2$ $\therefore$ El residuo es 2.
- Si el número $\overline{aa25(a - 1)}$ es divisible por 13, hallar el valor de "a".

  Resolución:

  Utilizamos el criterio: $\overline{a\,\underline{a}\,\underline{2}\,\underline{5}(a - 1)} = \overset{\circ}{13}$
  3 1 4 3 1

  Efectuando: $3a - a - 8 - 15 + a - 1 = \overset{\circ}{13}$
  $3\underbrace{(a - 8)}_{0} = \overset{\circ}{13} \Rightarrow a = 8$

  $\therefore$ El valor de "a" es 8.

Divisibilidad por números compuestos

Todo número entero que sea divisible por un número compuesto, tendrá que ser divisible simultáneamente

por dos números que sean primos entre sí y que multiplicados reproduzcan el número compuesto.

Ejemplo:

Sea N un número compuesto y si:

- $N = 72 \Rightarrow N = \begin{cases}\overset{\circ}{8}\\ \overset{\circ}{9}\end{cases}$ • $N = 45 \Rightarrow N = \begin{cases}\overset{\circ}{5}\\ \overset{\circ}{9}\end{cases}$
- $N = 36 \Rightarrow N = \begin{cases}\overset{\circ}{4}\\ \overset{\circ}{9}\end{cases}$ • $N = 77 \Rightarrow N = \begin{cases}\overset{\circ}{7}\\ \overset{\circ}{11}\end{cases}$

Observaciones

- El producto de dos números consecutivos siempre es múltiplo de 2.
- El producto de tres números consecutivos siempre es múltiplo de 6.

Divisibilidad por 33 o por 99

Un número será divisible por 33 o por 99, cuando al formar bloques de 2 cifras, de derecha a izquierda y al efectuarse la suma algebraica se obtiene como resultado un $\overset{\circ}{33}$ o $\overset{\circ}{99}$, respectivamente.

- Sea $N = \overline{abcdef}$ N será $\overset{\circ}{33} \Leftrightarrow \overline{ef} + \overline{cd} + \overline{ab} = \overset{\circ}{33}$
- Sea $N = \overline{abcdef}$ N será $\overset{\circ}{99} \Leftrightarrow \overline{\varepsilon\phi} + \overline{cd} + \overline{ab} = \overset{\circ}{99}$

Divisibilidad por "n – 1" en base "n"

Un numeral, en base "n" será divisible por (n – 1), si y solo si, la suma de sus cifras resulte un múltiplo de "(n – 1)".

Sea el numeral: $N = \overline{abc\ldots d}_n$

N será $\overset{\circ}{\overline{n-1}} \Leftrightarrow a + b + c + \ldots + d = \overset{\circ}{\overline{n-1}}$

Ejemplos:

1. Hallar el residuo de dividir el numeral $\underbrace{4343\ldots43_8}_{\text{20 cifras}}$ por 7.

   Resolución:

   Utilizamos divisibilidad por 7 en base 8:

   $A = \underbrace{4 + 3 + 4 + 3 + \ldots + 4 + 3}_{\text{20 sumandos}}$

   Efectuando: $A = 4 \times 10 + 3 \times 10 = 70$

   Respecto al módulo 7: $A = 70 = \overset{\circ}{7}$

   $\therefore$ El residuo es cero

2. Hallar el residuo de dividir el numeral:

   $T = \underbrace{123123\ldots123_9}_{\text{30 cifras}}$ por 8.

   Resolución:

   Divisibilidad por 8 en base 9:

   $T = \underbrace{1 + 2 + 3 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 1 + 2 + 3}_{\text{30 sumandos}}$

   Al reducir: $T = (1 + 2 + 3)(10) = \overset{\circ}{60}$

   Respecto al módulo 8: $T = 60 = \overset{\circ}{8} + 4$

   $\therefore$ El residuo es 4

Divisibilidad por "n + 1" en base "n"

Un numeral, en base "n" será divisible por "n + 1" si y solo si, la suma de las cifras de orden impar menos la suma de las cifras de orden par, es cero o resulta un múltiplo de "n + 1".

Sea el numeral: $\overline{abcdef}_n$ ← subíndice

N será $\overset{\circ}{\overline{n+1}} \Leftrightarrow (b + d + f) - (a + c + e) = 0 \vee \overset{\circ}{\overline{n+1}}$

Ejemplo:

Hallar el residuo de dividir el numeral 2451340_7 por 8.

Resolución:

Divisibilidad por 8 en base 7: $2\,\underline{4}\,5\,\underline{1}\,3\,\underline{4}\,0_7$

$1\,1\,1\,1\,1\,1\,1$

Efectuando: $2 - 4 + 5 - 1 + 3 - 4 + 0 = 1$

Respecto al módulo 8: $1 = \overset{\circ}{8} + 1$

$\therefore$ El residuo es 1.

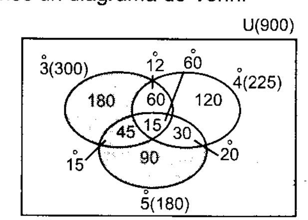
PROBLEMAS RESUELTOS

1. ¿Cuántos números de tres cifras son divisibles por 3 o por 5, pero no por 4?

   Resolución:

   Números de 3 cifras: $\underbrace{100; 101; 102; \ldots; 999}_{\text{900 números}}$

   Hacemos un diagrama de Venn:



   Hallamos la cantidad de números, múltiplos de:

   - N.° $\overset{\circ}{3}$ = 900/3 = 300
   - N.° $\overset{\circ}{4}$ = 900/4 = 225
   - N.° $\overset{\circ}{5}$ = 900/5 = 180
   - N.° $\overset{\circ}{60}$ = 900/60 = 15
   - N.° $\overset{\circ}{12}$ = 900/5 = 75
   - N.° $\overset{\circ}{15}$ = 900/15 = 45
   - N.° $\overset{\circ}{20}$ = 900/20 = 45

   Del diagrama de Venn:

   $\therefore$ La cantidad de números que son $\overset{\circ}{3}$ o $\overset{\circ}{5}$ pero no $\overset{\circ}{4}$: 315.

2. De la siguiente serie: 16; 32; 48; 64; ...

   ¿cuántos términos de 3 cifras son divisibles por 5?

Resolución:

El enésimo término de la serie es: $T_n = 16n$

Hallamos los términos de la serie que tienen 3 cifras:

$100 \leq 16n < 1000$

$6,25 \leq n < 62,5$

Valores enteros de n: $n = \{7; 8; 9; ...; 62\}$ ... (1)

Los términos de la serie divisibles por 5:

$16n = \overset{\circ}{5} \Rightarrow n = \overset{\circ}{5}$ ... (2)

Los valores de "n" que satisfacen (1) y (2):

$n = \underbrace{\{10; 15; 20; ...; 60\}}_{11 \text{ números}}$

∴ Son 11 términos de la serie que son divisibles por 5.

3. Si se sabe que el numeral $\overline{abcd}$ es múltiplo de 15 y $\overline{cd} = 4(\overline{ab}) + 6$, hallar: $a + b + c + d$.

Resolución:

Se tiene: $\overline{abcd} = \overset{\circ}{15}$

Descomponiendo en bloques:

$100(\overline{ab}) + \overline{cd} = \overset{\circ}{15}$ ... (1)

Pero: $\overline{cd} = 4(\overline{ab}) + 6$ ... (2)

Reemplazamos (2) en (1):

$100(\overline{ab}) + 4(\overline{ab}) + 6 = \overset{\circ}{15}$

Efectuando: $104 \times \overline{ab} + 6 = \overset{\circ}{15}$

Respecto al módulo 15:

$(\overset{\circ}{15} - 1)\overline{ab} + 6 = \overset{\circ}{15} \Rightarrow \overline{ab} = \overset{\circ}{15} + 6$

Luego: $\overline{ab} = 15 + 6 = 21$

En (2): $\overline{cd} = 4 \times 21 + 6 = 90$

El numeral será: $\overline{abcd} = 2190$

∴ $a + b + c + d = 12$

4. Si el numeral $\overline{abcd}$ es igual a 135 veces la suma de sus cifras, hallar el producto de sus cifras.

Resolución:

Por dato: $\overline{abcd} = \underbrace{135}_{\overset{\circ}{9}}(a + b + c + d)$ ...(1)

Luego: $\overline{abcd} = \overset{\circ}{9} \Rightarrow a + b + c + d = \overset{\circ}{9}$

Vemos que: $a + b + c + d = 9 \vee 18 \vee 27 \vee 36$

Los posibles números son:

- $\overline{abcd} = 135 \times 9 = 1215 \Rightarrow (a + b + c + d = 9)$; sí cumple.
- $\overline{abcd} = 135 \times 18 = 2430 \Rightarrow (a + b + c + d \neq 18)$; no cumple.
- $\overline{abcd} = 135 \times 27 = 3645 \Rightarrow (a + b + c + d \neq 18)$; no cumple.
- $\overline{abcd} = 135 \times 36 = 4860 \Rightarrow (a + b + c + d \neq 18)$; no cumple.

El numeral buscado es: $\overline{abcd} = 1215$

∴ $a \times b \times c \times d = 10$

5. Hallar el valor de: $a + b + c + d$, si se cumple: $\overline{abcd} = 364(d - a + 2b + 3c)$

Resolución:

De: $\overline{abcd} = 364(d - a + 2b + 3c)$ ...(1); $(364 = \overset{\circ}{7})$

Se tiene que: $\overline{abcd} = \overset{\circ}{7} \Rightarrow \underbrace{d - a + 2b + 3c}_{\alpha} = \overset{\circ}{7}$

Note usted que $\alpha = \overset{\circ}{7}$, al reemplazarlo en (1), debemos verificar que también satisface α:

- Si: $\alpha = 7 \Rightarrow$ en (1):
  $\overline{abcd} = 364 \times 7 = 2548$; en α no cumple.
- Si: $\alpha = 14 \Rightarrow$ en (1):
  $\overline{abcd} = 364 \times 14 = 5096$; en α no cumple.
- Si: $\alpha = 21 \Rightarrow$ en (1):
  $\overline{abcd} = 364 \times 21 = 7644$; en α sí cumple.
  $\Rightarrow \overline{abcd} = 7644$

∴ $a + b + c + d = 21$

6. ¿Cuántos números de la forma $\overline{a(a+b)b}$ son múltiplos de 8?

Resolución:

Como: $\overline{a(a+b)b} = \overset{\circ}{8}$
$\quad\quad\ \ 4\ \ 2\ \ 1$

Divisible por 8: $4a + 2(a+b) + b = \overset{\circ}{8}$

$\Rightarrow 3(2a + b) = \overset{\circ}{8}$

Se deduce que: $2 \times a + b = \overset{\circ}{8}$

Los valores que cumplen:

a	b
4	0
8	0
3	2
7	2
2	4
1	6

∴ Existen 6 números.

7. ¿Cuántos números de la forma $\overline{aaabb}$ son múltiplos de 13?

Resolución:

Por dato: $\overline{a\,\underline{a}\,\underline{a}\,\underline{b}\,b} = \overset{\circ}{13}$
$\quad\quad\quad 3\ 1\ 4\ 3\ 1$

Divisibilidad por 13: $3a - a - 4a - 3b + b = \overset{\circ}{13}$

Se deduce que: $a + b = \overset{\circ}{13}$

Los valores que cumplen:

a	b
4	9
5	8
6	7
7	6
8	5
9	4

∴ Existen 6 números

8. ¿Cuántos números de 3 cifras existen, tales que sumados con sus 3 cifras dan un múltiplo de once?

Resolución:

Sea $\overline{abc}$ el número de tres cifras, tal que:

$\overline{a\,b\,c} + a + b + c = \overset{\circ}{11}$

1 1 1

Divisibilidad por 11: $a - b + c + a + b + c = \overset{\circ}{11}$

Reduciendo: $2(a + c) = \overset{\circ}{11}$

Se deduce que: $a + c = \overset{\circ}{11} = 11$

Los valores que cumplen:

a	c
2	9
3	8
4	7
5	6
6	5
7	4
8	3
9	2

$\Rightarrow$ 8 valores

Además, los valores de "b" = {0; 1; 2; ...; 9}

El total de números: $8 \times 10 = 80$ números

∴ Existen 80 números

9. Si al dividir el numeral $\overline{4a0567b}_9$ por 10 es exacto y al dividirlo por 8, el residuo es 2. Hallar el mayor valor de "a × b".

Resolución:

Del enunciado, tenemos:

$\overline{4\,\underline{a}\,0\,\underline{5}\,6\,\underline{7}\,b}_9 = \overset{\circ}{10}$

1 1 1 1 1 1 1

Divisibilidad por 10 en base 9:

$4 - a - 5 + 6 - 7 + b = \overset{\circ}{10}$

Reduciendo: $b - a = \overset{\circ}{10} + 2$

Solo cumple: $b - a = 2$ ...(1)

$\overline{4a0567b}_9 = \overset{\circ}{8} + 2$

Divisibilidad por $\overset{\circ}{8}$ en base 9:

$4 + a + 0 + 5 + 6 + 7 + b = \overset{\circ}{8} + 2$

Respecto al módulo 8: $a + b = \overset{\circ}{8} - 4$

$\Rightarrow a + b = 4$ ... (2) $\vee$ $a + b = 12$ ... (3)

De (1) y (2): $a = 1$; $b = 3$ $\Rightarrow$ $a \times b = 3$

De (1) y (3): $a = 5$; $b = 7$ $\Rightarrow$ $a \times b = 35$

∴ El mayor valor de $a \times b$ es 35.

10. Hallar el número de 5 cifras que empieza con la cifra 7 y que es igual a 45 veces el producto de sus 5 cifras. Dar como respuesta la suma de sus cifras.

Resolución:

Sea $\overline{7abcd}$ el número buscado.

Por dato: $\overline{7abcd} = 45 \times 7 \times a \times b \times c \times d$ ...(1)

Se deduce que las cifras a; b; c y d deben ser impares.

Vemos que: $\overline{7abcd} = \overset{\circ}{5}$ $\Rightarrow$ $d = 0 \vee 5$

En (1): $\overline{7abc5} = 45 \times 5 \times 7 \times a \times b \times c$ ...(2)

Ahora: $\overline{7abc5} = \overset{\circ}{25} \Rightarrow \overline{c5} = \overset{\circ}{25}$ $\begin{cases} 25 \Rightarrow c = 2 \\ 75 \Rightarrow c = 7 \end{cases}$

En (2): $\overline{7ab75} = 45 \times 5 \times 7 \times 7 \times a \times b$. ... (3)

De (3): $\overline{7ab75} = \overset{\circ}{9}$

Divisibilidad por 9: $7 + a + b + 7 + 5 = \overset{\circ}{9}$

Respecto al módulo 9: $a + b = \overset{\circ}{9} - 1$

$a + b = 8$ ...(α) $\vee$ $a + b = 17$ ...(β)

De (3): $\overline{\underline{7}\,\underline{a}\,b\,7\,5} = \overset{\circ}{7}$

3 1 2 3 1

Divisibilidad por 7: $-21 - \underline{a} + 2b + 21 + 5 = \overset{\circ}{7}$

Respecto al módulo 7: $a - 2b = \overset{\circ}{7} + 5$

$\Rightarrow a - 2b = 5$ ...(γ)

De (β) ∧ (γ): No hay solución.

De (α) ∧ (γ): $a = 7$; $b = 1$

Luego, el número será: 77 175

∴ Σ cifras = 27.

11. Si: $\overline{abcd} = \overset{\circ}{99}$ y $\overline{ab} = 2(\overline{cd})$, hallar el valor de: $a + b + c + d$.

Resolución:

Descomponiendo polinómicamente: $\overline{abcd} = \overset{\circ}{99}$

$\Rightarrow 100(\overline{ab}) + \overline{cd} = \overset{\circ}{99}$ ...(1)

Pero: $\overline{ab} = 2(\overline{cd})$

Reemplazando en (1): $201(\overline{cd}) = \overset{\circ}{99}$

$(67 \times 3)(\overline{cd}) = \overset{\circ}{99} \Rightarrow 3(\overline{cd}) = \overset{\circ}{99} \Rightarrow \overline{cd} = \overset{\circ}{33}$

Si: $\overline{cd} = 33 \Rightarrow \overline{ab} = \overset{\circ}{66}$

El número: $\overline{abcd} = 6633$

∴ $a + b + c + d = 18$

12. Si el numeral de la forma $\overline{6a74b14}$ es divisible por 9 y 11; hallar el valor de (a + b).

Resolución:

Por dato: $\overline{6a74b14} = \overset{\circ}{99}$

Divisibilidad por 99: $6 + \overline{a7} + \overline{4b} + 14 = \overset{\circ}{99}$

Se deduce que: $6 + \overline{a7} + \overline{4b} + 14 = 99$

En unidades: $6 + 7 + b + 4 = ...9 \Rightarrow b = 2$

En decenas: $1 + a + 4 + 1 = 9 \Rightarrow a = 3$

∴ $a + b = 5$

13. A un número de 4 cifras consecutivas crecientes se le suma 988 y resulta un múltiplo de 44. Hallar la suma de las cifras del número.

Resolución:

Sea el número de cifras consecutivas:

$\overline{(a-2)(a-1)a(a+1)}$

Por dato: $\overline{(a-2)(a-1)a(a+1)} + 988 = \overset{\circ}{44}$

Descomponiendo polinómicamente,

$1111a - 2100 + 1 + 988 = \overset{\circ}{44}$

Reduciendo: $\underbrace{1111}_{\overset{\circ}{11}}(a - 1) = \overset{\circ}{44} \left\langle \begin{matrix} \overset{\circ}{4} \\ \overset{\circ}{11} \end{matrix} \right.$

Se deduce que: $a = \overset{\circ}{4} + 1$ $\Rightarrow$ $a = 5$

El número es: 3456

∴ Σ cifras 18

14. ¿Con qué valor de "a", el numeral: $\underbrace{\overline{43a25343a253...253}}_{156\text{ cifras}}$ es múltiplo de 13?

Resolución:

Vemos que: $\underbrace{\overline{\underbrace{43a253}_{26\ \text{veces}}43a253...253}}_{156\ \text{cifras}} = \overset{\circ}{13}$

Analizando uno de los grupos: $\overline{4\,3\,\underline{a}\,\underline{2}\,\underline{5}\,3} = \overset{\circ}{13}$
$\quad 4\,3\,1\,4\,3\,1$

Divisibilidad por 13:

$16 + 9 - a - 8 - 15 + 3 = \overset{\circ}{13} \Rightarrow 5 - a = \overset{\circ}{13} \Rightarrow$ W

Tenemos: $a = 5$

$\therefore$ El valor de "a" es 5

15. En una academia hay 690 alumnos, se observa que los 5/8 de las mujeres son menores de 17 años, los 3/11 de las mismas usan jeans y los 2/5 de ellas postulan a la UNI. ¿Cuántos hombres hay en la academia?

Resolución:

Por dato: $H + M = 690$ ... (I)

Además, de las mujeres se sabe que:

Menores de 17 años: $\frac{5}{8}M \Rightarrow M = \overset{\circ}{8}$

Usan jeans: $\frac{3}{11}M \Rightarrow M = \overset{\circ}{11}$

Postulan a la UNI: $\frac{2}{5}M \Rightarrow M = \overset{\circ}{5}$

Luego: $M = \text{MCM}(8; 11; 5) = \overset{\circ}{440}$

Entonces, el número de mujeres: 440

El número de hombres: $690 - 440 = 250$

$\therefore$ Son 250 hombres en la academia.

16. Calcular: $a + b + c$, sabiendo que: $\overline{3a8bc} = \overset{\circ}{1125}$

Resolución:

Divisibilidad: $\overline{3a8bc} = \overset{\circ}{1125} \begin{cases} \overset{\circ}{9} \\ \overset{\circ}{125} \end{cases}$

Tenemos:

Divisibilidad por 125: $\overline{8bc} = \overset{\circ}{125}$

$\overline{8bc} = 125 \times 7 = 875$

$\Rightarrow b = 7 \quad \wedge \quad c = 5$

Divisibilidad por 9: $\overline{3a875} = \overset{\circ}{9}$

$3 + a + 8 + 7 + 5 = \overset{\circ}{9}$

$a + 5 = \overset{\circ}{9} \Rightarrow a = 4 \quad \therefore a + b + c = 16$

17. Un estudiante efectuó, sin hacer uso de calculadora, la siguiente operación: $H = 435^3 \times 524 - 476 \times 596$ y del resultado obtenido borró dos cifras iguales, quedando así: $\overline{x313166280x}$.
Hallar el valor de "x".

Resolución:

Tenemos: $435^3 \times 524 - 476 \times 596 = \overline{x313166280x}$

Teorema: "Todo número entero se puede expresar como un múltiplo de 9 más la suma de sus cifras".

Usando el teorema:

$435 = \overset{\circ}{9} + 4 + 3 + 5 = \overset{\circ}{9} + 3$

$524 = \overset{\circ}{9} + 5 + 2 + 4 = \overset{\circ}{9} + 2$

$476 = \overset{\circ}{9} + 4 + 7 + 6 = \overset{\circ}{9} + 8$

$596 = \overset{\circ}{9} + 5 + 9 + 6 = \overset{\circ}{9} + 2$

$\overline{x313166280x} = \overset{\circ}{9} + x + 3 + 1 + 3 + 1 + 6 + 6 + 2 + 8 + 0 + x = \overset{\circ}{9} + 2x + 3$

Reemplazando:

$(\overset{\circ}{9} + 3)^3(\overset{\circ}{9} + 2) - (\overset{\circ}{9} + 8)(\overset{\circ}{9} + 2) = \overset{\circ}{9} + 2x + 3$

Efectuando: $\underbrace{(\overset{\circ}{9} + 27)(\overset{\circ}{9} + 2)}_{\overset{\circ}{9}} - (\overset{\circ}{9} + 16) = \overset{\circ}{9} + 2x + 3$

$\overset{\circ}{9} - \overset{\circ}{9} - 16 = \overset{\circ}{9} + 2x + 3$

Respecto al módulo 9: $\overset{\circ}{9} - 1 = 2x$

$\Rightarrow 9 - 1 = 2x \quad \therefore x = 4$

18. Calcular la suma de los posibles valores de a y b, si el numeral $\overline{13a2ba}$ es divisible por 63.

Resolución:

Por dato: $\overline{13a2ba} = \overset{\circ}{63} \begin{cases} \overset{\circ}{7} \\ \overset{\circ}{9} \end{cases}$

Divisibilidad por 7: $\overline{1\,\underline{3}\,\underline{a}\,2\,b\,a} = \overset{\circ}{7}$
$\quad 2\,3\,1\,2\,3\,1$

Efectuando: $-2 - 9 - a + 4 + 3b + a = \overset{\circ}{7}$

$3b = \overset{\circ}{7} \Rightarrow b = 0 \vee b = 7$

Divisibilidad por 9:

I. Si: $b = 0 \Rightarrow \overline{13a20a} = \overset{\circ}{9}$
$1 + 3 + a + 2 + 0 + a = \overset{\circ}{9}$
$2a + 6 = \overset{\circ}{9} \Rightarrow a = 6$

II. Si: $b = 7 \Rightarrow \overline{13a27a} = \overset{\circ}{9}$
$1 + 3 + a + 2 + 7 + a = \overset{\circ}{9}$
$2a + 4 = \overset{\circ}{9} \Rightarrow a = 7$

$\therefore$ La suma de los valores de a y b:
$6 + 7 + 0 + 7 = 20$

19. Un comerciante compra al por mayor camisas y corbatas a S/.28 y S/.12 la unidad respectivamente. Si invirtió S/.868, ¿cuántas prendas compró en total, sabiendo que la cantidad de camisas es lo mayor posible?

Resolución:

Del enunciado:

	Prec. unit. (S/.)	**Cantidad**	**Total**
Camisas	28	x	28x
Corbatas	12	y	12y
			868

Se cumple que: $28x + 12y = 868$

Simplificando: $7x + 3y = 217$ ...(1)

Respecto al módulo 3: $(\overset{\circ}{3} + 1)x + \overset{\circ}{3} = \overset{\circ}{3} + 1$

Tenemos: $x = \overset{\circ}{3} + 1$

Tabulando valores en (1): $x_{máx} = ?$

+3 +3 +3 +3

x	1	4	7	10	...	25	28
y	70	63	56	49	...	14	7

−7 −7 −7 −7

El número máximo de camisas: 28
El número mínimo de corbatas: 7
∴ Total de prendas: 28 + 7 = 35

20. Con \$50 se compraron 20 estampillas, cuyos precios por unidad son \$4; \$2,5 y \$0,5. De cada clase se compraron cantidades diferentes. ¿Cuántas estampillas de \$2,5 se compraron?

Resolución:

Del enunciado:

	Prec. unit. (\$)	Cantidad	Total
1.^{er} tipo	4	x	4x
2.° tipo	2,5	y	2,5y
3.^{er} tipo	0,5	z	0,5z
			50

Luego: $4x + 2{,}5y + 0{,}5z = 50$

Multiplicado por 2: $8x + 5y + z = 100$ ...(1)

Además: $x + y + z = 20$ ...(2)

(1) − (2): $7x + 4y = 80$ ...(α)

Respecto al módulo 4: $(\overset{\circ}{4} + 3)x + \overset{\circ}{4} = \overset{\circ}{4}$

$3x = \overset{\circ}{4} \Rightarrow x = 4 \vee x = 8$

En (α): $y = 13 \vee y = 6$

En (2): $z = 3 \vee z = 6$

Pero: $x \neq y \neq z$

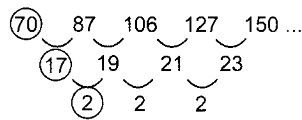
Luego, se compraron 4 estampillas de \$4; 13 estampillas de \$2,5 y 3 estampillas de \$0,5.

∴ Se compraron 13 estampillas de \$ 2,5.

21. ¿Qué lugar ocupa el octavo término de la forma $(\overset{\circ}{13} + 3)$, en la siguiente serie: 70; 87; 106; 127; 150; ...?

Resolución:

Hallamos el enésimo término de la serie:



$$T_n = 70 \times 1 + 17(n-1) + 2\left[\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right]$$

Efectuando: $T_n = n^2 + 14n + 55$

Hallamos los términos $\overset{\circ}{13} + 3$ de la serie:

Se cumple: $n^2 + 14n + 55 = \overset{\circ}{13} + 3$

Respecto al módulo 13: $n(n + 14) = \overset{\circ}{13}$

Luego: $n = \overset{\circ}{13}$ ...(1) ∨

$n + 14 = \overset{\circ}{13} \Rightarrow n = \overset{\circ}{13} - 1$ ...(2)

De (1) y (2), los valores de "n" serán:

n = 12; 13; 25; 26; 38; 39; 51; 52; ...
└ 8.° término

∴ El lugar que ocupa el octavo término es 52.

22. Hallar el mayor valor que puede tomar "x + y", si:

$\overline{xy} + 3(\overline{xy}) + 5(\overline{xy}) + 7(\overline{xy}) + ... + 21(\overline{xy}) = \overset{\circ}{143}$

Resolución:

Sumando los 11 términos: $\overline{xy}\left(\frac{1+21}{2}\right)11 = \overset{\circ}{143}$

$\overline{xy} \times 121 = \overset{\circ}{143}$ < $\overset{\circ}{11}$, $\overset{\circ}{13}$ $\Rightarrow \overline{xy} = \overset{\circ}{13}$

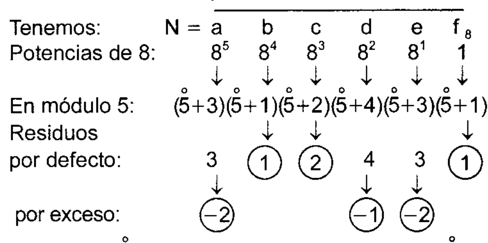
Valores de $\overline{xy}$: 13; 26; 39; 52; 65; (78); 91

∴ El mayor valor de x + y = 15.

23. ¿Qué condiciones deben cumplir las cifras del numeral $\overline{abcdef}_8$ para que sea divisible por 5?

Resolución:

Utilizamos los restos potenciales:



Luego: $N = \overset{\circ}{5} \Leftrightarrow -2a + b + 2c - d - 2e + f = \overset{\circ}{5}$

∴ Las cifras del numeral deben cumplir:

$-2a + b + 2c - d - 2e + f = \overset{\circ}{5}$

24. Determinar la suma de todos los números de la forma $\overline{27x4y}$ sabiendo que son divisibles por 36.

Resolución:

Por dato: $\overline{27x4y} = \overset{\circ}{36}$ < $\overset{\circ}{4}$, $\overset{\circ}{9}$

Divisibilidad por 4: $4y = \overset{\circ}{4}$ { 40 ⇒ y = 0; 44 ⇒ y = 4; 48 ⇒ y = 8

Divisibilidad por 9:

I. Si: y = 0 ⇒ $\overline{27x40} = \overset{\circ}{9}$
$2 + 7 + x + 4 + 0 = \overset{\circ}{9} \Rightarrow x = 5$
⇒ El número: 27 540

II. Si: y = 4 ⇒ $\overline{27x44} = \overset{\circ}{9}$
$2 + 7 + x + 4 + 4 = \overset{\circ}{9} \Rightarrow x = 1$
⇒ El número: 27 144

III. Si: y = 8 ⇒ $\overline{27x48} = \overset{\circ}{9}$
$2 + 7 + x + 4 + 8 = \overset{\circ}{9} \Rightarrow x = 6$
⇒ El número: 27 648

∴ Sumando los números:
27 540 + 27 144 + 27 648 = 82 332

25. Sabiendo que: $\underbrace{\overline{abc...pqr}_3}_{665 \text{ cifras}} = 665665665..._8$,

hallar el valor de: "q + r"

Resolución:

Determinamos el criterio de divisibilidad por 3 en base 8.

	N = a	b	c	d	e	f_8
Potencias de 8:	$\underline{8^5}$	8^4	$\underline{8^3}$	8^2	$\underline{8}$	1
Restos potenciales (módulo 3)	①	①	①	①	①	1

Utilizando luego el criterio de divisibilidad por 3 en base 8, es múltiplicar a las cifras del numeral de derecha a izquierda por las cifras: 1; −1; 1; −1;...

Tenemos: $\overline{\underbrace{abc\ldots pq}_{\overset{\circ}{9}}\,r}_3$ ($3^2 3$) $= \underbrace{665665665\ldots66_8}_{665\text{ cifras}}$

Utilizando divisibilidad por 3 en base 8:
Vemos que el grupo de 6 cifras:
$\underline{5}\,6\,\underline{6}\,5\,\underline{6}\,6 \Rightarrow -5+6-6+5-6+6=0=\overset{\circ}{3}$

En todo el numeral:

$$\overset{\circ}{3}+r=\underset{1}{6}\,\underset{1}{\underline{6}}\,\underset{1}{5}\,\underset{1}{\underline{6}}\,\underset{1}{6}\,\underbrace{\overbrace{5\,6\,6\,5\ldots6\,6\,5\,6\,6\,5\,6\,6}^{110\text{ veces}}_8}_{\substack{660\text{ cifras}\\ \overset{\circ}{3}}}$$

Tenemos: $\overset{\circ}{3}+r=6-6+5-6+6$

$\Rightarrow \overset{\circ}{3}+r=5 \quad\Rightarrow r=2$

Hallamos "q":

$\overline{\underbrace{abc\ldots p}_{\overset{\circ}{9}}\,q\,2}_3$ (3^2 | 3 1) $= \underbrace{6\,6\,5\,6\,6\,5\ldots6\,6_8}_{665\text{ cifras}}$

Divisibilidad por 9 en base 8:

$$\overset{\circ}{9}+3q+2=\underset{1}{6}\,\underset{1}{\underline{6}}\,\underset{1}{5}\,\underset{1}{\underline{6}}\,\underset{1}{6}\,\underbrace{\overbrace{5\,6\,6\,5\ldots6\,6\,5\,6\,6\,5\,6\,6}^{\overset{\circ}{9}(110)\text{ veces}}_8}_{\substack{660\text{ cifras}\\ \overset{\circ}{9}}}$$

$\overset{\circ}{9}+3q+2=\overset{\circ}{9}+5 \Rightarrow q=1 \qquad \therefore\ q+r=3$

26. Si el numeral $\overline{xyzxy}$ es divisible por 7 y el numeral $\overline{mmznn}$ es divisible por 252; hallar el valor de: m + n + z.

Resolución:

Por dato: $\overline{\underset{3}{x}\underset{1}{\underline{y}}\underset{2}{z}\underset{3}{x}\underset{1}{y}}=\overset{\circ}{7}$

Divisibilidad por 7: $-3x-y+2z+3x+y=\overset{\circ}{7}$

$2z=\overset{\circ}{7} \Rightarrow z=0 \lor z=7$

I. Si: $z=0$ $\quad\overline{mm0nn}=\overset{\circ}{252}$ $\begin{cases}\overset{\circ}{4}\\ \overset{\circ}{63}\end{cases}$

Divisibilidad por 4: $\overline{nn}=\overset{\circ}{4}$ $\begin{cases}00 \Rightarrow n=0\\ 44 \Rightarrow n=4\\ 88 \Rightarrow n=8\end{cases}$

Si: n = 0 $\quad\overline{mm000}=\overset{\circ}{63}$ (no hay solución)

Si: n = 4 $\quad\overline{mm044}=\overset{\circ}{63}$ (no hay solución)

Si: n = 8 $\quad\overline{mm088}=\overset{\circ}{63}$

Descomponiendo polinómicamente:
$11\,000m+88=\overset{\circ}{63}$

Respecto al módulo 63:
$(\overset{\circ}{63}+38)m+\overset{\circ}{63}+25=\overset{\circ}{63}$

$38m+25=\overset{\circ}{63} \Rightarrow m=1$

$\Rightarrow$ El número es: 11 088 $\quad\therefore\ \Sigma$cifras = 18

II. Si: $z=7$ $\quad\overline{mm7nn}=\overset{\circ}{252}$ $\begin{cases}\overset{\circ}{4}\\ \overset{\circ}{63}\end{cases}$

$\overline{nn}=\overset{\circ}{4} \quad\Rightarrow n=0 \lor n=4 \lor n=8$

(Se verifica que en este caso no hay solución)

$\therefore\ m+n+z=1+8+0=9$

27. Si el residuo de dividir: $H=\overline{645a}\times\overline{a231}\times\overline{aa27}$ por 7 es 2 y el numeral $\overline{ab(2a)}$ es múltiplo de 47, hallar el valor de: a + b

Resolución:

Se tiene: $\overline{645a}\times\overline{a231}\times\overline{aa27}=\overset{\circ}{7}+6$

Respecto al módulo 7:
$(\overset{\circ}{7}+3+a)(\overset{\circ}{7}-a)(\overset{\circ}{7}+a+6)=\overset{\circ}{7}+6$

Se verifica para: a = 3

Hallamos la cifra "b": $\overline{3b6}=\overset{\circ}{48}=47\times8=376$

$\Rightarrow b=7 \qquad\therefore\ a+b=10$

28. Encontrar el numeral de 4 cifras múltiplo de 19, tal que al permutar sus cifras circularmente, resulten numerales múltiplos de 11; 9 y 5; respectivamente. Dar como respuesta la suma de sus cifras.

Resolución:

Sea $\overline{abcd}$ el numeral.

Por datos: $\overline{abcd}=\overset{\circ}{19}$ ...(1)

Permutando circularmente sus cifras:

$\overline{dabc}=\overset{\circ}{11}$ ...(2)

$\overline{cdab}=\overset{\circ}{9}$ ...(3)

$\overline{bcda}=\overset{\circ}{5}$ ...(4)

De (4): a = 5

En (2): $\overline{\underset{-}{d}\underset{+}{5}\underset{-}{b}\underset{+}{c}}=\overset{\circ}{11}$

Divisibilidad por 11: $5+c-d-b=\overset{\circ}{11}=0$

$\Rightarrow 5+c=b+d$ ...(α)

De (3): Divisibilidad por 9: $c+\underbrace{d+5+b}_{5+c}=\overset{\circ}{9}$

$\Rightarrow 2c+1=\overset{\circ}{9} \Rightarrow c=4$

En (α): b + d = 9

En (1): $\overline{5b4(9-b)}=\overset{\circ}{19}$

Descomponiendo polinómicamente:

$5049+99b=\overset{\circ}{19}$

Respecto al módulo 19:

$\overset{\circ}{19} + 14 + (\overset{\circ}{19} + 4)b = \overset{\circ}{19} \Rightarrow 4b + 14 = \overset{\circ}{19}$

Cumplen: b = 6; d = 3

El numeral buscado es: 5643

$\therefore$ Σ cifras: 5 + 6 + 4 + 3 = 18

29. ¿Cuántos números de 3 cifras existen, tales que al ser expresados en base 5 y en base 7 terminan en las cifras 2 y 4, respectivamente. Además, tienen 4 cifras en dichos sistemas?

Resolución:

Hallamos los números de 3 cifras, que en base 5 y en base 7 tienen 4 cifras.

Base 5: 1000_5; 1001_5; 1002_5; ....; 4444_5
↓ ↓ ↓ ↓
125 126 127 624

Base 7: 1000_7; 1001_7; 1002_7; .... ; 6666_7
↓ ↓ ↓ ↓
343 344 345 2400

Los números buscados de 3 cifras:

{343; 344; ... ; 624}

Hallamos los números que sean $\overset{\circ}{5} + 2 \ \vee\ \overset{\circ}{7} + 4$; luego, el número N debe ser:

$\left.\begin{array}{l} N = \overset{\circ}{5} + 2 = \overset{\circ}{5} - 3 \\ N = \overset{\circ}{7} + 4 = \overset{\circ}{7} - 3 \end{array}\right\} N = MCM(5; 7) - 3$

$\Rightarrow N = \overset{\circ}{35} - 3$

Luego, los números de la forma $(\overset{\circ}{35} - 3)$ serán: 347; 382; 417; 452; 487; 522; 557; 592

$\therefore$ Existen 8 números

30. Si se cumple: $\overline{a3524b} = \overset{\circ}{33} + 21$; $\overline{5c27d4} = \overset{\circ}{99} + 35$

Además "a" es máximo, hallar el residuo de dividir $\overline{abcd}$ por 25.

Resolución:

De: $\overline{a3524b} = \overset{\circ}{33} + 21$

Divisibilidad por 33:

$\overline{a3} + 52 + \overline{4b} = \underbrace{\overset{\circ}{33} + 21}$

132 + 21 = 153 $\vee$ 165 + 21 = 186

1.ª posibilidad: $\overline{a3} + 52 + \overline{4b} = 153$

$\Rightarrow a = 5; b = 8$

2.ª posibilidad: $\overline{a3} + 52 + \overline{4b} = 186$

$\Rightarrow a = 9; b = 1$

El máximo valor de "a": $a_{máx} = 9$

De: $\overline{5c27d4} = \overset{\circ}{99} + 35$

Divisibilidad por 99:

$\overline{5c} + 27 + \overline{d4} = \underbrace{\overset{\circ}{99} + 35}$

99 + 35 = 134

$\Rightarrow c = 3; d = 5$

Luego, el número $\overline{abcd} = 9135 = \overset{\circ}{25} + 10$

$\therefore$ El residuo es 10

31. Encontrar un número de 4 cifras, tal que al ser dividido por 25; 11; 9 y 4 deja como residuos 23; 10; 6 y 1, respectivamente. Dar como respuesta la cifra de mayor orden.

Resolución:

Sea $\overline{abcd}$ el número buscado, tal que:

$\overline{abcd} = \overset{\circ}{25} + 23$ ...(1)

$\overline{abcd} = \overset{\circ}{11} + 10$ ...(2)

$\overline{abcd} = \overset{\circ}{9} + 6$ ...(3)

$\overline{abcd} = \overset{\circ}{4} + 1$ ...(4)

De (1): $\overline{cd} = \overset{\circ}{25} + 23 \left\{\begin{array}{l} 00 + 23 = 23 \\ 25 + 23 = 48 \\ 50 + 23 = 73 \\ 75 + 23 = 98 \end{array}\right.$

De (4): $\overline{cd} = \overset{\circ}{4} + 1 \Rightarrow \overline{cd} = 73$

En (2): $\overline{ab73} = \overset{\circ}{11} + 10$

$\ \ -+-+$

Divisibilidad por 11: $-a + b - 7 + 3 = \overset{\circ}{11} + 10$

$\Rightarrow b - a = \overset{\circ}{11} + 3$ ...(α)

En (3): $\overline{ab73} = \overset{\circ}{9} + 6$

Divisibilidad por 9: $a + b + 7 + 3 = \overset{\circ}{9} + 6$

$\Rightarrow a + b = \overset{\circ}{9} + 5$ ...(β)

(α) y (β): a = 1; b = 4

El número buscado es: 1473

$\therefore$ La cifra de mayor orden: 1.

32. ¿En qué cifra termina N, al ser convertido a base 8, si: $N = 5^2 + 9^4 + 13^6 + ... + 2413^{1206}$?

Resolución:

Hallamos la cantidad de sumandos:

$$\frac{2413 - 1}{4} = 603$$

El enésimo término de la serie: $a_n = (4n + 1)^2$

Efectuando: $a_n = \underbrace{16n^2}_{\overset{\circ}{8}} + \underbrace{8n}_{\overset{\circ}{8}} + 1 = \overset{\circ}{8} + 1$

Reemplazando:

$N = (\overset{\circ}{8} + 1)^2 + (\overset{\circ}{8} + 1)^4 + (\overset{\circ}{8} + 1)^6 + ... + (\overset{\circ}{8} + 1)^{1206}$

$N = \underbrace{(\overset{\circ}{8} + 1) + (\overset{\circ}{8} + 1) + (\overset{\circ}{8} + 1) + ... + (\overset{\circ}{8} + 1)}_{603 \text{ sumandos}}$

Resolviendo: $N = \overset{\circ}{8} + \underbrace{603}_{\overset{\circ}{8} + 3} = \overset{\circ}{8} + 3$

$\therefore$ N en base 8 termina en cifra 3.

33. Hallar el residuo de dividir G por 117, sabiendo que: $G = 10^6 + 10^{12} + 10^{18} + 10^{24} + ... + 10^{2004}$

Resolución:

Reescribiendo la serie:

$G = (10^6)^1 + (10^6)^2 + (10^6)^3 + (10^6)^4 + ... + (10^6)^{334}$

Pero: $10^6 = 1\,000\,000 = \overset{\circ}{117} + 1$

Reemplazando:

$G = (\overset{\circ}{117} + 1)^1 + (\overset{\circ}{117} + 1)^2 + (\overset{\circ}{117} + 1)^3 + \ldots + (\overset{\circ}{117} + 1)^{334}$

Al efectuar:

$G = \underbrace{(\overset{\circ}{117}+1) + (\overset{\circ}{117}+1) + (\overset{\circ}{117}+1) + \ldots + (\overset{\circ}{117}+1)}_{334 \text{ sumandos}}$

$G = \overset{\circ}{117} + \underbrace{334}_{\overset{\circ}{117} + 100} = \overset{\circ}{117} + 100$

∴ El residuo es 100

34. Hallar el residuo de dividir:
$T = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 2005^2$, por 8.

Resolución:

De: $T = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 2005^2$

Efectuando: $T = \dfrac{2005 \times 2006 \times 4011}{6}$

Simplificando: $T = 2005 \times 1003 \times 1337$

Respecto al módulo 8: $T = (\overset{\circ}{8} + 5)(\overset{\circ}{8} + 3)(\overset{\circ}{8} + 1)$

Efectuando: $T = \overset{\circ}{8} + 5 \times 3 \times 1 = \overset{\circ}{8} + \underbrace{15}_{\overset{\circ}{8} + 7} = \overset{\circ}{8} + 7$

∴ El residuo es 7.

35. Hallar el residuo de dividir el número M por 11, si:
$M = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + 7429^2$

Resolución:

Hallamos el número de sumandos:

$$\frac{7429 - (-1)}{2} = 3715$$

De: $M = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + 7429^2$

Efectuando: $M = \dfrac{3715 \times 7431 \times 7429}{3}$

Simplificando: $M = 3715 \times 2477 \times 7429$

Módulo 11: $M = (\overset{\circ}{11} + 8)(\overset{\circ}{11} + 2)(\overset{\circ}{11} + 4)$

$\Rightarrow M = \overset{\circ}{11} + 8 \times 2 \times 4 = \overset{\circ}{11} + \underbrace{64}_{\overset{\circ}{11} + 9} = \overset{\circ}{11} + 9$

∴ El residuo es 9

36. Hallar el residuo de dividir el número $N = 1997^{7991}$ por 5.

Resolución:

Sabemos que: $1997 = \overset{\circ}{5} + 2$

Reemplazando: $N = (\overset{\circ}{5} + 2)^{7991} = \overset{\circ}{5} + 2^{7991}$ ...(1)

Pero: $2^2 = \overset{\circ}{5} - 1$

En (1): $N = \overset{\circ}{5} + (2^2)^{3995}(2) \Rightarrow N = \overset{\circ}{5} + (\overset{\circ}{5} - 1)^{3995}(2)$

Reduciendo:

$N = \overset{\circ}{5} + (\overset{\circ}{5} - 1)(2) \Rightarrow N = \overset{\circ}{5} - 2 = \overset{\circ}{5} + 3$

∴ El residuo es 3.

37. Si el número $A = 343^{343}$ se convierte a base 2, ¿cuáles son sus tres últimas cifras?

Resolución:

- La última cifra es el residuo de dividir 343^{343} por 2.
  $343 = \overset{\circ}{2} + 1 \Rightarrow (\overset{\circ}{2} + 1)^{343} = \overset{\circ}{2} + 1$
  $\Rightarrow$ Su última cifra es: 1
- Hallamos la penúltima cifra (módulo 4).
  Divisibilidad por 4:

  $343^{343} = \overline{\ldots a1}_2 = \overset{\circ}{4} + 2a + 1$ ...(1)

  $2^2 \mid 21$

  $\overset{\circ}{4}$

  Pero: $343 = \overset{\circ}{4} + 3$
  $\Rightarrow$ Efectuando: $(\overset{\circ}{4} + 3)^{343} = \overset{\circ}{4} + 3$
  En (1): $\overset{\circ}{4} + 3 = \overset{\circ}{4} + 2a + 1 \Rightarrow a = 1$
  $\Rightarrow$ La penúltima cifra es 1.
- Hallamos la antepenúltima cifra.

  $343^{343} = \overline{\ldots b11}_2 = \overset{\circ}{8} + 4b + 3$ ....(2)

  $2^3 \mid 2^2 2\ 1$

  $\overset{\circ}{8}$

  Pero: $343 = \overset{\circ}{8} - 1 \Rightarrow (\overset{\circ}{8} - 1)^{343} = \overset{\circ}{8} - 1 = \overset{\circ}{8} + 7$
  En (2): $\overset{\circ}{8} + 7 = \overset{\circ}{8} + 4b + 3 \Rightarrow b = 1$
  $\Rightarrow$ La antepenúltima cifra es 1.

∴ Las tres últimas cifras: 111

38. Hallar el residuo que se obtiene al dividir:
$\overline{ab1ab4}^{\overline{ab14}}$ por 11.

Resolución:

Hallamos el residuo de dividir el numeral ab1ab4 por 11:

$\overline{a\,b\,1\,a\,b\,4} = \overset{\circ}{11} - a + b - 1 + a - b + 4 = \overset{\circ}{11} + 3$
$- + - + - +$

Reemplazando: $(\overset{\circ}{11} + 3)^{\overline{ab14}} = \overset{\circ}{11} + 3^{\overline{ab14}}$

Analizamos las potencias de 3 con respecto al módulo 11.

	Exponente
$3^1 = \overset{\circ}{11} + 3$	$\Rightarrow \overset{\circ}{5} + 1$
$3^2 = \overset{\circ}{11} + 9$	$\Rightarrow \overset{\circ}{5} + 2$
$3^3 = \overset{\circ}{11} + 5$	$\Rightarrow \overset{\circ}{5} + 3$
$3^4 = \overset{\circ}{11} + 4$	$\Rightarrow \overset{\circ}{5} + 4$
$3^5 = \overset{\circ}{11} + 1$	$\Rightarrow \overset{\circ}{5}$

Pero, el exponente: $\overline{ab14} = \overset{\circ}{5} + 4$

Luego, el resultado será: $\overset{\circ}{11} + 4$

∴ El residuo es: 4

39. Hallar el mayor número capicúa de 5 cifras $\overline{abcba}$, tal que al elevar 2946 al exponente $\overline{abcba}$ y dividir el resultado por 11, el residuo es 9.

Resolución:

Por dato: $2946^{\overline{abcba}} = \overset{\circ}{11} + 9$

Pero: $2946 = \overset{\circ}{11} + 9$

Reemplazando: $(\overset{\circ}{11} + 9)^{\overline{abcba}} = \overset{\circ}{11} + 9^{\overline{abcba}}$

Analizamos las potencias de 9, con respecto al módulo 11.

Exponente

$9^1 = \overset{\circ}{11} + 9 \Rightarrow \overset{\circ}{5} + 1$

$9^2 = \overset{\circ}{11} + 4 \Rightarrow \overset{\circ}{5} + 2$

$9^3 = \overset{\circ}{11} + 3 \Rightarrow \overset{\circ}{5} + 3$

$9^4 = \overset{\circ}{11} + 5 \Rightarrow \overset{\circ}{5} + 4$

$9^5 = \overset{\circ}{11} + 1 \Rightarrow \overset{\circ}{5}$

Para que el resultado sea $(\overset{\circ}{11} + 9)$, el exponente debe ser $(\overset{\circ}{5} + 1)$, es decir:

$\overline{abcba} = \overset{\circ}{5} + 1 \Rightarrow a = \overset{\circ}{5} + 1 = 1 \vee 6$

El mayor valor: a = 6. Las cifras "b" y "c", toman cualquier valor.

Hallando el mayor número: 69 996.

$\therefore$ El mayor número: 69 996.

40. ¿Cuántos números de la forma $\overline{aba}$ existen, sabiendo que: $489^{\overline{aba}} = \overset{\circ}{11} + 4$?

Resolución:

Vemos que: $489 = \overset{\circ}{11} + 5$

Reemplazando: $(\overset{\circ}{11} + 5)^{\overline{aba}} = \overset{\circ}{11} + 5^{\overline{aba}}$

Analizamos las potencias de 5 con respecto al módulo 11.

Exponente

$5^1 = \overset{\circ}{11} + 5 \Rightarrow \overset{\circ}{5} + 1$

$5^2 = \overset{\circ}{11} + 3 \Rightarrow \overset{\circ}{5} + 2$

$5^3 = \overset{\circ}{11} + 4 \Rightarrow \overset{\circ}{5} + 3$

$5^4 = \overset{\circ}{11} + 9 \Rightarrow \overset{\circ}{5} + 4$

$5^5 = \overset{\circ}{11} + 1 \Rightarrow \overset{\circ}{5}$

Para que el resultado de $489^{\overline{aba}}$ sea $\overset{\circ}{11} + 4$, tenemos: $\overline{aba} = \overset{\circ}{5} + 3$

$a = \overset{\circ}{5} + 3 \begin{cases} 0 + 3 = 3 & \Rightarrow a = 3 \\ 5 + 3 = 8 & \Rightarrow a = 8 \end{cases}$

Pero "b" puede ser: {0; 1; 2; ...; 9} $\Rightarrow$ 10 valores.

Luego, el total de números: $2 \times 10 = 20$ números

$\therefore$ Existen 20 números.

41. Hallar el mayor valor de "x", si: $364^{227^{\overline{42x}}} = \overset{\circ}{9} + x$

Resolución:

Tenemos: $364 = \overset{\circ}{9} + 4$

Reemplazando: $(\overset{\circ}{9} + 4)^{227^{\overline{42x}}} = \overset{\circ}{9} + 4^{227^{\overline{42x}}}$

Las potencias de 4, con respecto al módulo 9:

Exponente

$4^1 = \overset{\circ}{9} + 4 \Rightarrow \overset{\circ}{3} + 1$

$4^2 = \overset{\circ}{9} + 7 \Rightarrow \overset{\circ}{3} + 2$

$4^3 = \overset{\circ}{9} + 1 \Rightarrow \overset{\circ}{3}$

Ahora: $227 = \overset{\circ}{3} + 2$

Reemplazando: $(\overset{\circ}{3} + 2)^{\overline{42x}} = \overset{\circ}{3} + 2^{\overline{42x}}$

Las potencias de 2, con respecto al módulo 3.

Exponente

$2^1 = \overset{\circ}{3} + 2 \Rightarrow$ impar

$2^2 = \overset{\circ}{3} + 1 \Rightarrow$ par

Se presentan dos casos:

1.° Si el exponente $(\overline{42x})$ es impar: $227^{(impar)} = \overset{\circ}{3} + 2$

Luego: $364^{(\overset{\circ}{3}+2)} = \overset{\circ}{9} + 7 \Rightarrow x = 7$

2.° Si el exponente $(\overline{42x})$ es par:

$227^{(par)} = \overset{\circ}{3} + 1$

Luego: $364^{(\overset{\circ}{3}+1)} = \overset{\circ}{9} + 4 \Rightarrow x = 4$

$\therefore$ El mayor valor de "x" es 7.

42. Hallar las dos últimas cifras de convertir el número $T = (55\,555)^{(4444)^{(333)^{(22)}}}$ a base 3.

Resolución:

Se cumple: $(55\,555)^{(4444)^{(333)^{(22)}}} = \overline{a\,b \ldots x\,y\,z}$

$3^2\ 3^1 1$

- Hallando "z", es el residuo de dividir T por 3.
  Respecto al módulo 3: $55\,555 = \overset{\circ}{3} + 1$

  Reemplazando: $(\overset{\circ}{3} + 1)^{(4444)^{(333)^{(22)}}} = \overset{\circ}{3} + z$

  $\overset{\circ}{3} + 1 = \overset{\circ}{3} + z \Rightarrow z = 1$
- Hallando "y", con respecto al módulo 9:

  $55\,555 = \overset{\circ}{9} + 7$

  Reemplazando: $(\overset{\circ}{9} + 7)^{(4444)^{(333)^{(22)}}} = \overset{\circ}{9} + 3y + z$

  Pero: $4444 = \overset{\circ}{3} + 1 \Rightarrow (\overset{\circ}{3} + 1)^{(333)^{(22)}} = \overset{\circ}{3} + 1$

  Luego: $(\overset{\circ}{9} + 7)^{(\overset{\circ}{3}+1)} = \overset{\circ}{9} + 3y + 1$

  $\overset{\circ}{9} + 7 = \overset{\circ}{9} + 3y + 1 \Rightarrow y = 2$

$\therefore$ Las dos últimas cifras son: 21.

43. Si: $\overline{ab} = \overset{\circ}{7}$ y $8 \times 10^{\overline{ab}} + 9^{\overline{ba}} = \overset{\circ}{72} + (a + b)$; hallar el valor de a − b.

Resolución:

De: $8 \times 10^{\overline{ab}} + 9^{\overline{ba}} = \overset{\circ}{72} + a + b$

Pero: 72 es $\overset{\circ}{8}$ y $\overset{\circ}{9}$.

- Expresándolo con respecto al módulo 8:

  $\overset{\circ}{8} + \underbrace{(\overset{\circ}{8} + 1)^{\overline{ba}}} = \overset{\circ}{8} + a + b$

  $\overset{\circ}{8} + 1 \Rightarrow a + b = \overset{\circ}{8} + 1$ ...(1)
- Con respecto al módulo 9:

  $8\underbrace{(\overset{\circ}{9} + 1)^{\overline{ab}}} + \overset{\circ}{9} = \overset{\circ}{9} + a + b$

  $\overset{\circ}{9} + 8 \Rightarrow a + b = \overset{\circ}{9} + 8$ ...(2)

  De (1) y (2): a + b = 17

  Pero: $\overline{ab} = \overset{\circ}{7} \Rightarrow \overline{ab} = 98 \quad \therefore a - b = 1$

44. Hallar el residuo de dividir el número:

$H = 3^{4n+2} + 2 \times 4^{3n+1}$ por 17.

Resolución:

Del número: $H = 3^{4n+2} + 2 \times 4^{3n+1}$

En forma equivalente: $H = 3^{4n} \times 3^2 + 2 \times 4^{3n} \times 4$

Efectuando: $H = 3^{4n} \times 9 + 4^{3n} \times 8$

También: $H = (3^4)^n(9) + (4^3)^n(17 - 9)$

$\Rightarrow H = 81^n \times 9 + 64^n (17 - 9)$

$H = 81^n \times 9 + \underbrace{64^n \times 17}_{\overset{\circ}{17}} - 64^n \times 9$

Factorizando: $H = (81^n - 64^n)(9)$

Respecto al módulo 17:

$H = [(\overset{\circ}{17} + 13)^n - (17 + 13)^n](9)$

Desarrollando: $H = \underbrace{(\overset{\circ}{17} + 13^n - \overset{\circ}{17} - 13^n)(9)}_{\overset{\circ}{17}}$

$\Rightarrow H = \overset{\circ}{17}$ $\therefore$ El residuo de la división es cero.

45. En un centro educativo se tiene que el número de estudiantes al ser contado de tres en tres, sobra 1, de 5 en 5, sobran 2 y de 7 en 7 sobran 3. Hallar la suma de las cifras del número de estudiantes, sabiendo que está comprendido entre 500 y 600.

Resolución:

Tenemos:

$N = \overset{\circ}{3} + 1$ ...(1)

$\left.\begin{array}{l} N = \overset{\circ}{5} + 2 = \overset{\circ}{5} + 17 \\ N = \overset{\circ}{7} + 3 = \overset{\circ}{7} + 17 \end{array}\right\} N = \overset{\circ}{35} + 17$ ...(2)

De (1) y (2): $3p + 1 = 35q + 17$; $p, q \in \mathbb{Z}$

Obtenemos la ecuación diofántica: $3p + (-35)q = 16$

Como: $-35 = 3(-11) - 2 \Rightarrow 2 = 3(-11) + 35$

$\Rightarrow 16 = 3(-88) + 35(8)$

$\Rightarrow 16 = 3(-88) + (-35)(-8)$

Comparando con la ecuación diofántica, una solución es: $p_0 = -88$, $q_0 = -8$

La solución general es:

$p = -88 - 35n$; $q = -8 - 3n$; $n \in \mathbb{Z}$

Como $N = \overset{\circ}{35} + 17$, es decir $N = 35q + 17$ y $500 < N < 600$; hacemos $n = -8$, con lo cual: $q = -8+24 = 16$

Así se tiene: $N = 35 \times 16 + 17 = 577$

$\therefore \Sigma$ cifras $= 5 + 7 + 7 = 21$

46. Cuántos valores puede tomar $\overline{mnm}$, si:

$$489^{\overline{mnm}} = \overset{\circ}{11} + 4$$

Resolución:

Como: $489^{\overline{mnm}} = \overset{\circ}{11} + 4$ HHH

$489^{\overline{mnm}} = (\overset{\circ}{11} + 5)^{\overline{mnm}} = \overset{\circ}{11} + 5^{\overline{mnm}}$

Analizamos las potencias de 5 con respecto al módulo 5:

$5^0 = \overset{\circ}{11} + 1$ $5^5 = \overset{\circ}{11} + 1$

$5^1 = \overset{\circ}{11} + 5$ $5^6 = \overset{\circ}{11} + 5$

$5^2 = \overset{\circ}{11} + 3$ $5^7 = \overset{\circ}{11} + 3$

$5^3 = \overset{\circ}{11} + 4$ $5^8 = \overset{\circ}{11} + 4$

$5^4 = \overset{\circ}{11} + 9$ $5^9 = \overset{\circ}{11} + 9$

El gaussiano de las potencias de 5 con respecto al módulo 11 es 5.

Para que el residuo sea 4, el exponente debe ser $\overset{\circ}{5} + 4$. Luego: $\overline{mnm} = \overset{\circ}{5} + 4$

Entonces, m toma 2 valores: 4 o 5 y n puede tomar cualquiera de los 10 valores posibles del 0 al 9.

$\therefore$ $\overline{mnm}$ puede tomar (2)(10) = 20 valores.

47. Sea N un número de 5 cifras diferentes y no nulas. Sabiendo que N es igual a la suma de todos los números de tres cifras diferentes que puede formarse con las 5 cifras de N, halle la suma de las cifras de N.

Resolución:

Sea el numeral buscado $N = \overline{abcde}$, en donde sus cifras son diferentes entre sí. El total de numerales de la forma $\overline{xyz}$ de cifras diferentes entre sí, que se puede formar con las cifras de N es:

$$\begin{array}{ccc} \overline{x} & \overline{y} & \overline{z} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (5) & (4) & (3) \end{array} = 60$$

Donde la suma de todos ellos es:

- En unidades:

  $\frac{60}{5}(a + b + c + d + e) = 12(a + b + c + d + e)$

- En decenas:

  $\frac{60}{5}(a + b + c + d + e) = 12(a + b + c + d + e)$

  Lo que el equivalente en unidades

  $120(a + b + c + d + e)$

- En centenas:

  $\frac{60}{5}(a + b + c + d + e) = 12(a + b + c + d + e)$

  Lo que es equivalente en unidades

  $1200(a + b + c + d + e)$

  Luego:

  Suma total: $1332 \times (a + b + c + d + e)$

  Por dato: $\overline{abcde} = \underbrace{1332}_{\overset{\circ}{9}} \times (a + b + c + d + e)$

  $\overline{abcde} = \overset{\circ}{9} \Rightarrow a + b + c + d + e = \overset{\circ}{9}$

  Por lo que: $a + b + c + d + e$

  Puede ser: 9; 18; 27; 36; 45

  Luego, $\overline{abcde} = 1332 \times \underbrace{(a + b + c + d + e)}_{\text{solo cumple con 27}}$

  $\overline{abcde} = 1332 \times 27 = 35\,964$

$\therefore \Sigma$ cifras: $3 + 5 + 9 + 6 + 4 = 27$

48. El número $\overline{abcd}$ es múltiplo de 8 y cuando se cambia al sistema de numeración de base 8, el último cociente es 6; el penúltimo residuo es 6 y el último residuo es 7. Hallar $a + b + c + d$.

Resolución:

Como $\overline{abcd} = \overset{\circ}{8}$ al cambiar a base 8, la primera división deja resto cero.

$$\begin{array}{l} \overline{abcd} \,|\, 8 \\ \textcircled{0} \quad \overline{\;8\;} \\ \quad \textcircled{6} \quad 8 \\ \qquad \textcircled{7} \quad 8 \\ \qquad\quad \textcircled{6} \end{array}$$

$\overline{abcd} = 6760_{(8)} = 3568$

$\therefore$ $a + b + c + d = 3 + 5 + 6 + 8 = 22$

49. Un alumno de una academia preuniversitaria recuerda que $\overline{53a33b5}$ es el número telefónico de su amiga. También se acuerda que $\overline{3a33b}$ es múltiplo de 7 y de 11 y no contiene ceros. Determine la suma de los dígitos de dicho número telefónico.

Resolución:

Número telefónico $\overline{53a33b5}$

Además por dato: $\overline{3a33b} = \overset{\circ}{7} \vee \overset{\circ}{11}$

I. $\overline{3a33b} = \overset{\circ}{7} \Rightarrow 6 + \underbrace{b - a}_{} = \overset{\circ}{7}$

$\begin{array}{l} 31231 \\ (-)(+) \end{array}$ $\qquad b - a$: -6; 1; 8

II. $\overline{3\,a\,3\,3\,b} = \overset{\circ}{11} \Rightarrow 3 + \underbrace{b - a}_{} = 11$

$+ - + - +$ $\qquad b - a$: -3; 8

Podemos concluir de (I) y (II) que $b - a = 8$

Por dato del problema a y b son diferentes de cero, entonces:

$$\begin{array}{ccc} b & - & a = 8 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 9 & & 1 \end{array}$$

Luego, el número telefónico es:

$\overline{53a33b5} = 5313395$

$\therefore$ La suma de las cifras es 29.

50. ¿Cuál es el menor valor entero positivo que puede tomar el cociente al dividir un número de la forma $\overset{\circ}{29} + 27$ entre otro de la forma $\overset{\circ}{29} + 4$, obteniéndose resto 2?

Resolución:

$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline R & q \end{array} \Rightarrow D = dq + R$

Donde: $D = \overset{\circ}{29} + 27$; $d = \overset{\circ}{29} + 4$

$\underbrace{(\overset{\circ}{29} + 27)}_{} = (\overset{\circ}{29} + 4)q + 2 \quad (2 = \text{resto})$

$\overset{\circ}{29} - 2 = \overset{\circ}{29} + 4q + 2$

$\overset{\circ}{29} - 4 = 4q \Rightarrow \overset{\circ}{29} - 1 = q$

Donde: $q = \overset{\circ}{29} + 28 \quad \therefore$ Menor $q = 28$

51. El número $\overline{abcd}$ es divisible por 9, $\overline{cabd}$ es divisible por 17; $\overline{bdca}$ es divisible por 11 y $\overline{acbd}$ es divisible por 4. Hallar a.

Resolución:

- $\overline{cabd} = \overset{\circ}{17}$ ...(1)
- $\overline{abcd} = \overset{\circ}{9}$, pero todo número formado con estas 4 cifras: a, b, c, d, será $\overset{\circ}{9}$ $\overline{bacd} = \overset{\circ}{9}$, $\overline{bdac} = \overset{\circ}{9}$, etc.

  $\Rightarrow \overline{cabd} = \overset{\circ}{9}$ ...(2)
- $\overline{bdca} = \overset{\circ}{11}$ $(100 = \overset{\circ}{11} + 1)$

  significa $\overline{bd} + \overline{ca} = \overset{\circ}{11}$

  también $\overline{ca} + \overline{bd} = \overset{\circ}{11}$

  $\Rightarrow \overline{cabd} = \overset{\circ}{11}$ ...(3)
- $\overline{acbd} = \overset{\circ}{4}$, todo número que acaba en $\overline{bd}$ será $\overset{\circ}{4}$.

  $\Rightarrow \overline{cabd} = \overset{\circ}{4}$ ...(4)

  De (1); (2); (3) y (4):

  $\overline{cabd} = \overset{\circ}{17};\ \overset{\circ}{9};\ \overset{\circ}{11};\ \overset{\circ}{4}$

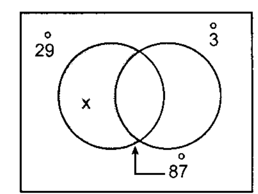
  $\overline{cabd} = \overset{\circ}{\overline{\text{MCM}(\underbrace{17;\ 9;\ 11;\ 4}_{\text{PESI 2 a 2}})}}$

  $\overline{cabd} = \overset{\circ}{\overline{(17 \times 9 \times 11 \times 4)}} = \overset{\circ}{6732}$

$\therefore$ Solo $\overline{cabd} = 6732 \Rightarrow a = 7$

52. De los 4350 primeros números naturales, cuántos son divisibles entre 29 pero no entre 3?

Resolución:



4350 primeros números naturales

Son $\overset{\circ}{29}$: $\left[\dfrac{4350}{29}\right] = 150$; $\quad$ Son $\overset{\circ}{87}$: $\left[\dfrac{4350}{87}\right] = 50$

$\therefore$ Son $\overset{\circ}{29}$ pero no $\overset{\circ}{3}$ (no son $\overset{\circ}{87}$): $150 - 50 = 100$

53. Si M tiene 9 cifras distintas (ninguna es cero) siempre es múltiplo de n, cualquiera sea el orden de las cifras. Hallar el mayor valor de n.

Resolución:

9 cifras significativas ($\neq 0$)

Distintas: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9

$\Rightarrow M = \overset{\circ}{n}$, cualquiera sea el orden de las cifras, lo que no varía en el orden es la suma de las cifras.

Los criterios de divisibilidad que utilizan las sumas de cifras es por 3 y 9.

Como $\underbrace{1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 9}_{\text{en cualquier orden}} = 45 = \overset{\circ}{3} \wedge \overset{\circ}{9}$

$\Rightarrow M = \overset{\circ}{3}$ y $\overset{\circ}{9} \quad \therefore$ mayor valor de $n = 9$

54. El número $\overline{a26b}$ es múltiplo de 11. Hallar la diferencia entre el mayor y el menor.

Resolución:

Se tiene lo siguiente: $\overline{a26b} = \overset{\circ}{11}$

Aplicando criterio de divisibilidad por 11:

$$\overline{a2} + \overline{6b} = \overset{\circ}{11}$$

$$\overline{ab} + 62 = \overset{\circ}{11}$$

$$\overline{ab} + 7 = \overset{\circ}{11}$$

(mínimo)	15	22
	26	33
	37	44
	⋮	⋮
(máximo)	92	99

Máximo número: 9262

Mínimo número: 1265

∴ Diferencia: 9262 − 1265 = 7997

55. Hallar el menor número de 3 cifras, múltiplo de 10, que al sumarle 2 unidades es $\overset{\circ}{12}$ y si se le añade 2 unidades más es $\overset{\circ}{14}$. Dar como respuesta la suma de sus cifras.

Resolución:

$N = \overset{\circ}{10} \Rightarrow N = \overset{\circ}{10} + 10 \Rightarrow N - 10 = \overset{\circ}{10}$

$N + 2 = \overset{\circ}{12} \Rightarrow N + 2 = \overset{\circ}{12} + 12 \Rightarrow N - 10 = \overset{\circ}{12}$

$N + 4 = \overset{\circ}{14} \Rightarrow N + 4 = \overset{\circ}{14} + 14 \Rightarrow N - 10 = \overset{\circ}{14}$

$\Rightarrow N - 10 = \overset{\circ}{\overline{MCM(10;\ 12;\ 14)}} \Rightarrow N - 10 = \overset{\circ}{420}$

$\Rightarrow N = \overset{\circ}{420} + 10 \Rightarrow N = 430$ ∴ Σ cifras = 7

56. En la serie: 48 × 10; 48 × 11; 48 × 12; .... ; 48 × 1344 ¿cuántos términos son $\overset{\circ}{11} + 5$?

Resolución:

Término genérico: 48k; para $10 \leq k \leq 1344$

Buscamos: $48k = \overset{\circ}{11} + 5 \Rightarrow \overset{\circ}{11} + 4k = \overset{\circ}{11} + 5$

$\Rightarrow 4k = \overset{\circ}{11} + 5 \Rightarrow 4k = \overset{\circ}{11} + 11 + 5$

$4(k - 4) = \overset{\circ}{11} \Rightarrow k - 4 = \overset{\circ}{11} \Rightarrow k = \overset{\circ}{11} + 4 = 11m + 4$

$10 \leq 11m + 4 \leq 1344$

$0,5 \leq m \leq 121,8 \Rightarrow m$: 1; 2; 3; ...; 121

∴ En la serie, 121 términos son $\overset{\circ}{11} + 5$

57. Si $N = \overline{abbbba}$ a un número múltiplo de 25, hallar el menor a + b.

Resolución:

$\overline{ba} = \overset{\circ}{25} \Rightarrow a = 0 \lor 5 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow b = 2$

∴ a + b = 7.

58. Si los números n y p son múltiplos de 5, entonces la expresión siguiente:

$32p^{32n} + 28p^{28n} + 24p^{24n} + ... + 4p^{4n}$; es

Resolución:

$\forall N \in \mathbb{Z};\ N = \overset{\circ}{5} + r;\ r \in \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\}$

Siempre $(\overset{\circ}{5} + 4)^4 = \overset{\circ}{5} + 1$

Reemplazando:

$32(\overset{\circ}{5} + 1) + 28(\overset{\circ}{5} + 1) + 24(\overset{\circ}{5} + 1) + ...$

$+ 4(\overset{\circ}{5} + 1) = \overset{\circ}{5} + 4 = \overset{\circ}{5} - 1$

59. Un número de 6 cifras es constituido repitiendo otro número de 3 cifras. Entonces podemos afirmar que dicho número de 6 cifras es siempre divisible entre los números.

Resolución:

Sea el numeral $\overline{abc}$, se forma el numeral $\overline{abcabc}$.

Descomponiendo en bloques:

$\overline{abcabc} = 1000(\overline{abc}) + \overline{abc} = 1001(\overline{abc})$

Se observa que siempre es divisible por 1001 (1001 = 7 × 11 × 13) y los factores que lo conforman, entre ellos 7; 11 y 13.

∴ $\overline{abcabc} = \overset{\circ}{8};\ \overset{\circ}{11};\ \overset{\circ}{13}$

60. Sea $N = \overline{m2np3}$; halle el valor de a para que el número $\overline{manp8}$ sea múltiplo de 72, sabiendo que $N - 2 = \overset{\circ}{9}$

Resolución:

Si: $N = \overset{\circ}{9} + 2$

Analizamos N; criterio $\overset{\circ}{9} \Rightarrow m + n + p = \overset{\circ}{9} - 3$

En el número:

$\overline{manp8} = \overset{\circ}{72} \begin{cases} \overset{\circ}{9} \\ \overset{\circ}{8} \text{ (no es necesario)} \end{cases}$

Respecto $\overset{\circ}{9}$: $m + n + p + a + 8 = \overset{\circ}{9}$

∴ Reemplazando: $a = \overset{\circ}{9} - 5 \Rightarrow a = 4$

61. Los números 7213 y 8535 se dividen entre un mismo número de dos cifras obteniéndose por residuos 13 y 15 respectivamente. Determine la suma de todos los valores que puede tomar dicho número de dos cifras.

Resolución:

Sea $\overline{ab}$ el número de 2 cifras.

Por condición:

$7213 = \overset{\circ}{\overline{ab}} + 13 \Rightarrow 7200 = \overset{\circ}{\overline{ab}}$

$8535 = \overset{\circ}{\overline{ab}} + 15 \Rightarrow 8520 = \overset{\circ}{\overline{ab}}$

Como: $\overline{ab} > 15$

$\Rightarrow \overline{ab}$ es divisor común de 7200 y 8520

MCD(7200; 8520) = 120

$\Rightarrow \overline{ab}$ es divisor de 120

MCD(7200; 8520) = $2^3 \times 3 \times 5$

Elaborando la tabla de divisores de 120

		1	2	4	8
1	1	1	2	4	8
	3	3	6	12	(24)
5		5	10	(20)	(40)
		15	(30)	(60)	123

∴ Σvalores($\overline{ab}$) = 20 + 24 + 30 + 40 + 60 = 234

62. Si a + b = 5, calcule el residuo de dividir N entre 7, siendo $N = 1355^{\overline{ab1ab2ab3...ab8}^{\overline{UNI2006}}}$

Resolución:

Se tiene $N = 1355^{\overline{ab1ab2ab3...ab8}^{\overline{UNI2006}}} = \overset{\circ}{7} + r$

$N = (\overset{\circ}{7} + 4)^{\overline{ab1ab2ab3...ab8}^{\overline{UNI2006}}}$

Hallamos los restos potenciales de 4 respecto al módulo 7.

$$\left.\begin{array}{l} 4^0 = \overset{\circ}{7} + 1 \\ 4^1 = \overset{\circ}{7} + 4 \\ 4^2 = \overset{\circ}{7} + 2 \\ 4^3 = \overset{\circ}{7} + 1 \\ 4^4 = \overset{\circ}{7} + 4 \\ 4^5 = \overset{\circ}{7} + 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Se afirma que} \\ 4^{\overset{\circ}{3}} = \overset{\circ}{7} + 1 \\ 4^{\overset{\circ}{3}+1} = \overset{\circ}{7} + 4 \\ 4^{\overset{\circ}{3}+2} = \overset{\circ}{7} + 2 \end{array}$$

Luego: $N = \overset{\circ}{7} + 4^{\overline{[\overset{\circ}{3} + 8\underbrace{(a+b)}_{5(\text{dato})} + 36]}^{\overline{UNI2006}}}$

$\Rightarrow N = \overset{\circ}{7} + 4^{(\overset{\circ}{3}+1)^{\overline{UNI2006}}} \Rightarrow N = \overset{\circ}{7} + 4^{\overset{\circ}{3}+1}$

De la observación anterior:

$N = \overset{\circ}{7} + (\overset{\circ}{7} + 4) \quad \therefore N = \overset{\circ}{7} + 4 \Rightarrow r = 4$

63. ¿Cuántos números de 4 cifras cuadrados perfectos son de la forma $\overset{\circ}{7} + 2$?

Resolución:

$k^2 = \overset{\circ}{7} + 2;\ k^2 = \overset{\circ}{7} + 2 + 7;\ k^2 = \overset{\circ}{7} + 9$

$\Rightarrow k = \overset{\circ}{7} + 3 \ \vee \ \overset{\circ}{7} - 3$

Como k^2 es de 4 cifras: $1000 \leq k^2 < 10\,000$

$\Rightarrow 31 \leq k < 100$

Los valores que puede tomar k son:

$k = \overset{\circ}{7} + 3$:

$\underbrace{(7 \times 5 + 3); (7 \times 6 + 3); (7 \times 7 + 3); ...; (7 \times 13 + 3)}_{9 \text{ valores}}$

$k = \overset{\circ}{7} - 3$:

$\underbrace{(7 \times 5 - 3); (7 \times 6 - 3); (7 \times 7 - 3); ...; (7 \times 14 - 3)}_{10 \text{ valores}}$

∴ Existen 19 cuadrados perfectos.

64. Entre los 1512 primeros números naturales, ¿cuántos son múltiplos de 3 y no de 9?

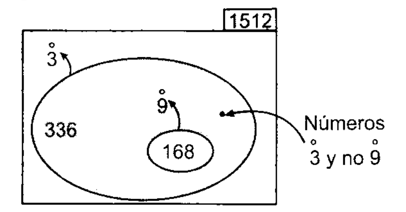
Resolución:

Si se tiene 1512 números, entonces:

Cantidad de números $\overset{\circ}{3}$: $\dfrac{1512}{3} = 504$

Cantidad de números $\overset{\circ}{9}$: $\dfrac{1512}{9} = 168$

En el gráfico:



∴ La cantidad de números $\overset{\circ}{3}$ pero no $\overset{\circ}{9}$ es:

504 − 168 = 336

65. Un número $M = \overset{\circ}{23} + 8$ se divide entre $N = \overset{\circ}{23} + 6$ y se obtiene un cociente de tres cifras $C = \overset{\circ}{13} + 6$ y un resto R = 5. ¿Cuántos valores posibles puede tomar el cociente?

Resolución:

Nos piden los valores del cociente C, el cual ya es $\overset{\circ}{13} + 6$, veamos (gracias al algoritmo de la división) como es respecto al módulo 23.

$$\begin{array}{r|l} \overset{\circ}{23} + 8 & \overset{\circ}{23} + 6 \\ \hline 5 & C \end{array}$$

$\Rightarrow \overset{\circ}{23} + 8 = (\overset{\circ}{23} + 6)C + 5$

Despejando: $C = \overset{\circ}{23} + 12$

Luego $C = \overset{\circ}{23} + 12 + 46 \ \vee \ \overset{\circ}{13} + 6 + 52$

Entonces: $C = \overset{\circ}{\overline{MCM(23; 13)}} + 58 = \overset{\circ}{299} + 58$

Luego $\overset{\circ}{299} + 58 = 299k + 58$

Dado que C es de 3 cifras, k solo puede ser 1; 2 o 3.

∴ El cociente toma 3 valores.

66. Demostrar que si $\overline{abcba}_{(7)} = \overset{\circ}{5}$, entonces $2a = \overset{\circ}{5} + c$

Resolución:

$$\overline{abcba}_{(7)} = \overset{\circ}{5}$$

Como en base 7 no disponemos de un método práctico para que sea múltiplo de 5, entonces lo descomponemos polinómicamente y lo reducimos respecto al módulo 5.

$\overline{abcba}_{(7)} = \overset{\circ}{5}$

$a \times 7^4 + b \times 7^3 + c \times 7^2 + b \times 7 + a = \overset{\circ}{5}$

$2401a + 343b + 49c + 7b + a = \overset{\circ}{5}$

$\underset{\overset{\circ}{5} + 2}{2402}a + \underbrace{350b}_{\overset{\circ}{5}} + \underbrace{49c}_{\overset{\circ}{5} - 1} = \overset{\circ}{5}$

$(\overset{\circ}{5} + 2)a + \overset{\circ}{5} + (\overset{\circ}{5} - 1)c = \overset{\circ}{5}$

$\overset{\circ}{5} + 2a + \overset{\circ}{5} + \overset{\circ}{5} - c = \overset{\circ}{5} \quad \therefore 2a = \overset{\circ}{5} + c$

67. Al dividir por exceso $1997^{\overline{8ab}} + \overline{ab}$ entre 13 se obtuvo como residuo 6, además $\overline{ab}$ al dividir entre 4 deja residuo máximo y al expresarlo en base 3 termina en 01. Determinar el residuo al dividir entre 11 la siguiente expresión:

$$E = 10^{3\overline{ab} + 1} + 1996^{4\overline{ab} + 2}$$

Resolución:

- $\left.\begin{array}{l} \overline{ab} = \overset{\circ}{4} + 3 \\ \overline{ab} = ...01_3 = \overset{\circ}{9} + 1 \end{array}\right\} \overline{ab} = \overset{\circ}{36} + 19 \quad ...(1)$

- Además: $\underbrace{1997}_{\overset{\circ}{13} + 8}{}^{8 \times \overline{ab}} + \overline{ab} = \overset{\circ}{13} - 6$

  $\Rightarrow \overset{\circ}{13} + 8^{8 \times \overline{ab}} + \overline{ab} = \overset{\circ}{13} - 6$

  $\Rightarrow 8^{8 \times \overline{ab}} + \overline{ab} = \overset{\circ}{13} - 7$

  Como: $8^4 = \overset{\circ}{13} + 1$

Luego: $(\overset{\circ}{13} + 1)^{\overline{ab}} + \overline{ab} = \overset{\circ}{13} + 7$

$\Rightarrow \overset{\circ}{13} + 1 + \overline{ab} = \overset{\circ}{13} + 7 \Rightarrow \overline{ab} = \overset{\circ}{13} + 6$

$\Rightarrow \overline{ab} = \overset{\circ}{13} + 19$ ...(2)

De (1) y (2): $\overline{ab} = \overset{\circ}{13} \times \overset{\circ}{36} + 19 \Rightarrow \overline{ab} = 19$

Nos piden: $E = 10^{3\times 19+1} + 1996^{4\times 19+2}$

$\Rightarrow E = (\overset{\circ}{11} - 1)^{par} + (\overset{\circ}{11} + 5)^{78} = \overset{\circ}{11} + 1 + 5$

Analizando restos potenciales de 5 respecto al módulo 11:

$5^0 = \overset{\circ}{11} + 1$ $\quad 5^2 = \overset{\circ}{11} + 3$ $\quad 5^4 = \overset{\circ}{11} + 9$

$5^1 = \overset{\circ}{11} + 5$ $\quad 5^3 = \overset{\circ}{11} + 4$ $\quad 5^5 = \overset{\circ}{11} + 1$

Luego: $E = \overset{\circ}{11} + 1 + (\overset{\circ}{11} + 4)$

$\therefore E = \overset{\circ}{11} + 5$ (residuo 5)

68. De entre los cinco números: $N_1 = 3^4 - 1$; $N_2 = 3^5 - 1$; $N_3 = 3^6 - 1$; $N_4 = 3^7 - 1$; $N_5 = 3^8 - 1$, cuáles son divisibles entre 8.

Resolución:

Analizando las potencias de 3 con respecto al módulo 8:

$3^0 = \overset{\circ}{8} + 1$

$3^1 = \overset{\circ}{8} + 3$

$3^2 = \overset{\circ}{8} + 1$

$3^3 = \overset{\circ}{8} + 3$

⋮ ⋮ ⋮

Se observa que:

I. Si n es par: $3^n = \overset{\circ}{8} + 1 \Rightarrow 3^n - 1 = \overset{\circ}{8}$

II. SI n es impar: $3^n = \overset{\circ}{8} + 3 \Rightarrow 3^n - 1 = \overset{\circ}{8} + 2$

Luego para que $3^n - 1$ sea divisible entre 8, el exponente debe ser un número par.

$\therefore$ Los números que cumplen con esta condición son N_1; N_3 y N_5.

69. Si: $\overline{abcd} = \overset{\circ}{5} + 2$; $\overline{dabc} = \overset{\circ}{11} + 7$; $\overline{bcad} = \overset{\circ}{9} + 2$ y $\overline{dabc}$ mínimo, calcular $(a \times b) + (c \times d)$.

Resolución:

- $\overline{dabc}$ mínimo
- $\overline{abcd} = \overset{\circ}{5} + 2 \Rightarrow d = \overset{\circ}{5} + 2 \Rightarrow d = 2$
- $\overline{dabc} = \overset{\circ}{11} + 7$
- $\overline{bcad} = \overset{\circ}{9} + 2 \Rightarrow \overline{dabc} = \overset{\circ}{9} + 2$

  $\Rightarrow \overline{dabc} = \overset{\circ}{11} + 7 + 22 \vee \overset{\circ}{9} + 2 + 27$

  $\Rightarrow \overline{dabc} = \overset{\circ}{99} + 29$

Aplicando por divisibilidad por 99, entonces:

$\overline{da} + \overline{bc} = \overset{\circ}{99} + 29$; reemplazando: d = 2

$$\begin{array}{r} \overline{2a}\ + \\ \overline{bc} \\ \hline 128 \end{array}$$

$a + c = 18$; $a = 9 = c$; $b = 9$

$\therefore a \times b + c \times d = 9 \times 9 + 9 \times 2 = 99$

70. ¿Cuál es la suma de cifras que deben sustituir al 2 y 3 del número 52103 para que el número resultante sea divisible por 72?

Resolución:

Del número 52103, sustituimos 2 por "a" y 3 por "b", entonces resulta $\overline{5a10b}$.

Por condición del problema tenemos:

$\overline{5a10b} = \overset{\circ}{72} = \overset{\circ}{8} \vee \overset{\circ}{9}$

- Aplicando el criterio del 8:

  $\overline{5a10b} = \overset{\circ}{8} \Rightarrow \overline{10b} = \overset{\circ}{8}$

  $100 + b = \overset{\circ}{8} \Rightarrow (\overset{\circ}{8} + 4) + b = \overset{\circ}{8}$

  $\Rightarrow 4 + b = \overset{\circ}{8} \Rightarrow b = 4$

- Aplicando el criterio del 9: $\overline{5a104} = \overset{\circ}{9}$

  $\Rightarrow \overbrace{5 + a + 1 + 0 + 4}^{\text{suma de cifras}} = \overset{\circ}{9}$

  $a + 10 = \overset{\circ}{9}$

  $\underbrace{a + 1}_{\overset{\circ}{9}} + \underbrace{9}_{\overset{\circ}{9}} = \overset{\circ}{9} \Rightarrow a = 8$

$\therefore a + b = 12$

71. ¿Cuántos numerales de la forma $\overline{ababa}$ son divisibles entre 24?

Resolución:

Sabemos que decir divisible entre 24 es equivalente a decir múltiplo de 24.

Entonces: $\overline{ababa} = \overset{\circ}{24} = \overset{\circ}{3} \vee \overset{\circ}{8}$

- Aplicando el criterio del 3: $\overline{ababa} = \overset{\circ}{3}$

  $\Rightarrow \overbrace{a + b + a + b + a}^{\text{suma de cifras}} = \overset{\circ}{3}$

  $\Rightarrow \underbrace{3a}_{\overset{\circ}{3}} + 2b = \overset{\circ}{3} \Rightarrow 2b = \overset{\circ}{3}$

  $\Rightarrow b \in \{0; 3; 6; 9\}$

- Aplicando el criterio del 8 (Solo depende del bloque formado por sus tres últimas cifras).

  $\Rightarrow \overset{421}{\overline{aba}} = \overset{\circ}{8}$

  $\Rightarrow 5a + 2b = \overset{\circ}{8}$ ...(α)

  Como sabemos los posibles valores de b, reemplazaremos estos en (α) y obtendremos los valores de "a".

  En (α):

  Si $b = 0 \Rightarrow 5a = \overset{\circ}{8} \Rightarrow a = 8$

  Si $b = 3 \Rightarrow 5a + 6 = \overset{\circ}{8} \Rightarrow a = 2$

  Si $b = 6 \Rightarrow 5a + 12 = \overset{\circ}{8} \Rightarrow a = 4$

  Si $b = 9 \Rightarrow 5a + 18 = \overset{\circ}{8} \Rightarrow a = 6$

Como para cada valor de "b" existe un solo valor para "a", existen 4 numerales que cumplen la condición (80 808; 23 232; 46 464 y 69 696).

72. Programo ahorrar S/.80 diarios, pero cada día que me encuentro con Patricia gasto S/.47 adicionales, pero si no me encuentro con Patricia, salgo con Katia gastando con ella en forma adicional S/.38. Si ya tengo S/.774 ahorrados. ¿Cuántos días estu-

ve ahorrando, si todos los días salí con alguna de las dos personas mencionadas?

Resolución:

Se desea ahorrar: S/.80

Cuando el encuentro es con Patricia el ahorro es:

$$80 - 47 = S/.33$$

Cuando el encuentro es con Katia el ahorro es:

$$80 - 38 = S/.\ 42$$

Sea p el número de días de encuentros con Patricia.

Sea k el número de días de encuentros con Katia.

Como el ahorro total es de S/.774, se plantea la igualdad:

$$33p + 42k = 774 \Rightarrow 11p + 14k = 258$$

Como tenemos una ecuación con dos incógnitas enteras se puede trabajar en función del módulo 11:

$$\overset{\circ}{11} + 3k = \overset{\circ}{11} + 5.$$

Despejando el valor de k por el principio de Arquímedes para la divisibilidad:

$3k = \overset{\circ}{11} + 5;\ 3k = \overset{\circ}{11} - 6 \Rightarrow k = \overset{\circ}{11} - 2 = \overset{\circ}{11} + 9$

Para que cumpla en la igualdad: $k = 9$

Reemplazando:

$11p + 14(9) = 258 \Rightarrow 11p + 126 = 258$

$\Rightarrow 11p = 132 \Rightarrow p = 12$

El total de días que se lleva ahorrando es:

$\therefore\ k + p = 9 + 12 = 21$ días.

73. Si se convierte el número 747562^{5436} al sistema ternario. ¿Cuál es la suma de cifras de orden uno y orden dos?

Resolución:

Se quiere llevar el número al sistema ternario y dar como respuesta sus dos últimas cifras:

$747562^{5436} = \overline{...ab}_{(3)} \quad \vee \quad 747562^{5436} = \overset{\circ}{9} + \overline{ab}_{(3)}$

Debemos llevar el número a la forma de un múltiplo de nueve más un residuo:

$747562^{5436} = (\overset{\circ}{9} + 4)^{5436} \ \vee\ 747562^{5436} = \overset{\circ}{9} + 4^{5436}$

Debemos analizar el residuo que se obtiene de la potencia de 4 con respecto al módulo 9.

$4^0 = \overset{\circ}{9} + 1 \qquad 4^2 = \overset{\circ}{9} + 7 \qquad 4^4 = \overset{\circ}{9} + 4$

$4^1 = \overset{\circ}{9} + 4 \qquad 4^3 = \overset{\circ}{9} + 1 \qquad 4^5 = \overset{\circ}{9} + 7$

Como los residuos se repiten en forma periódica cada tres potencias (el gaussiano es 3), se observa que:

$4^{\overset{\circ}{3}} = \overset{\circ}{9} + 1;\ 4^{\overset{\circ}{3}+1} = \overset{\circ}{9} + 4;\ 4^{\overset{\circ}{3}+2} = \overset{\circ}{9} + 7$

Luego, como el exponente: $5436 = \overset{\circ}{3}$ se tiene que:

$4^{5436} = 4^{\overset{\circ}{3}} = \overset{\circ}{9} + 1$

Luego:

$747562^{5436} = \overset{\circ}{9} + 4^{5436} \Rightarrow 747562^{5436} = \overset{\circ}{9} + 1$

Como se observa se tendrá: $1 = \overline{ab}_{(3)}$

Donde $a = 0$ y $b = 1$.

$\therefore$ La suma: $a + b = 0 + 1 = 1$

74. Una compañía editora, mandó empacar un lote de libros. Si lo hacen de 4 en 4, de 6 en 6 de 8 en 8, siempre sobran 3, por lo que deciden empacarlo de 15 en 15, así no sobra ninguno. Si el número de libros pasa de 400 y no llega a 500, ¿cuántos libros se mandó empacar?

Resolución:

Sea el número de libros N:

$$\left.\begin{array}{l} N = \overset{\circ}{4} + 3 \\ N = \overset{\circ}{6} + 3 \\ N = \overset{\circ}{8} + 3 \end{array}\right\} N = \overset{\circ}{\overline{mcm(4;\ 6;\ 8)}} + 3 \Rightarrow N = \overset{\circ}{24} + 3$$

También $N = \overset{\circ}{15}$

Como $400 < N < 500$ y con las condiciones anteriores:

$\therefore\ N = 15(29) = 24(18) + 3 = 435$

75. Si $\overline{abc} = \overset{\circ}{9}$; $\overline{bac} = \overset{\circ}{5}$ y $\overline{ca} = \overset{\circ}{8}$, hallar $a + b + c$.

Resolución:

De los datos: $a;\ b;\ c \neq 0$

$\overline{bac} = \overset{\circ}{5} \Rightarrow c = 5$

$\overline{ca} = \overset{\circ}{8} \Rightarrow a = 6$

$\overline{abc} = \overset{\circ}{9} \Rightarrow a + b + c = \overset{\circ}{9}$

$\qquad 6 + b + 5 = \overset{\circ}{9} \Rightarrow b = 7$

$\therefore\ a + b + c = 18$

76. En un colegio trabajan 100 profesores siendo casadas la onceava parte de mujeres, y la quinta parte de los varones están solteros. ¿Cuántas mujeres solteras hay?

Resolución:

H: número de hombres; M: número de mujeres

$H + M = 100$

$H = \overset{\circ}{5}$ y $M = \overset{\circ}{11}$

$M \Rightarrow 11;\ 22;\ 33;\ 44;\ 55;\ 66;\ ...$

$H \Rightarrow 89;\ 98;\ 67;\ 56;\ 45;\ 34;\ ...$

Luego: $M = 55$; $H = 45$

Mujeres casadas: $55 \div 11 = 5$

$\therefore$ Mujeres solteras: 50

77. ¿Cuál es el menor número de tres cifras que es igual a 27 veces la suma de sus cifras? Dé como respuesta la cifra de las decenas.

Resolución:

Sea el número $\overline{abc}$, por dato:

$\overline{abc} = 27(a + b + c)$

Sabemos que: $\overline{abc} = \overset{\circ}{9} \Rightarrow a + b + c = \overset{\circ}{9}$

Como $\overline{abc}$ es el menor posible, consideramos $a + b + c = 9$.

Luego: $\overline{abc} = 27(9 \times \overline{abc}) = 243$

$\therefore$ La cifra de las decenas de 243 es 4.

78. ¿Cuál es la condición que deben satisfacer los números a y d para que el número $\overline{a23d}$ sea múltiplo de 17?

Resolución:

Por condición del problema: $\overline{a23d} = 17$

Descomponiendo polinómicamente:

$$1000a + 230 + d = \overset{\circ}{17}$$

Expresando los coeficientes en función del módulo 17.

$(\overset{\circ}{17} - 3)a + (\overset{\circ}{17} - 9) + d = \overset{\circ}{17}$

$-3a + 9 + d = \overset{\circ}{17}$

$d - 3a = \overset{\circ}{17} - 9 \;\wedge\; d - 3a = \overset{\circ}{17} + 8$

79. Hallar la cifra de las unidades del número:

$$N = 45\,072^{1998}$$

Resolución:

Acorde al texto: $N = 45\,072^{1998} = \overline{...a}$

Solo nos interesa en que cifra termina:

$N = (\overset{\circ}{10} + 2)^{1998} = \overset{\circ}{10} + 2^{1998} = \overset{\circ}{10} + (2^4)^{499} \times 2^2$

$N = (\overset{\circ}{10} + 2)^{1998} = \overset{\circ}{10} + 16^{499} \times 4$

$N = (\overset{\circ}{10} + 2)^{1998} = \overset{\circ}{10} + (...6) \times 4$

$N = \overset{\circ}{10} + (...4) = \overline{...a} \quad \therefore\; a = 4$

80. ¿Cuántos números de la forma $\overline{(a + b)cdb}$, son $\overset{\circ}{25}$ pero no $\overset{\circ}{250}$?

Resolución:

$N = \overline{(a + b)cdb} = \overset{\circ}{25}$

Vemos que:

$\overline{db} \in \{00; 25; 50; 75\}$: 4 valores

$c \in \{0; 1; 2; ...; 9\}$: 10 valores

$(a + b) \in \{1; 2; ...; 9\}$: 9 valores

$\Rightarrow$ N toma $4 \times 10 \times 9 = 360$ valores

Luego: $N = \overline{(a + b)cdb} = \overset{\circ}{250}$

$\Rightarrow$ N toma 36 valores: $36 = 9 \times 4 \times 1$

$\therefore$ Total de números $\overset{\circ}{25}$, pero no de $\overset{\circ}{250}$:

$$360 - 36 = 324$$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2003 - II)

Un número n es múltiplo de 3. Entonces podemos afirmar que el residuo de dividir: $2^{3n+5} + 2^{5n+4} + 2^5$ entre 7 es:

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

Resolución:

Como n es múltiplo de 3, hacemos: $n = 3k;\ k \in \mathbb{Z}$

Reemplazando en la expresión:

$2^{3(3k)+5} + 2^{5(3k)+4} + 2^5 = 7 + r$

$32(8)^{3k} + 16(8)^{5k} + 32 = 7 + r$

Llevando a módulo 7:

$(\overset{\circ}{7} + 4)(\overset{\circ}{7} + 1) + (\overset{\circ}{7} + 2)(\overset{\circ}{7} + 1) + \overset{\circ}{7} + 4 = \overset{\circ}{7} + r$

$\overset{\circ}{7} + 4 + \overset{\circ}{7} + 2 + \overset{\circ}{7} + 4 = \overset{\circ}{7} + r$

$\overset{\circ}{7} + 3 = \overset{\circ}{7} + r \quad \therefore\; r = 3$

Clave: D

PROBLEMA 2 (UNI 2004 - II)

Sea el número $R = \overline{n\underbrace{00...0}_{n\text{ veces}}} = \overset{\circ}{11} + 6$, halle la suma de las cifras del número (R − 4)

A) 40 B) 42 C) 44
D) 46 E) 47

Resolución:

Del problema: $n \times 10^n = \overset{\circ}{11} + 6 \Rightarrow n(\overset{\circ}{11} - 1)^n = \overset{\circ}{11} + 6$

Para n = par:

$n(\overset{\circ}{11} + 1) = \overset{\circ}{11} + 6 \Rightarrow \overset{\circ}{11} + n = \overset{\circ}{11} + 6 \Rightarrow n = 6$

Para n = impar: $n(\overset{\circ}{11} - 1) = \overset{\circ}{11} + 6$

$$\overset{\circ}{11} - n = \overset{\circ}{11} - 5 \Rightarrow n = 5$$

Luego: $R - 4 = 5\,999\,996 \vee 499\,996$

$\therefore$ Suma de cifras: $56 \vee 46$

Clave: D

PROBLEMA 3 (UNI 2005 - I)

Si el número $\overline{8abc}$ se divide entre 37, se obtiene 4 de residuo. Entonces el residuo que se obtiene al dividir $\overline{abc6}$ entre 37 es:

A) 0 B) 3 C) 13
D) 23 E) 33

Resolución:

Del enunciado, planteamos: $8000 + \overline{abc} = \overset{\circ}{37} + 4$

Pero: $8000 = \overset{\circ}{37} + 8$

Entonces: $\overline{abc} = \overset{\circ}{37} - 4 \quad ...(\alpha)$

Formaremos el numeral $\overline{abc0}$, multiplicando (α) por 10:

$\overline{abc0} = \overset{\circ}{37} - 40 = \overset{\circ}{37} - 3$

Ahora sumamos 6: $\overline{abc6} = \overset{\circ}{37} + 3$

$\therefore$ Residuo = 3

Clave: B

PROBLEMA 4 (UNI 2006 - I)

Un número N de la forma $N = \overline{abcdabc}$, $a \neq 0$, es siempre divisible por:

A) 3; 5 B) 7; 9; 11 C) 7; 11; 13
D) 7; 17; 19 E) 9; 11; 19

Resolución:

Analizando los datos del enunciado:

$N = \overline{abcabc}$, donde $a \neq 0$

Sabemos por propiedad: $N = \overline{abc} \times 1000 + \overline{abc}$
$= (\overline{abc})(1001)$ ...(α)

Trabajando con 1001, y descomponiendo en factores primos: $1001 = 7 \times 11 \times 13$

Reemplazando en (α), tenemos lo siguiente:

$N = (\overline{abc})(7 \times 11 \times 13) \Rightarrow N = \overset{o}{7}; \overset{o}{11}; \overset{o}{13}$

$\therefore$ Se determina que N es divisible por 7; 11 y 13.

Clave: C

PROBLEMA 5 (UNI 2008 - II)

Considerando la expresión:

$E(n) = n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + ... + (n+9)^2; n \in \mathbb{N}$.

Entonces podemos decir que $E(n) = \overset{o}{7}$, si:

A) no existen $n \in \mathbb{N} / E(n) = \overset{o}{7}$
B) $n \in \{7r - 5/r \in \mathbb{N}\} \cup \{7t - 4/t \in \mathbb{R}\}$
C) $n \in \{7t - 2/r \in \mathbb{N}\} \cup \{7s - 1/s \in \mathbb{N}\}$
D) $n \in \{7r - 3/r \in \mathbb{N}\} \cup \{7r - 4/r \in \mathbb{N}\}$
E) $n \in \{7t - 6/t \in \mathbb{N}\} \cup \{7r - 3/r \in \mathbb{N}\}$

Resolución:

$E(n) = n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + ... + (n+9)^2; n \in \mathbb{N}$

Desarrollando los cuadrados se obtiene:

$E(n) = 10n^2 + 90n + 285$ ...(I)

Como $E(n) = \overset{o}{7}$

De (I): $E(n) = (\overset{o}{7} + 3)n^2 + (\overset{o}{7} + 6)n + (\overset{o}{7} + 5)$

$\Rightarrow E(n) = 3n^2 + 6n + 5 = \overset{o}{7}$ ...(II)

Dando forma a (II), restamos 14 pues es $\overset{o}{7}$ a (II):

$3n^2 + 6n + 5 - 14 = \overset{o}{7} - 14 \Rightarrow 3n^2 + 6n - 9 = \overset{o}{7}$

$\Rightarrow 3(n^2 + 2n - 3) = \overset{o}{7} \Rightarrow n^2 + 2n - 3 = \overset{o}{7}$

$\Rightarrow (n+3)(n-1) = \overset{o}{7}$

Se cumple:

$n + 3 = \overset{o}{7} \quad \vee \quad n - 1 = \overset{o}{7}$

$n = \overset{o}{7} - 3 \qquad n = \overset{o}{7} + 1 = \overset{o}{7} - 6$ (por exceso)

$\Rightarrow n = 7r - 3 \qquad \Rightarrow n = 7t - 6$

$\therefore n \in \{(7t - 6) / t \in \mathbb{N}\} \cup \{7r - 3 / r \in \mathbb{N}\}$

Clave: E

PROBLEMA 6 (UNI 2009 - I)

Sea $N = \overline{abc}$ un número de tres cifras, tal que $\overline{abc} = \overset{o}{7}$, $\overline{cba} = \overset{o}{11}$ y $\overline{cab} = \overset{o}{9}$. Calcule la suma: $3c + 2a + b$

A) 24 B) 26 C) 28
D) 30 E) 32

Resolución:

Dato:

$\overline{abc} = \overset{o}{7}$

$\overline{cba} = \overset{o}{11} \Rightarrow \overline{abc} = \overset{o}{11}$

$\overline{cab} = \overset{o}{9} \Rightarrow \overline{abc} = \overset{o}{9}$

$\Rightarrow \overline{abc} = \overset{o}{693}$

Por propiedad:

Si: $\overline{abc}$ $\begin{cases} \overset{o}{7} \\ \overset{o}{11} \\ \overset{o}{9} \end{cases} \Rightarrow \overline{abc} = \overset{o}{693}$

$\therefore$ Piden: $3c + 2a + b = 9 + 12 + 9 = 30$

Clave: D

PROBLEMA 7 (UNI 2010 - II)

El número $\overline{5a10b}$ en base 10 es divisible por 72; entonces el valor de a/b es:

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

Resolución:

Del enunciado se tiene: $\overline{5a10b} = \overset{o}{72} = \overset{o}{8} \vee \overset{o}{9}$

Si $\overline{5a10b} = \overset{o}{8} \Rightarrow$ por el criterio de divisibilidad tenemos:

$\overline{10b} = \overset{o}{8} \Rightarrow 4(1) + 2(0) + 1(b) = \overset{o}{8} \Rightarrow b = 4$
421

Si $\overline{5a104} = \overset{o}{9}$; por el criterio de divisibilidad tenemos:

$5 + a + 1 + 0 + 4 = \overset{o}{9} \Rightarrow a = 8$

$\therefore$ Nos piden: $\frac{a}{b} = \frac{8}{4} = 2$

Clave: C

PROBLEMA 8 (UNI 2012 - II)

Determine la cantidad de números $\overline{abc} = \overset{o}{12}$, tal que: $a + b + c = 12$

A) 12 B) 13 C) 14
D) 16 E) 17

Resolución:

$a + b + c = \overset{o}{12} \wedge \overline{abc} = \overset{o}{12}$

$2b + c = \overset{o}{12}$ (criterio por 4)

Como c es par:

$c = 0 \Rightarrow b = 4; 6; 8 \Rightarrow 3$

$c = 2 \Rightarrow b = 1; 3; 5; 7; 9 \Rightarrow 5$

$c = 4 \Rightarrow b = 0; 2; 4; 6 \Rightarrow 4$

$c = 6 \Rightarrow b = 1; 3; 5 \Rightarrow 3$

$c = 8 \Rightarrow b = 0; 2 \Rightarrow 2$

$\therefore$ Cantidad de soluciones: $3 + 5 + 4 + 3 + 2 = 17$

Clave: E

PROBLEMA 9 (UNI 2014 - I)

Dados $\overline{abcd} = \overset{o}{5} + 2$, $\overline{dabc} = \overset{o}{9} + 2 = \overset{o}{11} + 7$, donde $\overline{dabc}$ es el menor número con las propiedades indicadas con $d \neq 0$ y $a \neq 0$. Determine el valor de:

$E = (a)(b) + (c)(d)$

A) 10 B) 12 C) 14
D) 16 E) 18

Resolución:

Del enunciado: $\overline{a1cd} = \overset{o}{5} + 2 \Rightarrow d = 2$ o 7

Luego: $\overline{dabc} = \overset{o}{9} + 2 + 27 \wedge \overline{dabc} = \overset{o}{11} + 7 + 22$

$\Rightarrow \overline{dabc} = \overset{o}{99} + 29 \Rightarrow \overline{da} + \overline{bc} = \overset{o}{99} + 29$

Como $\overline{abcd}$ es el menor posible, entonces: $d = 2$

Luego: $\overline{2a} + \overline{bc} = 29$

Concluimos: $b = 0$; $c = 8$; $a = 1$

$\therefore$ Piden: $(a)(b) + (c)(d) = 1 \times 0 + 8 \times 2 = 16$

Clave: D

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Podría ahorrar S/.200 diarios, pero cada mañana de sol gasto S/.90 en helados y cada mañana fría gasto S/.60 en café. Si ya tengo ahorrado S/.2580, ¿Cuántos días ahorré?

A) 19 B) 20 C) 21
D) 22 E) 23

2. ¿Cuántos números de tres cifras son múltiplos de 5 o de 6, pero no de 8?

A) 246 B) 247 C) 248
D) 249 E) N. A.

3. ¿Cuántos números de 4 cifras que terminan en 43 son múltiplo de 19?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

4. Sabiendo que el número $\overline{abcd}$ es divisible por 13 y se cumple que: $\overline{cd} = 3(\overline{ab} + 2)$. Calcular "a + d".

A) 16 B) 12 C) 8
D) 4 E) 15

5. Se dispone de S/.100 para comprar 40 sellos de S/.1; S/.4 y S/.12 la unidad. ¿Cuántos sellos de cada uno de estos precios deben comprarse?

A) 28; 9; 3 B) 20; 12; 8 C) 20; 11; 9
D) 28; 8; 4 E) 18; 16; 6

6. Encontrar el menor valor posible de "a + b", sabiendo que:

$$(8\times 1+3)+(8\times 2+3)+(8\times 3+3)+...+(8\times \overline{ab}+3)=\overset{\circ}{7}+2$$

A) 2 B) 1 C) 3 D) 4 E) 5

7. Calcular el resto que se obtiene al dividir la siguiente expresión por 11.

$M = 3^{2n+2} + 2^{3n+1}\times 4^{6n+3} + 2^{6n+1};\ n \in \mathbb{Z}^+$

A) 4 o 7 B) 4 o 3 C) 3 o 7
D) 2 o 4 E) 2 o 7

8. Si: $\overline{a53b72c4}$ es divisible por 8, y que al ser dividido por 11 el resto es máximo y al ser dividido por 9 el residuo es 2. Hallar a + b + c.

A) 10 B) 12 C) 14
D) 16 E) 17

9. Hallar el resto de dividir el número:

$N = \overline{321aaa321aaa}_4$ por 7

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 0

10. Calcular el mayor valor posible de "a + b", sabiendo que $289^{\overline{abba}} = \overset{\circ}{13}+9$.

A) 9 B) 12 C) 15
D) 16 E) 13

11. Si: $62^{a^a} = \overset{\circ}{5} + 3$, hallar el valor de "a".

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

12. Sabiendo que: $\overline{1a2b3c4d} = \overset{\circ}{7} + 5$, calcular el resto de dividir: $\overline{2a3b4c5d6}$ por 7.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

13. En un congreso participaron 600 personas. De los asistentes varones, se ha podido observar que los 3/7 eran abogados, los 4/9 eran médicos y los 2/5 eran economistas. ¿Cuántas damas asistieron al congreso?

A) 265 B) 275 C) 285
D) 295 E) 305

14. Al escribir 64^{300} en base 7, ¿cuáles son las 2 últimas cifras?

A) 2 y 1 B) 3 y 1 C) 4 y 1
D) 5 y 1 E) 6 y 1

15. Hallar el residuo de dividir "M" por 7, si:
$M = 1\times 16 + 2\times 16^2 + 3\times 16^3 + ... + 100\times 16^{100}$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6 y 1

16. Si a un numeral se le extrae su quinta parte se obtiene como resultado $\overline{5ab48}$, el cual es múltiplo de 504. Determinar la suma de cifras del numeral al cual se le ha extraído su quinta parte.

A) 27 B) 16 C) 18
D) 8 E) 24

17. Encontrar un número de 4 cifras diferentes de cero $\overline{mcdu}$, tal que se tenga: $\overline{mcdu} = \overset{\circ}{11}$; $\overline{md} = \overset{\circ}{7}$.
Además: $m + c + d + u = u^2$

A) 3454 B) 3544 C) 2344
D) 2454 E) 3334

18. Si: $\overline{abcd} = 99$ y $\overline{cd} - \overline{ab} = 43$, hallar:
a + b + c + d

A) 12 B) 16 C) 18
D) 20 E) 14

19. Hallar la suma de todos los valores que puede tomar $\overline{mnp}$, si: $\overline{2m34n5} = \overset{\circ}{7} \wedge \overline{mnp473} = \overset{\circ}{9}$

Además: $n > p > m > 0$

A) 724 B) 702 C) 741
D) 742 E) 728

20. Si $\overline{7a9bc} = \overset{\circ}{77} \wedge \overline{abc} = \overset{\circ}{25}$, determine el valor de "a".

A) 5 B) 4 C) 3
D) 8 E) 0

21. Si $\overline{abc} = \overset{\circ}{11}$ (menor posible) y $a + b + c = 17$; hallar: $a + 2b + 3c$

A) 27 B) 32 C) 36
D) 38 E) 41

22. Un alumno de la UNI perdió su carné y no se acordaba su código; pero recordó que era de 4 cifras divisibles por 5; 9 y 11, además la primera y la última cifras eran iguales. ¿Cuál era el código de dicho alumno? Dar como respuesta la suma de sus 2 últimas cifras.

A) 9 B) 8 C) 7 D) 5 E) 6

23. La expresión: $E = (n^3 - n)(9^{3n} - 8^{2n})$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$; es siempre divisible por:

A) 665 B) 3990 C) 60
D) 135 E) 5320

24. Una actriz clasifica sus 122 vestidos en A, B y C. Los vestidos de la clase A se pueden contar exactamente de 2 en 2; los de B de 5 en 5 y los de C de 7 en 7. Sabiendo que el triple de los vestidos de A, el doble de B y el quíntuple de C suman 400. Se pide el número de vestidos que tiene de clase B.

A) 30 B) 35 C) 40
D) 45 E) 50

25. Un libro tiene entre 510 y 700 páginas. Su última página es $\overset{\circ}{11}$ y en la numeración de sus páginas se emplean un número de tipos de imprenta que es 10. Determinar el número de páginas.

A) 616 B) 606 C) 594
D) 583 E) 572

26. Si: $3^n = \overset{\circ}{11} + 5$, entonces "n" puede ser:

A) $\overset{\circ}{4} + 1$ B) $\overset{\circ}{4} + 2$ C) $\overset{\circ}{4}$
D) $\overset{\circ}{5} + 3$ E) $\overset{\circ}{5} + 1$

27. Determinar el mayor numeral de la forma $\overline{ababab}$ que sea múltiplo de 35 e indicar el valor de "a × b".

A) 10 B) 35 C) 45
D) 40 E) 30

28. Una persona tiene 1200 soles y decide comprar sacos de arroz y azúcar a 40 y 50 soles cada saco respectivamente. De cuántas maneras puede efectuar la compra.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

29. En un aula de 45 estudiantes, después de rendir una prueba de matemática, se obtuvo las notas de 88; 128 y 154 puntos, siendo el puntaje total alcanzado 5422 puntos. ¿Cuántos estudiantes obtuvieron 88 puntos?

A) 20 B) 32 C) 10
D) 13 E) 32

30. ¿Cuál es la suma de las dos últimas cifras del numeral $68^{\overline{ab1}}$, expresado en el sistema undecimal?

A) 8 B) 1 C) 2 D) 7 E) 5

31. Si: $\underbrace{\overline{aabbaabb\ldots aabb13}}_{114\text{ cifras}}{}_{8} = \overline{pqrs\ldots xyz}_{63}$

encontrar el valor de z.

A) 11 B) 12 C) 13
D) 15 e) 17

32. ¿Cuál es el residuo que se obtiene al dividir 369^A por 13, si además: $A = \overline{aabbaabb\ldots ab3}_4{}^{\overline{UNI96}}$?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

33. Calcular el menor valor de $\overline{abc}$, si: $(\underbrace{656565\ldots65}_{20\text{ cifras}})^{\overline{abc}}$

deja como residuo 1 al ser dividido por 9.
Hallar (a + b + c).

A) 2 B) 3 C) 9
D) 10 E) 12

34. Determinar la suma de todos los números capicúas de cuatro cifras que sean múltiplos de 12.

A) 35 760 B) 35 772 C) 35 784
D) 35 796 E) 35 808

35. Si $\overline{13a2ba} = \overset{\circ}{63}$, ¿cuál es la suma de todos los posibles valores de a y b?

A) 14 B) 16 C) 18
D) 20 E) 22

36. Si: $\overline{abcba} = \overset{\circ}{495}$, ¿cuántos números cumplen dicha condición?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 10

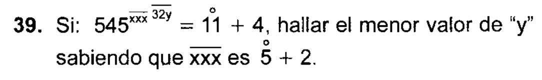
37. $17^{\overline{abba1}_5{}^{\overline{EXAMEN2003}}}$ al dividir por 7 deja como residuo:

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) N. A.

38. ¿Cuántos valores puede tomar "x", si:

$$32^{\overline{xx}} = \overset{\circ}{7} + 4\ ?$$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6



39. Si: $545^{\overline{xxx}\,\overline{32y}} = \overset{\circ}{11} + 4$, hallar el menor valor de "y" sabiendo que $\overline{xxx}$ es $\overset{\circ}{5} + 2$.

A) 0 B) 1 C) 3
D) 4 E) 7

40. Determinar la suma de todos los números de la forma $\overline{54a4b}$ de modo que sean divisibles por 36.

A) 163 332 B) 108 792 C) 108 684
D) 109 228 E) N. A.

41. Si: $\overline{aba2b} = \overset{\circ}{99}$, hallar: (a + b).

A) 5 B) 6 C) 17
D) 8 E) N. A.

42. Si: $\overline{4ab32} = \overset{\circ}{13} + 8$, hallar la suma de todos los valores de "b".

A) 27 B) 30 C) 33
D) 36 E) 42

43. Si: $\overline{xy6yz} = \overset{\circ}{1375}$, entonces $\overline{xyz}$ es divisible por:

A) 11 B) 13 C) 17
D) 19 E) 29

44. Al dividir: $\overline{11121314\ldots8889}$ por 11, ¿qué residuo se obtendrá?

A) 1 B) 2 C) 10
D) 9 E) 3

45. Sabiendo que:
$\overline{abc}^a = \overset{\circ}{9} + 7$; $\overline{abc}^b = \overset{\circ}{9} + 7$; $\overline{abc}^c = \overset{\circ}{9} + 4$
¿Cuál será el resto de dividir $abc^{\overline{abc}}$ por 9?

A) 1 B) 4 C) 7 D) 5 E) 6

46. La expresión $\left(\overline{ab}_7^2 - \overline{ba}_7^2\right)$ siempre es divisible por:

A) 9 y 10 B) 8 y 9 C) 8 y 15
D) 6 y 10 E) 3 y 16

47. Calcular el cuarto término múltiplo de 27 en la serie: 21; 42; 63; 84; ...

A) 657 B) 576 C) 756
D) 765 E) 675

48. Un comerciante puede comprar con S/.98 010 una cantidad de camisas a S/.50 cada una y pantalones a S/. 70 cada uno. Si el número de pantalones es el máximo posible, ¿cuántos de ellos se compraron, si se gastó todo el dinero?

A) 1389 B) 1388 C) 1393
D) 1398 E) 1397

49. Sabiendo que al dividir el numeral $\overline{a72b568}$ por 11 deja residuo 9, y al dividirlo por 3 deja residuo 2. Hallar $\overline{ab}$; si $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

A) 37 B) 70 C) 42
D) 53 E) 91

50. Hallar el menor número de 3 cifras que dividido por once da residuo 8 y dividido por 7 da residuo 3. Dar como respuesta el producto de sus cifras.

A) 72 B) 54 C) 36
D) 18 E) 90

51. Hallar el residuo que se obtiene al dividir:

$$\overline{ab1ab4}^{\,\overline{ab14}} \text{ por } 11$$

A) 1 B) 3 C) 9
D) 8 E) 4

52. Sea: $\overline{ab}$ múltiplo de 4, calcular la suma de los valores de $\overline{ab}$, si: $\overline{a5}^{\overline{ab}} + \overline{b6}^{\overline{ba}} = \overset{\circ}{10} + (b - a)$

A) 68 B) 84 C) 67
D) 93 E) 82

53. Dada la expresión: $5 \times 7^{\overline{ab}} + 6^{\overline{ba}} = \overset{\circ}{30} + a + b$, ¿cuántos valores puede tomar $\overline{ab}$, si $(a > b)$?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) Más de 4

54. Si: $N = 3(15)^4 + 4(15)^6 + 2(15)^3 + 23$, ¿cuál es la cifra de las unidades al escribir el número en base 13?

A) 8 B) 5 C) 6
D) 2 E) 1

55. Si "n" no es divisible por 3, entonces: "n^2" será:

A) $\overset{\circ}{3}$ B) $\overset{\circ}{3} - 1$ C) $\overset{\circ}{3} - 2$
D) $\overset{\circ}{9}$ E) N. A.

56. Si se tiene que $\overline{abcd} = \overset{\circ}{11}$, además: $\overline{ab} = 3(\overline{cd} - 2)$ ¿cuántos valores puede tomar: $(\overline{ab} + \overline{cd})$?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

57. Siendo "p" un número no múltiplo de 5, determine la expresión: $E = 32p^{32} + 36p^{36} + \ldots + 120p^{120}$

A) $\overset{\circ}{5} + 1$ B) $\overset{\circ}{5} - 1$ C) $\overset{\circ}{5} + 2$
D) $\overset{\circ}{5} - 2$ E) $\overset{\circ}{5}$

58. De los 400 alumnos de una escuela se supo que al finalizar el año los 2/5 de las mujeres aprobaron todos los cursos, los 3/7 de ellas desaprobaron al menos un curso y los 5/8 de las mismas seguirán estudiando en la escuela. ¿Cuántas mujeres ya no seguirán estudiando en la escuela?

A) 120 B) 175 C) 112
D) 102 E) 105

59. ¿Cuántos números de la forma $\overline{1abab}$ son divisibles por 56?

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) Más de 3

60. Calcular (a)(b), si: $\overline{30ab60} = \overset{\circ}{99}$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 9 E) 5

61. Si n es un entero positivo cualquiera, entonces $A = 2^{2n} + 15n - 1$ es siempre divisible por:

A) 7 B) 9 C) 11
D) 13 E) 15

62. ¿Cuál es el residuo que se obtiene al dividir:

$A = \overline{171717\ ...\ 17171}$ de 37 cifras por 13?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

63. ¿Cuántos valores puede tomar $\overline{ab}$, sabiendo que:

$150^{53^{\overline{aba}}} = \overset{\circ}{11} + 6$?

A) 8 B) 16 C) 22
D) 25 E) N. A.

64. Sabiendo que: $\overline{ab}^{\overline{ab}} = \overset{\circ}{4} + 3$, ¿cuántos valores puede tomar $\overline{ab}$?

A) 23 B) 22 C) 21
D) 11 E) 12

65. Determinar un numeral de 4 cifras que representado en base 5 termina en 21, en base 4 termina en 2, en base 11 termina en 5 y en base 9 termina en 7. Dar la suma de cifras de dicho numeral.

A) 16 B) 34 C) 43
D) 25 E) 7

66. ¿En qué cifra termina el numeral $\overline{a(a+2)(a+4)}_{13}$ expresado en base 61?

A) 10 B) 19 C) 20
D) 18 E) 30

67. Al escribir $N = 587^{694}$ en el sistema ternario, ¿cuáles serán sus dos cifras de menor orden?

A) 21 B) 12 C) 10
D) 11 E) 22

68. ¿Qué valor debe tomar "n" para que $\overline{n2(n+1)4n3}_{11}$ sea $\overset{\circ}{10} + 3$?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

69. Hallar: "m", para que $A = \overline{4n5mn32m}_6$ sea $\overset{\circ}{7} + 3$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

70. Sea el número: $\underbrace{\overline{abab...ab}}_{18\text{ cifras}}{}_6 = \overset{\circ}{5}$; donde: $a \neq b$.

Además: $\underbrace{\overline{aa...aa}_n}_{k\text{ cifras}} + \underbrace{\overline{bb...bb}_n}_{k\text{ cifras}} = 780$

Hallar: n + k

A) 6 B) 7 C) 9
D) 10 E) 12

71. Sabiendo que $\overline{abc} = \overset{\circ}{11}$; $\overline{cba} = \overset{\circ}{8}$ y $\overline{acb} = \overset{\circ}{9}$, encontrar el valor de: $a \times b \times c$.

A) 126 B) 180 C) 162
D) 72 E) 225

72. Siendo: $n \in \mathbb{Z}^+$ y $p \neq \overset{\circ}{3}$, calcular el residuo de dividir R por 3. $R = 17p^{2n} + 20p^{4n} + 23p^{6n} + ... + 140p^{84n}$

A) 0 B) 2 soluciones C) 1
D) 2 E) N. A.

73. ¿Qué residuo se obtiene al dividir "E" por 9?
$E = 5^n + 6^n + 7^n + 8^n + 9^n + 10^n + 11^n + 12^n + 13^n$

A) 4 B) 3 C) 5
D) 2 E) 7

74. Si se suma: $4^1 + 6^2 + 14^3 + 16^4 + 24^5 + ... + n^{112}$ ¿cuál es la cifra de las unidades al escribir el total en base 5?

A) 0 B) 1 C) 2
D) 4 E) 3

75. Un número N formado por 55 cifras 4; seguido de 46 cifras 6 y seguido de 50 cifras 8, es tal que en el sistema en base 7 termina en la cifra x. Hallar x.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

76. ¿Cuántos valores puede tomar "a", si el número $\overline{aaaa...aa}_9$ de 16 cifras es divisible por 8?

A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 7

77. Hallar la suma de las 2 últimas cifras de 3^{44} escrito en base 8.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 9 E) 4

78. Si: $82^{\overline{aba}} = \overset{\circ}{13} + 9$, ¿cuántos valores puede tomar $\overline{aba}$?

A) 9 B) 7 C) 12
D) 14 E) 11

79. Si al dividir el número: $A = 4^n + 44^n + 444^n$ por 7, el residuo es 1 y, si: $n \in \{1; 2; 3; ...; 90\}$. ¿Cuántos valores toma n?

A) 12　B) 15　C) 18
D) 21　E) 20

80. Hallar el valor de "a", sabiendo que el numeral $\overline{a5aa5aaa5...}$ (310 cifras) es múltiplo de 9.

A) 7　B) 4　C) 5
D) 8　E) 3

CLAVES

1. C	11. C	21. D	31. A	41. D	51. E	61. B	71. A
2. C	12. B	22. A	32. A	42. D	52. C	62. A	72. A
3. E	13. C	23. B	33. B	43. C	53. D	63. D	73. B
4. D	14. D	24. E	34. B	44. C	54. B	64. A	74. A
5. A	15. A	25. A	35. D	45. C	55. C	65. D	75. E
6. C	16. C	26. D	36. A	46. E	56. C	66. E	76. D
7. A	17. A	27. C	37. C	47. C	57. D	67. A	77. C
8. E	18. C	28. E	38. B	48. D	58. E	68. A	78. D
9. B	19. D	29. D	39. E	49. B	59. C	69. E	79. B
10. D	20. D	30. A	40. A	50. D	60. A	70. C	80. A

Números primos

06 capítulo

Eratóstenes nació en Cirene (276 a. C.) y murió en Alejandría (194 a. C.). Fue un matemático, astrónomo y geógrafo griego. Era hijo de Aglaos y fue discípulo de Aristón de Quíos, de Lisanias de Cirene y del poeta Calímaco, y también gran amigo de Arquímedes. Estudió en Alejandría y durante algún tiempo en Atenas. En el año 236 a. C., Ptolomeo III le llamó para que se hiciera cargo de la Biblioteca de Alejandría, puesto que ocupó hasta el fin de sus días. La Suda (enciclopedia bizantina) afirma que, tras perder la vista, se dejó morir de hambre a la edad de 80 años; sin embargo, Luciano dice que llegó a la edad de 82 años; también Censorino sostiene que falleció cuando tenía 82 años.

Se le debe un procedimiento, conocido como la Criba de Eratóstenes, para obtener de un modo rápido todos los números primos menores que un número dado. La versión informática de este procedimiento (algoritmo) se ha convertido con los años en un método estándar para caracterizar o comparar la eficacia de diferentes lenguajes de programación. Eratóstenes también midió la oblicuidad de la eclíptica (la inclinación del eje terrestre) con un error de solo 7' de arco y creó un catálogo (actualmente perdido) de 675 estrellas fijas. Su obra más importante fue un tratado de geografía general. Tras quedarse ciego, murió en Alejandría por inanición voluntaria.

Fuente: Wikipedia

CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS ENTEROS POR LA CANTIDAD DE SUS DIVISORES

La unidad

Es el único número entero positivo que tiene un solo divisor.

Número primo o primo absoluto

Es aquel número que admite únicamente dos divisores: el mismo y la unidad.

La serie de los números primos es: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; ...; y es ilimitada.

Hasta el momento no se ha descubierto una fórmula que permita calcular a todos los números primos. Sin embargo, matemáticos famosos como Pierre Fermat, Euler, entre otros propusieron expresiones que permiten encontrar algunos números primos:

Fórmula de Fermat: $\boxed{2^{2^n} + 1}$

Nos permite encontrar algunos números primos, siendo los valores de "n" = {0; 1; 2; ...}

Fórmulas de Euler:

I. $n^2 + n + 17$
Nos proporciona 16 números primos, siendo los valores de "n" = {0; 1; 2; 3; ....; 15}

II. $n^2 + n + 41$
Nos proporciona 40 números primos, siendo los valores de "n" = {0; 1; 2; ....; 39}

Asimismo, se descubrieron algunos números primos como los que a continuación se citan:

En 1877, Lucas publicó el número primo: $\boxed{2^{127} - 1}$, el cual consta de 39 cifras.

En 1958, Robinson publicó los números primos:

$81 \times 2^{324} + 1$; $63 \times 2^{326} + 1$; $35 \times 2^{327} + 1$, de 100 cifras cada uno.

En 1961, Hurwitz y Selfridge, publicaron el número primo: $2^{4423} - 1$ que tiene 1332 cifras.

Todo número primo mayor que 3 siempre es de la forma $(\overset{\circ}{6} + 1)$ o $(\overset{\circ}{6} - 1)$, lo contrario no siempre es cierto.

Número compuesto

Es aquel número que admite más de dos divisores.

Ejemplo:

Los siguientes números tienen más de dos divisores: 4; 6; 8; 9; 10; 12; ..., por eso son considerados "números compuestos".

Si analizamos los divisores de 12 tenemos:

$$\underbrace{1}_{\text{Divisor de todo número entero}} \quad \underbrace{2;\ 3}_{\text{Divisores primos}} \quad \underbrace{4;\ 6;\ 12}_{\text{Divisores compuestos}}$$

En general, los divisores de todo número compuesto N, cumplen:

$$\boxed{D_N = D_{primos} + D_{compuestos} + 1}$$

NÚMEROS PRIMOS RELATIVOS O PRIMOS ENTRE SÍ (PESÍ)

Se dice que dos o más números son primos entre sí o primos relativos cuando tienen como único divisor común a la unidad. Para que dos o más números sean PESÍ, no necesariamente estos tienen que ser números primos.

Ejemplos:

1. ¿Los números 14 y 15 son primos entre sí?

Resolución:

Analizando los divisores de cada número:

Divisores de 14: ①; 2; 7; 14
Divisores de 15: ①; 3; 5; 15
↓
Divisor común

Como el único divisor común es la unidad, estos números son PESÍ.

2. ¿Los números 15; 20 y 26, son primos entre sí?

Resolución:

Analizando los divisores de cada número:

Divisores de 15: ①; 3; 5; 15
Divisores de 20: ①; 2; 4; 5; 10; 20
Divisores de 26: ①; 2; 13; 26
↓
Divisor común

∴ Los números son PESÍ.

Observaciones

- La unidad es primo entre sí con cualquier otro número natural.
- Dos números que son primos entre sí nunca tienen en común los mismos factores primos.
- Dos o más números son primos entre sí, dos a dos, cuando al agruparlos de dos en dos resultan ser PESÍ respectivamente.
- Si un número es primo entre sí con un producto, será primo entre sí con cada uno de sus factores.
- Dos números enteros y consecutivos, siempre son primos entre sí.

REGLA PARA RECONOCER A UN NÚMERO PRIMO

Si queremos saber que el número entero N es un número primo, este se deberá dividir por todos los números primos menores que N y que el cuadrado de dichos números primos sean menores que N. Si en todos los casos la división es inexacta, entonces N será

número primo, de lo contrario se trata de un número compuesto.

Ejemplo:

1. Averiguar si el número 151 es número primo.

   Resolución:

   Los números primos que elevados al cuadrado son menores que 151, son: 2; 3; 5; 7 y 11. A continuación, dividimos 151 entre dichos números primos.

   $151 = \overset{\circ}{2} + 1 \qquad 151 = \overset{\circ}{3} + 1 \qquad 151 = \overset{\circ}{5} + 1$

   $151 = \overset{\circ}{7} + 4 \qquad 151 = \overset{\circ}{11} + 8$

   Como en todos los casos la división ha sido inexacta, concluimos que 151 es un número primo.

2. Averiguar si el número 1927 es un número primo o compuesto.

   Resolución:

   Los números primos que elevados al cuadrado son menores que 1927 son: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41 y 43.

   Ahora, si dividimos 1927 por todos estos números primos resulta inexacto, a excepción de dividirlo por 41, porque: 1927/41 = 47

   Luego, 1927 no será número primo, pero sí un número compuesto.

CRIBA DE ERATÓSTENES

La "Tabla de los números primos" es un valioso aporte del astrónomo, filósofo y matemático griego Eratóstenes, la cual contiene a todos los números primos menores que N.

Para poder encontrar a todos los números primos menores que N, se siguen los siguientes pasos:

1.°: Se enumeran todos los números enteros positivos hasta N.

2.°: Se elimina la unidad.

3.°: Se eliminan los múltiplos de 2 a partir de 2^2.

4.°: Se eliminan los múltiplos de 3 a partir de 3^2.

5.°: Se eliminan los múltiplos de 5 a partir de 5^2.

6.°: Se eliminan los múltiplos de 7 a partir de 7^2.

⋮

n:° Se eliminan los múltiplos de "p" a partir de p^2 (p: número primo).

Finalmente, todos aquellos números que no fueron eliminados son primos absolutos.

Ejemplo:

Hallar todos los números primos menores que 100.

Resolución:

Como se trata de hallar todos los números primos menores que 100, debemos hallar los 100 primeros naturales y a continuación eliminamos la unidad, todos los múltiplos de 2; 3; 5 y 7, pero a partir de 4; 9; 25 y 49, respectivamente.

~~1~~	(2)	(3)	~~4~~	(5)	~~6~~	(7)	~~8~~	~~9~~	~~10~~
(11)	~~12~~	(13)	~~14~~	~~15~~	~~16~~	(17)	~~18~~	(19)	~~20~~
~~21~~	~~22~~	(23)	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	(29)	~~30~~
(31)	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	(37)	~~38~~	~~39~~	~~40~~
(41)	~~42~~	(43)	~~44~~	~~45~~	~~46~~	(47)	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	(53)	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	(59)	~~60~~
(61)	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	(67)	~~68~~	~~69~~	~~70~~
(71)	~~72~~	(73)	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	(79)	~~80~~
~~81~~	~~82~~	(83)	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	(69)	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	(97)	~~98~~	~~99~~	~~100~~

∴ Los números que no se eliminan son primos absolutos menores que 100.

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA

Todo número entero positivo mayor que la unidad, se puede expresar como un único sistema del producto de sus factores primos elevados a ciertos exponentes. A esta descomposición se le denomina "descomposición canónica".

Sea el número compuesto N, tal que: $\boxed{N = a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma}$

Donde: a; b; c: divisores primos.

α; β; γ: exponentes enteros y positivos.

Ejemplo:

Descomponer canónicamente los siguientes números:

- $$\begin{array}{r|l} 240 & 2 \\ 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

  $\Rightarrow 240 \doteq 2^4 \times 3 \times 5$

  Divisores primos de 240: 2; 3 y 5.

- $N = 48^n \times 45$

  Descomponiendo en factores primos cada factor:

  $N = (2^4 \times 3)^n \times 3^2 \times 5 = 2^{4n} \times 3^{n+2} \times 5$

  Divisores primos de N: 2; 3 y 5.

- $M = 13^{k+2} - 13^k$

  Descomponiendo adecuadamente:

  $M = 13^k \times 13^2 - 13^k$

  Factorizando: $M = 13^k\underbrace{(13^2 - 1)}_{168} = 13^k \times 2^3 \times 3 \times 7$

  Divisores primos de M: 2; 3; 7 y 13.

Caso particular: Descomposición canónica del factorial de un número entero y positivo.

Ejemplo:

Descomponer canónicamente el factorial de 36.

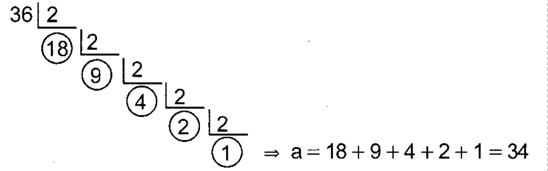
Resolución:

Por definición: $36! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times ... \times 36$

Los factores primos elevados a ciertos exponentes:
$36! = 2^a \times 3^b \times 5^c \times .... \times 31^d$

Cálculo de los exponentes: "Se divide sucesivamente, el número del factorial por el factor primo que se desee hallar su exponente y enseguida se suman los cocientes".

Hallamos el exponente de 2: dividimos sucesivamente por 2:



Hallamos el exponente de 3: dividimos sucesivamente por 3

36 | 3
(12) | 3
(4) | 3
(1)

$\Rightarrow b = 12 + 4 + 1 = 17$

Y así sucesivamente con cada factor primo, se obtiene:
$36! = 2^{34} \times 3^{17} \times 5^8 \times 7^5 \times 11^3 \times 13^2 \times 17^2 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31$

TABLA DE LOS DIVISORES DE UN NÚMERO

Para construir la tabla de los divisores de un número entero positivo, se siguen los siguientes pasos:

1.° Se descompone el número como el producto de sus factores primos.

2.° Los divisores que contienen al menor número primo se ubican en la fila principal y los demás divisores (de menor a mayor) en la columna principal.

3.° Se van multiplicando los de la columna principal con todos los divisores de la fila principal.

Ejemplos:

1. Construir la tabla de los divisores de 432.

Resolución:

Descomponiendo 432 en factores primos:

$432 = 2^4 \times 3^3$

2^4	3^3
↓	↓
2^4	
2^3	3^3
2^2	3^2
2^1	3^1
2^0	3^0

Combinando los divisores adecuadamente:

x	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4
3^0	1	2	4	8	16
3^1	3	6	12	24	48
3^2	9	18	36	72	144
3^3	27	54	108	216	432

→ Fila principal

Columna principal

En la tabla de los divisores de un número N, se cumple: "El producto de los divisores equidistantes es igual al número N".

2. Construir la tabla de los divisores de 360.

Resolución:

Descomposición canónica de 360

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

2^3	3^2	5
↓	↓	↓
2^3	3^2	5^1
2^2	3^1	5^0
2^1	3^0	
2^0		

Combinando los divisores adecuadamente:

x	2^0	2^1	2^2	2^3
3^0	1	2	4	8
3^1	3	6	12	24
3^2	9	18	36	72
5^1	5	10	20	40
	15	30	60	120
	45	90	180	360

Se han combinado todos los divisores de 3^2 con todos los divisores de 2^3; enseguida se combinaron todos los divisores obtenidos con los divisores de 5^1.

3. Construir la tabla de los divisores de 600.

Resolución:

Descomposición canónica de 600:

$600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$

2^3	3	5^2
↓	↓	↓
2^3	3^1	5^2
2^2	3^0	5^1
2^1		5^0
2^0		

Combinando los divisores adecuadamente:

x	2^0	2^1	2^2	2^3
3^0	1	2	4	8
3^1	3	6	12	24
5^1	5	10	20	40
5^2	15	30	60	120
	25	50	100	200
	75	150	300	600

De la tabla de los divisores de N, se puede calcular:

I. Cantidad de divisores.
II. Suma de divisores.
III. Producto de divisores.
IV. Suma de las inversas de los divisores.

4. De los divisores de 600, determinar:
   I. Cantidad de divisores.
   II. Suma de divisores.
   III. Producto de divisores.

Resolución:

Descomposición canónica de 600.

$$600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$$

↓	↓	↓
$2^3 \times$	$3^1 \times$	5^2
$2^2 \times$	$3^0 \times$	5^1
2^1		5^0
2^0		

I. Cantidad de divisores: (combinándolos)

$D_{600} = 4 \times 2 \times 3 = 24$ divisores

↓	↓	↓
(3 + 1)	(1 + 1)	(2 + 1)
↓	↓	↓
Exp. de 2	Exp. de 3	Exp. de 5

II. Suma de divisores: (sumando todos los divisores de cada factor primo y luego multiplicamos los resultados).

$S_{600} = (2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0)(3^1 + 3^0)(5^2 + 5^1 + 5^0)$

$S_{600} = 1860$

También:

$$S_{600} = \left(\frac{2^4-1}{2-1}\right)\left(\frac{3^2-1}{3-1}\right)\left(\frac{5^3-1}{5-1}\right) = 1860$$

III. Producto de los divisores:

El producto de los divisores equidistantes (de 2 en 2) es 600.

Total de parejas: $\frac{24}{2} = 12$

Luego, el producto de los divisores es 600^{12}.

También: $P_{600} = (600)^{\frac{24}{2} = D_{600}} = 600^{12}$

ESTUDIO DE LOS DIVISORES DE UN NÚMERO ENTERO

Sea N un número compuesto, tal que expresado como el producto de sus factores primos: $N = a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma$

Cantidad de divisores de N (D_N)

Para hallar la cantidad de divisores de N, se le suma la unidad a cada exponente de sus factores primos y luego los resultados obtenidos se multiplican entre sí.

$$D_N = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$$

Ejemplo:

Hallar la cantidad de divisores de 360.

Resolución:

Descomposición canónica de 360: $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

$$D_{360} = (3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24 \text{ divisores.}$$

Todo número cuadrado perfecto tiene una cantidad impar de divisores.

Suma de divisores de N (S_N)

La suma de los divisores de N, se obtiene desarrollando los cocientes notables de cada factor primo.

$$S_N = \left(\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\right)\left(\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}\right)\left(\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}\right)$$

Ejemplo:

Hallar la suma de los divisores de 360.

Resolución:

Descomposición canónica de 360: $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

$$S_{360} = \left(\frac{2^{3+1}-1}{2-1}\right)\left(\frac{3^{2+1}-1}{3-1}\right)\left(\frac{5^{1+1}-1}{5-1}\right)$$

$\Rightarrow S_{360} = 15 \times 13 \times 6 = 1170$

Producto de los divisores de N (P_N)

El producto de los divisores de N, es igual a N elevado a la mitad de la cantidad de sus divisores.

$$P_N = (N)^{\frac{D_N}{2}}$$

Ejemplo:

Hallar el producto de los divisores de 360.

Resolución:

Cantidad de divisores de 360: 24

Luego: $P_{360} = (360)^{\frac{24}{2}} \Rightarrow P_{360} = 360^{12}$

Suma de las inversas de los divisores de N (I_N)

La suma de las inversas de los divisores de N, se obtiene dividiendo la suma de los divisores de N (S_N) entre el número N.

$$I_N = \frac{S_N}{N}$$

Ejemplo:

Hallar la suma de las inversas de los divisores de 360.

Resolución:

Suma de los divisores de 360: 1170

Luego, la suma de las inversas de los divisores de 360:

$$I_{360} = \frac{1170}{360} = 3{,}25$$

Aplicación 1: Para el número: N = 12 600.

Determinar la cantidad de divisores de N que sean:

I. Primos absolutos.
II. Compuestos.
III. Pares.
IV. Impares.
V. Múltiplos de 20.
VI. Terminan en dos cifras cero.
VII. La suma de sus cifras sea $\overset{\circ}{9}$
VIII. La última cifra sea 5.
IX. Divisibles por 18, pero no por 7.
X. Cuadrados perfectos.

Resolución:

Descomposición canónica de 12 600:

$$12\,600 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$$

I. Divisores primos: {2; 3; 5; 7}
$\therefore$ Son 4 divisores primos.

II. Divisores compuestos:
Total de divisores: $D_{(12\,600)} = 4 \times 3 \times 3 \times 2 = 72$
Sabemos que: $D_N = D_{primos} + D_{compuestos} + 1$
Reemplazando: $72 = 4 + D_{comp.} + 1$
$\therefore$ $D_{compuestos} = 67$

III. Divisores pares $\overset{\circ}{2}$:
Factorizamos un 2: $D_{\overset{\circ}{2}} = 2(\underbrace{2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7}_{N_1})$

Total de divisores de N_1: $D_{N_1} = 3 \times 3 \times 3 \times 2 = 54$
Observe que todos los divisores de N_1 son multiplicados por 2.
$\therefore$ Total de divisores pares: 54.

IV. Divisores impares:
1.ª forma: Sabemos que: $D_N = D_{pares} + D_{impares}$
Reemplazando: $72 = 54 + D_{impares} \Rightarrow D_{impares} = 18$
2.ª forma: Eliminando a los divisores pares nos quedamos con los divisores impares.
$N = 2^3 \times \underbrace{3^2 \times 5^2 \times 7}_{N_1}$

Total de divisores de N_1: $D_N = 3 \times 3 \times 2 = 18$
$\therefore$ N tiene 18 divisores impares.

V. Divisores múltiplos de 20:
Factorizamos 20 y hallamos los divisores de N_1.
$D_{\overset{\circ}{20}} = (2^2 \times 5)(\underbrace{2 \times 3^2 \times 5 \times 7}_{N_1})$

Total de divisores de N_1: $D_{N_1} = 2 \times 3 \times 2 \times 2 = 24$
Observa que todos los divisores de N_1 son multiplicados por 20.
$\therefore$ Son 24 divisores de N, múltiplos de 20.

VI. Si los divisores terminan en dos cifras cero, entonces serán múltiplos de 100:
Factorizando: $D_{\overset{\circ}{100}} = (2^2 \times 5^2)(\underbrace{2 \times 3^2 \times 7}_{N_1})$

Total de divisores de N_1: $D_{N_1} = 2 \times 3 \times 2 = 12$
Observa que todos los divisores de N_1 son multiplicados por 100.
$\therefore$ N tiene 12 divisores que terminan en 2 cifras cero.

VII. La suma de las cifras sea $\overset{\circ}{9}$:
Serán divisores de N múltiplos de 9.
$N = (3^2)(\underbrace{2^3 \times 5^2 \times 7}_{N_1})$

Total de divisores de N_1: $D_{N_1} = 4 \times 3 \times 2 = 24$
$\therefore$ N tiene 24 divisores cuya suma de sus cifras sea $\overset{\circ}{9}$

VIII. Para que la última cifra sea 5, se trata de los divisores impares múltiplos de 5:
Factorizamos 5: $N = (5)(2^3 \times \underbrace{3^2 \times 5 \times 7}_{N_1})$
Total de divisores de N_1: $D_{N_1} = 3 \times 2 \times 2 = 12$
$\therefore$ Son 12 divisores de N que terminan en cifra 5.

IX. Para hallar los divisores que son $\overset{\circ}{18}$ pero no $\overset{\circ}{7}$, elegimos los divisores 18 $(\overset{\circ}{2} \times \overset{\circ}{3^2})$ y eliminamos los $\overset{\circ}{7}$:

$$\begin{array}{lcccc} N = & 2^3 \times & 3^2 \times & 5^2 \times & 7 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{Divisores} & \boxed{2^3} & 3^2 & 5^2 & \boxed{7^1} \rightarrow \text{Divis. 7} \\ & \boxed{2^2} & 3^1 & 5^1 & 7^0 \\ & \boxed{2^1} & 3^0 & 5^0 & \\ & 2^0 & & & \\ \hline \text{Total de divis.:} & 3 \times & 3 \times & 3 \times & 1 = 27 \end{array}$$

$\therefore$ Son 27 divisores de N, $\overset{\circ}{18}$ pero no $\overset{\circ}{7}$.

X. Divisores cuadrados perfectos:
Elegimos a todos los divisores cuadrados perfectos (tienen raíz cuadrada exacta).

$$\begin{array}{lcccc} N = & 2^3 \times & 3^2 \times & 5^2 \times & 7 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & \not 2^3 & \bigcirc 3^2 & \bigcirc 5^2 & \not 7^1 \\ & \bigcirc 2^2 & \not 3^1 & \not 5^1 & \bigcirc 7^0 \\ & \not 2^1 & \bigcirc 3^0 & \bigcirc 5^0 & \\ & \bigcirc 2^0 & & & \\ \hline \text{Total de divisores:} & 2 \times & 2 \times & 2 \times & 1 = 8 \end{array}$$

$\therefore$ Son 8 divisores de N, cuadrados perfectos.

Aplicación 2: De los divisores de M = 7920
Determinar:
I. La suma de los divisores.
II. La suma de los divisores primos.
III. La suma de los divisores compuestos.
IV. La suma de los divisores $\overset{\circ}{6}$.
V. La suma de los divisores no $\overset{\circ}{15}$.
VI. El producto de los divisores $\overset{\circ}{30}$.

Resolución:
Descomposición canónica de 7920.
$M = 7920 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 11$

I. Suma de los divisores de M:
$$S_M = \left(\frac{2^{4+1} - 1}{2 - 1}\right)\left(\frac{3^{2+1} - 1}{3 - 1}\right)\left(\frac{5^{1+1} - 1}{5 - 1}\right)\left(\frac{11^{1+1} - 1}{11 - 1}\right)$$
$S_M = 31 \times 13 \times 6 \times 12 = 29\,016$
$\therefore$ Suma de los divisores de M = 29 016.

II. Suma de los divisores primos:
De: $M = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 11$
$S_{primos} = 2 + 3 + 5 + 11 = 21$
$\therefore$ La suma de divisores primos es 21.

III. Suma de los divisores compuestos:
Sabemos que: $S_N = S_{primos} + S_{compuestos} + 1$
Reemplazamos: $29\,016 = 21 + S_{compuestos} + 1$
$\Rightarrow S_{compuestos} = 28\,994$
$\therefore$ La suma de los divisores compuestos es 28 994.

IV. Suma de los divisores múltiplos de 6:

Factorizamos: $D_6 = (2 \times 3)\underbrace{(2^3 \times 3 \times 5 \times 11)}_{M_1}$

Suma de los divisores de M_1:

$$S_{M_1} = \left(\frac{2^{3+1}-1}{2-1}\right)\left(\frac{3^{1+1}-1}{3-1}\right)\left(\frac{5^{1+1}-1}{5-1}\right)\left(\frac{11^{1+1}-1}{11-1}\right)$$

$S_{M_1} = 15 \times 4 \times 6 \times 12 = 4320$

Observe que la suma de los divisores de M_1 son multiplicados por 6.

Luego, la suma de los divisores de M múltiplos de 6 es: $6 \times 4320 = 25\,920$

$\therefore$ La suma de los divisores $\overset{\circ}{6}$: 25 920

V. Suma de los divisores no $\overset{\circ}{15}$:

Hallamos divisores $\overset{\circ}{15}$: $D_{\overset{\circ}{15}} = (3 \times 5)(2^4 \times 3 \times 11)$

Hallamos la suma de los divisores $\overset{\circ}{15}$:

$$S_{\overset{\circ}{15}} = 15\left(\frac{2^{4+1}-1}{2-1}\right)\left(\frac{3^{1+1}-1}{3-1}\right)\left(\frac{11^{1+1}-1}{11-1}\right)$$

$S_{\overset{\circ}{15}} = 15 \times 31 \times 4 \times 12 = 22\,320$

Hallamos la suma de los divisores no $\overset{\circ}{15}$:

$S_{\neq\overset{\circ}{15}} = S_M - S_{\overset{\circ}{15}} \Rightarrow S_{\neq\overset{\circ}{15}} = 29\,016 - 22\,320 = 6696$

$\therefore$ La suma de los divisores no $\overset{\circ}{15}$: 6696.

VI. Producto de los divisores $\overset{\circ}{30}$:

Hallamos la cantidad de divisores $\overset{\circ}{30}$:

$D_{\overset{\circ}{30}} = (2 \times 3 \times 5)\underbrace{(2^3 \times 3 \times 11)}_{M_1}$

Total de divisores de M_1: $D_{M_1} = 4 \times 2 \times 2 = 16$

Producto de los divisores de M_1:

$P_{M_1} = (2^3 \times 3 \times 11)^{16/2} = 2^{24} \times 3^8 \times 11^8$

Observa que cada divisor de M_1 es multiplicado por 30.

$P_{\overset{\circ}{30}} = (2 \times 3 \times 5)^8 \times 2^{24} \times 3^8 \times 11^8$

Efectuando: $P_{\overset{\circ}{30}} = 2^{32} \times 3^{16} \times 5^8 \times 11^8$

$\therefore$ El producto de los divisores $\overset{\circ}{30} = 2^{32} \times 3^{16} \times 5^8 \times 11^8$

FUNCIÓN DE EULER O INDICADOR DE UN NÚMERO (ϕ_N)

Esta función permite calcular la cantidad de números que son menores y primos entre sí con N.

Sea: $N = a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma$

La función de Eulér está definida por:

$$\boxed{\phi_{(N)} = N\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(a - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right)}$$

Ejemplo:

¿Cuántos números enteros son menores y primos entre sí con 360?

Resolución:

Descomponiendo 360 en factores primos:

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

Mediante la función de Euler calculamos la cantidad de números menores y primos entre sí con 360.

$$\phi_{(360)} = 360\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)$$

$$\phi_{(360)} = 360\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = 96$$

$\therefore$ Son 96 números menores y PESÍ con 360.

CONCEPTOS ADICIONALES

Divisor propio

Los divisores propios de un número entero positivo son todos sus divisores menores que él.

Ejemplo:

- De los divisores de 12: $\underbrace{1; 2; 3; 4; 6;}_{\text{Divisores propios}}$ 12
- De los divisores de 18: $\underbrace{1; 2; 3; 6; 9;}_{\text{Divisores propios}}$ 18

Observaciones

Para el número entero positivo N, se cumple:

a) Número de divisores propios (D^*_N):

$$\boxed{D^*_N = D_N - 1}$$

b) Suma de los divisores propios (S^*_N):

$$\boxed{S^*_N = S_N - N}$$

Número perfecto

Todo número entero positivo que es igual a la suma de sus divisores propios, se denomina "número perfecto".

Si N es un número perfecto, se cumple: $\boxed{S^*_N = N}$

Ejemplos:

- Veamos por qué el 6 es un número perfecto.
  Divisores propios de 6: 1; 2 y 3.
  Se verifica que: $S^*_N = N \quad 1 + 2 + 3 = 6$
  $\therefore$ 6 es un número perfecto.
- Otro número perfecto es 28.
  Divisores propios de 28: 1; 2; 4; 7 y 14.
  $S^*_{28} = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$
  $\therefore$ 28 es un número perfecto.

Números defectuosos

Un número entero es defectuoso si la suma de sus divisores propios es menor que dicho número, es decir:

Si N es un número defectuoso, se cumple: $\boxed{S^*_N < N}$

Ejemplo:

¿15 es un número defectuoso?

Resolución:

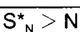
Divisores propios de 15: 1; 3 y 5.

$S^*_N = 1 + 3 + 5 = 9 < 15$

$\therefore$ 15 es un número defectuoso.

Números abundantes

Un número entero positivo es abundante si la suma de sus divisores propios es mayor que dicho número.

Si N es un número abundante, se cumple: $S^*_N > N$ 

Ejemplo:

¿18 es un número abundante?

Resolución:

Divisores propios de 18: 1; 2; 3; 6 y 9

$S^*_{18} = 1 + 2 + 3 + 6 + 9 = 21 > 18$

$\therefore$ 18 es un número abundante.

Números amigos

Dos números enteros positivos son amigos, si la suma de los divisores propios de uno de ellos es igual al otro y viceversa.

Si los números A y B son amigos, se cumple:

$S^*_A = B \vee S^*_B = A$

Ejemplo:

¿Los números 220 y 284 son amigos?

Resolución:

Hallamos la suma de los divisores propios de cada número:

$220 = 2^2 \times 5 \times 11$

$\Rightarrow S^*_{220} = 504 - 220 = 284$

$284 = 2^2 \times 71$

$\Rightarrow S^*_{284} = 504 - 284 = 220$

$\therefore$ Los números 220 y 284 son amigos.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Hallar el valor de "n", sabiendo que el número $N = 21 \times 15^n$ tiene 20 divisores compuestos.

Resolución:

Expresamos a N como el producto de sus factores primos: $N = (3 \times 7)(3 \times 5)^n = 3^{n+1} \times 5^n \times 7$

Sabemos que: $D_N = D_p + D_c + 1$

Reemplazando: $(n+2)(n+1)2 = 3 + 20 + 1 = 24$

Igualando factores: $(n + 2)(n + 1) = 12 = 3 \times 4$

$\therefore n = 2$

2. Determinar el valor de "n", para que el número $A = 175 \times 245^n$ tenga 28 divisores que no son divisibles por 35.

Resolución:

Descomponiendo A:

$A = (7 \times 5^2)(5 \times 7^2)^n \Rightarrow A = 5^{n+2} \times 7^{2n+1}$

Total de divisores: $D_A = (n + 3)(2n + 2)$

Total de divisores $\overset{\circ}{35}$:

$D_{\overset{\circ}{35}} = (5 \times 7)(5^{n+1} \times 7^{2n}) \Rightarrow D_{\overset{\circ}{35}} = (n + 2)(2n + 1)$

Divisores no $\overset{\circ}{35}$: $D_{\neq \overset{\circ}{35}} = D_A - D_{\overset{\circ}{35}} = 28$

Reemplazando:

$(n + 3)(2n + 2) - (n + 2)(2n + 1) = 28$

$\therefore$ Efectuando: $n = 8$

3. Sabiendo que: $M = 2^m \times 3^3 \times 5^n$ tiene 50 divisores, cuya suma de cifras es $\overset{\circ}{9}$ y 80 divisores, cuya cifra de menor orden es par, determinar "m + n".

Resolución:

De: $M = 2^m \times 3^3 \times 5^n$

Hallamos la cantidad de divisores cuya suma de cifras es $\overset{\circ}{9}$: $D_{\overset{\circ}{9}} = 3^2(2^m \times 3 \times 5^n)$

Cantidad de divisores $\overset{\circ}{9}$: $(m + 1)(2)(n + 1) = 50$

$\Rightarrow (m + 1)(n + 1) = 25 = 5 \times 5$ ...(1)

Hallamos la cantidad de divisores cuya cifra de menor orden es par:

$D_{\overset{\circ}{2}} = 2(2^{m-1} \times 3^3 \times 5^n)$

Cantidad de divisores $\overset{\circ}{2}$:

$(m)(4)(n + 1) = 80$

$\Rightarrow m(n+1) = 20 = 4 \times 5$ ...(2)

De (1) y (2): $m = 4$; $n = 4$ $\therefore m + n = 8$

4. Si al número $T = 2^a \times 7^b$ se le multiplica por 8 y por 49, su número de divisores aumenta en 12 y 10 respectivamente. Hallar el valor de "a + b".

Resolución:

De: $T = 2^a \times 7^b$

Total de divisores:

$D_T = (a + 1)(b + 1)$ ...(1)

T multiplicado por 8: $T_1 = 8T = 2^{a+3} \times 7^b$

$\Rightarrow D_{T_1} = (a + 4)(b + 1)$ ...(2)

T multiplicado por 49: $T_2 = 49T = 2^a \times 7^{b+2}$

$\Rightarrow D_{T_2} = (a + 1)(b + 3)$ ...(3)

Como el número de sus divisores aumentó se cumple:

$D_{T_1} - D_T = 12$

$\Rightarrow (a + 4)(b + 1) - (a + 1)(b + 1) = 12$

$(b - 1)(4 - 1) = 12 \Rightarrow b = 3$

$D_{T_2} - D_T = 10$

$\Rightarrow (a + 1)(b + 3) - (a + 1)(b + 1) = 10$

$(a + 1)(3 - 1) = 10 \Rightarrow a = 4$

$\therefore a + b = 7$

5. Sabiendo que el factorial de 31 tiene "n" divisores, ¿cuántos divisores tiene el factorial de 32?

Resolución:

Sea: $N = 31!$

Además: $M = 32! = 32 \times 31! = 2^5 \times 31!$

De la descomposición canónica del 31! en el 32!, solo se afecta el exponente del factor primo 2.
De $31! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times ... \times 31$
Tenemos: $31! = 2^{26}P$ Los demás factores primos (P)

Total de divisores: $D_{31!} = 27D_p$

Por dato: $n = 27D_p \Rightarrow D_p = \dfrac{n}{27}$

Del factorial de 32:
$32! = 2^5 \times 2^{26} \times P \Rightarrow 32! = 2^{31}P$
Hallamos el total de divisores de 32!:

$$D_{32!} = 32 \times D_P = \frac{32}{27}n \qquad \left(D_P = \frac{n}{27}\right)$$

$\therefore$ Total de divisores de $32! = \dfrac{32}{27}n$

6. Hallar el menor número entero que tiene 12 divisores. Dar como respuesta la mayor cifra del número.

Resolución:
Sea N el menor número entero.
Por dato: $D_N = 12$
Buscamos los números que multiplicados entre sí nos den 12:

$$12 = \underbrace{6 \times 2}_{} = \underbrace{4 \times 3}_{} = \underbrace{3 \times 2 \times 2}_{}$$

N puede tener: 2 factores primos (1); 2 factores primos (2); 3 factores primos (3)

Los respectivos exponentes de los factores primos en cada caso son:
De (1): $N = O^5 \times O^1$ (2 fact. primos)
Su menor valor: $N = 2^5 \times 3 = 96$
De (2): $N = O^3 \times O^2$ (2 fact. primos)
Su menor valor: $N = 2^3 \times 3^2 = 288$
De (3): $N = O^2 \times O \times O$ (3 fact. primos)
Su menor valor: $N = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$

Luego, el menor número entero es 60.
$\therefore$ Mayor cifra del número: 6.

7. Hallar el menor número de la forma $\overline{abcabc}$, sabiendo que sus cifras son diferentes de cero, tiene 16 divisores y $\overline{abc}$ es un número primo. Dar como respuesta: a + b + c.

Resolución:
Descomponiendo en bloques:
$N = \overline{abcabc} = 1001 \times \overline{abc}$
Al descomponer 1001 en factores:
$N = 7 \times 11 \times 13 . \times \overline{abc}$
Pero: $\overline{abc}$ es número primo y $D_N = 16$ divisores.
Luego, $\overline{abc}$ es el menor número primo de 3 cifras distintas de cero: $\overline{abc} = 113$
$\therefore a + b + c = 5$

8. ¿Cuál es el menor número de divisores del número $\overline{ab0ab}$, sabiendo que $\overline{ab}$ es un número primo?

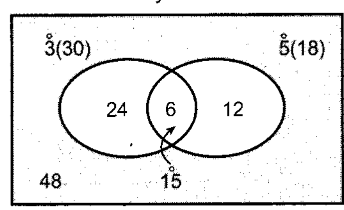
Resolución:
Del número: $N = \overline{ab0ab}$
Descomponiendo en bloques y en factores primos:
$N = \overline{ab0ab} = (1001)(\overline{ab}) = (7 \times 11 \times 13)(\overline{ab})$
Como $\overline{ab}$ es un número primo de dos cifras, se presentan dos casos:

Primer caso:
Si: $\overline{ab} = 11 \lor \overline{ab} = 13$
Hallamos la cantidad de divisores de N:
$N = 7 \times 11^2 \times 13 \lor N = 7 \times 11 \times 13^2$
$D_N = 2 \times 3 \times 2 = 12 \lor D_N = 2 \times 2 \times 3 = 12$
$\Rightarrow D_N = 12$ divisores

Segundo caso:
Si $\overline{ab}$ no es 11 ni 13.
Hallamos la cantidad de divisores de N:
$N = 7 \times 11 \times 13 \times \overline{ab}$ ($\overline{ab} \neq 11; \neq 13$)
$D_N = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ divisores
$\therefore$ El menor número de divisores es 12.

9. ¿Cuántos números de la forma $\overline{ab}$ son primos relativos con 15?

Resolución:
Como $\overline{ab}$ es PESÍ con 15, $\overline{ab}$ no debe ser $\overset{\circ}{3}$ ni $\overset{\circ}{5}$.
Números de dos cifras: $\underbrace{10; 11; 12; ...; 99}_{90 \text{ números}}$
Seleccionamos a los $\overset{\circ}{3}$ y a los $\overset{\circ}{5}$.



Luego, la cantidad de números de dos cifras que no son $\overset{\circ}{3}$ ni $\overset{\circ}{5}$: 48
$\therefore$ Son 48 números de la forma $\overline{ab}$ PESÍ con 15.

10. Si los números $A = 2^m \times 3^n \land B = 2^{2m} \times 3^n$ tienen $\overline{ab}$ y $\overline{ba}$ divisores, respectivamente, hallar "m+n", sabiendo que "a" y "b" son consecutivos.

Resolución:
$A = 2^m \times 3^n \Rightarrow D_A: (m + 1)(n + 1) = \overline{ab}$ ...(1)
$B = 2^{2m} \times 3^n \Rightarrow D_B: (2m + 1)(n + 1) = \overline{ba}$ ...(2)
Además: a y b son consecutivos, de (1) y (2) se deduce: b > a.
(2) − (1):
$(2m + 1)(n + 1) - (m + 1)(n + 1) = \overline{ba} - \overline{ab}$
$= 9(b - a) = 9$
Efectuando e igualando factores:
$(n+1)(m) = 9 = 3 \times 3 \Rightarrow m = 3; n = 2$
$\therefore m + n = 5$

11. ¿Cuántos números de 3 cifras del sistema cuaternario son primos absolutos?

Resolución:

Convertimos los números de tres cifras de la base 4 al sistema decimal:

Base 4: 100_4; 101_4; 102_4; ....; 333_4

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$

Base 10: 16; 17; 18; ....; 63

Números primos absolutos:

$\underbrace{17;\ 19;\ 23;\ 29;\ 31;\ 37;\ 41;\ 43;\ 47;\ 53;\ 59;\ 61}_{12\ \text{números}}$

$\therefore$ Son 12 números primos.

12. Hallar el número de la forma $\overline{aabb}_{12}$ que tenga 14 divisores. Dar como respuesta: "a + b".

Resolución:

Se tiene: $N = \overline{aabb}_{12}$

Descomponiendo: $N = a(12^3) + a(12^2) + b(12) + b$

$\Rightarrow (13 \times 12^2)a + 13b$

Al factorizar: $N = 13(144a + b)$

Pero: $D_N = 14 = 2 \times 7$

$\Rightarrow$ N tiene 2 factores primos

Uno de los factores primos es 13: $N = (13)^1 \times \bigcirc^6$

Se deduce para el otro factor primo: $144a + b = \bigcirc^6$

Vemos que cumple: $144a + b = 3^6 = 729$

$\Rightarrow a = 5;\ b = 9 \quad \therefore a + b = 14$

13. Encontrar el menor número entero que sea primo relativo con 76 y 77, tal que su exceso sobre 4, sea múltiplo de 9 y 13.

Resolución:

Sea N el menor número entero.

Por dato:

$$N\begin{cases} \text{PESÍ } 76 & \Rightarrow N \neq \overset{\circ}{2} \ y \neq \overset{\circ}{19} \\ \text{PESÍ } 77 & \Rightarrow N \neq \overset{\circ}{7} \ y \neq \overset{\circ}{11} \\ N - 4: \overset{\circ}{9} \ y \ \overset{\circ}{13} & \Rightarrow N = \text{MCM}(9; 13) + 4 = \overset{\circ}{117} + 4 \end{cases}$$

Luego: $N = 117k + 4$

Además:

$N \neq \overset{\circ}{2} \Rightarrow 117k + 4 \neq \overset{\circ}{2} \Rightarrow k \neq 2$ ...(1)

$N \neq \overset{\circ}{19} \Rightarrow 117k + 4 \neq \overset{\circ}{19} \Rightarrow k \neq 43; 62; 81;$ ...(2)

$N \neq \overset{\circ}{7} \Rightarrow 117k + 4 \neq \overset{\circ}{7} \Rightarrow k \neq 2; 9; 16;$ ...(3)

$N \neq \overset{\circ}{11} \Rightarrow 117k + 4 \neq \overset{\circ}{11} \Rightarrow k \neq 1; 12; 23;$ ...(4)

De (1); (2); (3) y (4), el menor valor de k: 3

$\Rightarrow N = 117 \times 3 + 4 = 355$

$\therefore$ El menor número: 355

14. ¿Cuántos rectángulos de 3024 cm^2 de área son tales que tengan sus lados números enteros de centímetros?

Resolución:

Sabemos que el producto de los divisores equidistantes, es igual al número dado.

Luego, el número de rectángulos, cuyos lados son números enteros y de área 3024 cm^2, será el número de parejas de divisores que podamos formar.

Hallamos el número de divisores:

$3024 = 2^4 \times 7^2 \Rightarrow D_N = 15$

El número de rectángulos: $\frac{15 + 1}{2} = 8$

$\therefore$ Son 8 rectángulos.

15. ¿Cuántos rectángulos de 12 320 cm^2 de área existen, tales que sus lados sean números pares de centímetros?

Resolución:

El producto de los divisores equidistantes es 12 320 cm^2, pero en algunos casos uno de estos factores es impar.

Sabemos que: $12\,320 = 2^5 \times 5 \times 7 \times 11$

Total de divisores: $D_{12\,320} = 6 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$

$\Rightarrow \frac{48}{2} = 24$ parejas de divisores

Total de divisores impares: $D_{impar} = 2 \times 2 \times 2 = 8$

Pareja de divisores que tienen un divisor impar: 8.

Total de parejas de divisores, ambos divisores son pares: $24 - 8 = 16$

$\therefore$ Existen 16 rectángulos cuyos lados son números pares de centímetros.

16. El número N, descompuesto en factores primos es de la forma: $N = 2^a \times 3^b \times 5^c$. Además, se suprimen 24, 18 y 12 divisores dividiéndolo por 2; 3 y 5, respectivamente. Determinar: a + b + c.

Resolución:

Sabemos que: $N = 2^a \times 3^b \times 5^c$

$\Rightarrow D_N = (a + 1)(b + 1)(c + 1)$ ...(1)

Hallamos el número de divisores:

Dividiendo por 2: $N_1 = \frac{N}{2} = 2^{a-1} \times 3^b \times 5^c$

$\Rightarrow D_{N_1} = a(b + 1)(c + 1)$ ...(2)

Dividiendo por 3: $N_2 = \frac{N}{3} = 2^a \times 3^{b-1} \times 5^c$

$\Rightarrow D_{N_2} = (a + 1)b(c + 1)$ ...(3)

Dividiendo por 5: $N_3 = \frac{N}{5} = 2^a \times 3^b \times 5^{c-1}$

$\Rightarrow D_{N_3} = (a + 1)(b + 1)c$ ...(4)

Como la cantidad de divisores disminuye se cumple:

$D_N - D_{N_1} = 24 \Rightarrow (b + 1)(c + 1) = 24 = 4 \times 6$

$D_N - D_{N_2} = 18 \Rightarrow (a + 1)(c + 1) = 18 = 3 \times 6$

$D_N - D_{N_3} = 12 \Rightarrow (a + 1)(b + 1) = 12 = 3 \times 4$

Reduciendo tenemos: $a = 2;\ b = 3;\ c = 5$

$\therefore a + b + c = 10.$

17. Determinar la suma de todos los números que tienen una cantidad impar de divisores y tales que al ser divididos por 39, se obtiene un cociente primo y de residuo la unidad.

Resolución:

Sea N el número, se sabe que: D_N = impar

$\Rightarrow$ N es cuadrado perfecto

$N = 39p + 1$; p es número primo.

Los números que cumplen, son:
$N_1 = 39 \times 5 + 1 = 196$; $N_2 = 39 \times 37 + 1 = 1444$
$N_3 = 39 \times 41 + 1 = 1600$
$\therefore$ La suma es: $196 + 1444 + 1600 = 3240$

18. Hallar a + b, sabiendo que el numeral de la forma $\overline{ab(2a)(2b)}$ tiene 30 divisores.

Resolución:

Descomponiendo en bloques:
$N = \overline{ab(2a)(2b)} = 102 \times \overline{ab}$; $a < 5 \ \wedge \ b < 5$
Descomponiendo en factores: $N = 2 \times 3 \times 17 \times \overline{ab}$
Analizamos el número de divisores:
$D_N = 30 = 2 \times 3 \times 5 \Rightarrow$ N tiene 3 factores primos.
La forma del número: $N = \bigcirc^1 \bigcirc^2 \bigcirc^4$
Vemos que $\overline{ab}$ debe contener los factores:
2; 3 o 17.
Seleccionando adecuadamente:
$N = 17 \times 3^2 \times 2^4 \Rightarrow \overline{ab} = 3 \times 2^3 = 24$
$\therefore a + b = 2 + 4 = 6$

19. ¿En cuántos ceros terminará 13! al ser escrito en base 12?

Resolución:

El factorial de 13 escrito en base 12:
$13! = \overline{ab...c\underbrace{00...0}_{\text{"n" ceros}}}_{12}$

En forma equivalente: $13! = \overline{ab...c}_{12} \times 1\underbrace{00...0}_{\text{"n ceros"}}{}_{(12)}$

Al descomponer: $13! = \overline{ab...c}_{12} \times (12^n)$
$12^n \rightarrow 2^{2n} \times 3^n$

Hallamos el exponente de 2 y 3 en el 13!:

- Exponente de 2: 13 ⌊2 → 6 ⌊2 → 3 ⌊2 → 1 $\Rightarrow 6 + 3 + 1 = 10$
- Exponente de 3: 13 ⌊3 → 4 ⌊3 → 1 $\Rightarrow 4 + 1 = 5$

Hallamos el exponente de 12:
$2^{10} \times 3^5 = (2^2 \times 3)^5 = 12^5$
$\therefore$ El número termina en 5 ceros.

20. Al convertir la expresión: $E = 444_6! - 44_6!$ al sistema decimal, ¿en cuántos ceros termina?

Resolución:

De la expresión: $E = 444_6! - 44_6!$
En base decimal: $E = 172! - 28!$ ...(1)

Para saber la cantidad de ceros en los que termina E, calculamos el número de ceros en los que termina cada término.

Hallamos el exponente de 10 de cada término:
$172! = 2^{168} \times 5^{41} \times P_1 \Rightarrow 127! = 2^{127} \times P_1 \times 10^{41}$ ...(α)
$28! = 2^{25} \times 5^6 \times P_2 \Rightarrow 28! = 2^{19} \times P_2 \times 10^6$ ...(β)

Hallamos, el número de ceros en los que termina E: (α) y (β) y en 1:

$$E: \quad \overbrace{P_1000........00000000}^{41 \text{ ceros}} - P_2000000 = \boxed{ab.......c}000000$$

$\therefore$ E termina en 6 ceros.

21. Determine en cuántos ceros termina la expresión:
$E = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times ... \times 250$

Resolución:

De: $E = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times 250 = 250!$
Vemos que:
$E = 250! = 2^a \times 5^b \times P \Rightarrow$ factores primos
Al hallar los respectivos exponentes del factor 2 y 5, tenemos:
Exponente de 2:
$125 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 244$
Exponente de 5:
$50 + 10 + 2 = 62$
Luego: $E = 2^{244} \times 5^{62} \times P$
Hallamos el exponente de 10: $E = 2^{182} \times P \times 10^{62}$
$\therefore$ E termina en 62 ceros.

22. Hallar la suma de cifras del numeral $\overline{abc}$, sabiendo que a + c = b y que además dicho número tiene 9 divisores.

Resolución:

Como: $b = a + c \Rightarrow \overline{abc}$ es $\overset{\circ}{11}$
Pero: $D_{\overline{abc}} = 9 = 3 \times 3$
$\qquad\qquad\qquad \downarrow \quad \downarrow$
$\qquad\qquad\quad (2+1)(2+1)$

Vemos que $\overline{abc}$ tiene 2 factores primos, uno de los cuales es 11.

Luego: $\overline{abc} = 11^2 \times P^2$, donde P es un número primo.

Para el número de tres cifras:
$100 \le 11^2 \times P^2 < 1000 \Rightarrow P = 2$

Reemplazando: $\overline{abc} = 11^2 \times 2^2 = 484$
$\therefore$ Suma de cifras = 16.

23. Si: $A = 10 \times 20 \times 30 \times ... \times 100$, tiene "n" divisores, ¿cuántos divisores tiene: $B = 5 \times 10 \times 15 \times ... \times 50$?

Resolución:

De la expresión:
$A = 10 \times 20 \times 30 \times ... \times 100$ (10 factores)
Tenemos:
$A = 10^{10}(\underbrace{1 \times 2 \times 3 \times ... \times 10}_{10!}) = 10^{10} \times 10!$
Descomponiendo en factores primos:
$A = 2^{18} \times 5^{12} \times P$ (P contiene a todos los factores primos menores que 10).
Pero, la cantidad de divisores: $D_A = n$

$\Rightarrow 19 \times 13 \times D_P = n \Rightarrow D_P = \dfrac{n}{19 \times 13}$ ... (1)

De la expresión:

$B = 5 \times 10 \times 15 \times ... \times 50$(10 factores)

Tenemos: $B = 5^{10}\underbrace{(1 \times 2 \times 3 \times ... \times 10)}_{10!} = 5^{10} \times 10!$

Descomponiendo en factores primos:

$B = 2^8 \times 5^{12} \times P$

Hallamos el número de divisores de B:

$D_B = 9 \times 13 \times D_P$

Reemplazando: $D_B = 9 \times 13\left(\dfrac{n}{19 \times 13}\right) = \dfrac{9n}{19}$

$\therefore$ B tiene $\dfrac{9}{19}$n divisores.

24. Calcular la suma de las cifras de un número que tiene nueve divisores y que si se le divide por 11 da un cociente primo absoluto y deja residuo 9.

Resolución:

Sea: A el número, que por dato se cumple:

Cantidad de divisores:

$D_N = 9 \Rightarrow$ N es cuadrado perfecto.

De la división: N = 11p + 9; "p" es número primo.

Vemos que cumple, cuando p = 17

N = 11 × 17 + 9 = 196, que tiene 9 divisores.

$\therefore$ Suma de cifras: 1 + 9 + 6 = 16.

25. ¿Cuántos ceros tiene el numeral $600...00_{(12)}$, si la suma de sus divisores compuestos es 30 849?

Resolución:

Tenemos el numeral: $A = 6\underbrace{00...00}_{\text{"n" ceros}}{}_{(12)}$

Descomponiendo canónicamente:

$A = 6 \times 10^n{}_{12} = 6 \times 12^n = 2^{2n+1} \times 3^{n+1}$

Pero: $S_{div.\ comp.} = 30\,849$

$\Rightarrow S_A = 30\,849 + 2 + 3 + 1 = 30\,855$

Reemplazando: $(2^{2n+2} - 1)\dfrac{(3^{n+2} - 1)}{2} = 30\,855$

Descomponiendo en 2 factores:

$(2^{2n+2} - 1)(3^{n+2} - 1) = 61\,710 = 242 \times 255$

Igualando factores: $3^{n+2} - 1 = 242 \Rightarrow n = 3$

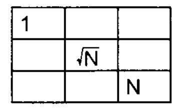
$\therefore$ El numeral tiene 3 ceros.

26. César observa la tabla de los divisores de un número, la que está formada por 3 filas y 3 columnas. Hallar la suma de las cifras del número, si al sumar los divisores de la diagonal principal se obtiene 463.

Resolución:

Sea N, el número de 9 divisores, entonces N es cuadrado perfecto.

De su tabla de divisores, se cumple:



1		
	$\sqrt{N}$	
		N

Por dato: $1 + \sqrt{N} + N = 463$

Al resolver: N = 441

$\therefore$ Suma de cifras: 4 + 4 + 1 = 9

27. ¿Cuál es el exponente del factor primo 3 contenido en la descomposición canónica de $3^k!$?

Resolución:

Al descomponer canónicamente:

$3^k! = 3^a \times P$ (P contiene a todos los factores primos menores que $3^k!$)

Hallamos "a":

$$\begin{array}{l|l} 3^k & 3 \\ \hline \quad 3^{k-1} & 3 \\ \hline \qquad 3^{k-2} & 3 \\ \hline \qquad\quad 3^{k-3} & \end{array}$$

Sumamos los cocientes para hallar el exponente de 3^k:

$\Rightarrow a = \underbrace{3^{k-1} + 3^{k-2} + ... + 1}$

$a = \dfrac{3^k - 1}{3 - 1}$

$\therefore$ Exponente del factor primo 3: $\dfrac{3^k - 1}{2}$

28. Hallar el número $N = 2^5 \times a \times b$, sabiendo que "a" y "b" son números primos y que la suma de todos sus divisores es el triple de él.

Resolución:

Tenemos: $N = 2^5 \times a \times b$ (a y b números primos)

Por dato: $S_N = 3N$

Reemplazando:

$\left(\dfrac{2^6 - 1}{2 - 1}\right)\left(\dfrac{a^2 - 1}{a - 1}\right)\left(\dfrac{b^2 - 1}{b - 1}\right) = 3 \times 32 \times a \times b$

Efectuando: $63(a + 1)(b + 1) = 96 \times a \times b$

Simplificando e igualando:

$(3)(7)(a + 1)(b + 1) = 32 \times a \times b$

$\Rightarrow a = 7;\ b = 3$

Enseguida: $N = 2^5 \times 7 \times 3 = 672$

$\therefore$ El número es 672

29. Determinar la suma de dos números primos "p" y "q", tal que la suma de los divisores de $N = 2^3 \times p^2 \times q$ sea los 93/35 de N.

Resolución:

Por dato: $S_N = \left(\dfrac{93}{35}\right)N$

Reemplazando: $\left(\dfrac{2^4 - 1}{2 - 1}\right)\left(\dfrac{p^3 - 1}{p - 1}\right)\left(\dfrac{q^2 - 1}{q - 1}\right) = \left(\dfrac{93}{35}\right)N$

Simplificando:

$5(p^2 + p + 1)(q + 1) = \left(\dfrac{31}{5 \times 7}\right)8 \times p^2 \times q$

Igualando factores:

$(7)(5^2)(p^2 + p + 1)(q + 1) = 31 \times 8 \times p^2 \times q$

$\Rightarrow p = 5;\ q = 7 \qquad \therefore\ p + q = 12$

30. Hallar el número $T = 2^3 \times a^2$, si "a" es un número primo distinto de 2 y que la suma de los divisores de T es igual al 93/40 de dicho número.

Resolución:

Por dato: $S_T = \left(\frac{93}{40}\right)T;\ a \neq 2$

Reemplazando: $\left(\frac{2^4 - 1}{2 - 1}\right)\left(\frac{a^3 - 1}{a - 1}\right) = \left(\frac{93}{40}\right)(8)(a^2)$

Simplificando y efectuando:

$(5^2)(a^2 + a + 1) = (31)(a^2) \Rightarrow a = 5$

Hallamos el número: $T = 2^3 \times 5^2 = 200$

$\therefore$ El número es 200.

31. Sabiendo que el número $\overline{aaa}$ tiene 8 divisores, hallar la suma de todos los valores de "a".

Resolución:

Descomposición polinómica: $N = \overline{aaa} = 3 \times 37 \times a$

Además: $D_N = 8$ divisores

Pero: $8 = 2 \times 2 \times 2 \Rightarrow$ N tiene 3 divisores primos

Es decir: "a" es primo y $\neq 3 \Rightarrow$ "a" puede ser: 2; 5 y 7

También: $8 = 4 \times 2 \Rightarrow$ N tiene 2 divisores primos

$\Rightarrow a = 9$

Sumando los valores de "a" $= 2 + 5 + 7 + 9 = 23$

$\therefore$ La suma es 23.

32. Si el numeral $N = 2^{3a+1} \times 3^2 \times 5^4 \times 7^{2a-1}$, posee 96 divisores que son múltiplos de 100 pero no de 1000, ¿cuántos de sus divisores son $\overset{\circ}{35}$ pero no $\overset{\circ}{25}$?

Resolución:

Hallamos los divisores de N, múltiplos de 100 pero no de 1000. Eliminamos a los múltiplos de 1000 y nos quedamos con los múltiplos de 100.

N =	$2^{3a+1}\times$	$3^2\times$	$5^4\times$	7^{2n-1}
	↓	↓	↓	↓
	$\cancel{2^{3a+1}}$	3^2	$\cancel{5^4}$	7^{2n-1}
	$\cancel{2^{3a}}$	3^1	$\cancel{5^3}$	7^{2n-2}
	$\cancel{2^{3a-1}}$	3^0	5^2	7^{2n-3}
	⋮		$\cancel{5^1}$	⋮
	$\cancel{2^3}$		$\cancel{5^0}$	7^1
	2^2			7^0
	$\cancel{2^1}$			
	$\cancel{2^0}$			
	$1\ \times$	$3\ \times$	$1\ \times$	$2a$

$\Rightarrow 6a = 96;\ a = 16$

Hallamos los divisores de N, múltiplos de 35 pero no de 25. Eliminamos los múltiplos de 25 y nos quedamos con los múltiplos de 35.

N =	$2^{49}\times$	$3^2\times$	$5^4\times$	7^{31}
	↓	↓	↓	↓
	$2^{49}\times$	$3^2\times$	$\cancel{5^4}\times$	7^{31}
	$2^{48}\times$	$3^1\times$	$\cancel{5^3}\times$	$\cancel{7^{30}}$
	⋮	3^0	$\cancel{5^2}$	⋮
	2^1		5^1	$\cancel{7^2}$
	2^0		$\cancel{5^0}$	$\cancel{7^1}$
				$\cancel{7^0}$
	$50\times$	$3\times$	$1\times$	$1 = 150$ divisores

$\therefore$ Son 150 divisores múltiplos de 35 pero no de 25.

33. Hallar la suma de todos los divisores de 4860 que sean primos relativos con 170. Dar como respuesta la suma de sus cifras.

Resolución:

Los divisores de 4860 que no tienen los mismos divisores primos que 170 serán PESÍ.

Eliminando los divisores primos de 4860 que son divisores de 170:

$4860 = 2^2 \times 3^5 \times 5 \ \wedge\ 170 = 2 \times 5 \times 17$

Hallamos la suma pedida: $\frac{3^6 - 1}{3 - 1} = 364$

$\therefore$ La suma de los divisores de 4860 que son PESÍ con 170 es 364.

34. La suma de los divisores propios de un número es 55 y la suma de las inversas de sus divisores es 19/36. ¿Cuál es la suma de las cifras del número?

Resolución:

Suma de divisores propios: $S^*_N = 55$

$\Rightarrow S_N - N = 55$ ...(1)

Suma de las inversas $I_N = 2\frac{19}{36}$

$\Rightarrow \frac{S_N}{N} = \frac{91}{36}$ ...(2)

De (1) y (2): $S_N = 91;\ N = 36$

$\therefore$ La suma de cifras del número: 9.

35. Hallar un número múltiplo de 15, que tenga 6 divisores y que la suma de estos sea 124. Dar como respuesta la suma de sus cifras.

Resolución:

Sea N el número, tal que:

$N = \overset{\circ}{15} \Rightarrow N = 3^a \times 5^b$

$D_N = 6 \Rightarrow (a+1)(b+1) = 6 = 2 \times 3$

$\Rightarrow a = 1; b = 2 \ \vee\ a = 2; b = 1$

Pero: $S_N = 124$

Si: $N = 3 \times 5^2 \Rightarrow S_N = 124$ (Sí cumple)

Si: $N = 3^2 \times 5 \Rightarrow S_N = 78$ (No cumple)

Hallamos el número: $N = 3 \times 5^2 = 75$

$\therefore$ Suma de cifras 12

36. Hallar el producto de los divisores del número 68 796 que sean múltiplos de 52 y sean primos entre sí con 297.

Resolución:

Hallamos los divisores de 68 796 PESÍ con 297. Eliminamos los divisores primos de 68 796 que son divisores de 297.

$$68\,796 = 2^2 \times \cancel{3}^3 \times 7^2 \times 13$$

$$297 = \cancel{3}^3 \times 11$$

Hallamos el número de divisores, múltiplos de 52:

$N = (2^2)(13)\underbrace{(7^2)}_{N_1} \Rightarrow D_{N_1} = 3$ divisores $\overset{\circ}{52}$

Hallamos el producto de divisores de N_1: $(7^2)^{3/2} = 7^3$

Hallamos el producto de divisores $\overset{\circ}{52}$:

$(2^2 \times 13)^3 \times 7^3 = 2^6 \times 7^3 \times 13^3$

$\therefore$ El producto de los divisores $\overset{\circ}{52}$ es: $2^6 \times 7^3 \times 13^3$

37. Hallar un número impar comprendido entre 3025 y 3481, sabiendo que tiene una cantidad impar de divisores. Dar como respuesta el producto de sus cifras.

Resolución:

Sea N el número, tal que:

N: es impar; $3025 < N < 3481$

Como D_N es impar, N es cuadrado perfecto

$\Rightarrow 55^2 < N < 59^2$

$\qquad 56^2 \quad 57^2$

$\Rightarrow N = 57^2 = 3249$

$\therefore$ Producto de cifras: $3 \times 2 \times 4 \times 9 = 216$

38. Hallar el producto de los divisores de 10 164 que sean primos entre sí con 114.

Resolución:

Los divisores de 10 164 que no tienen los mismos divisores primos que 114, serán PESI.

Tenemos:

$10\,164 = \cancel{2}^2 \times \cancel{3} \times 7 \times 11^2 \wedge 114 = \cancel{2} \times \cancel{3} \times 17$

Luego, los divisores de $A = 7 \times 11^2$ serán PESÍ con 114.

$$D_A = 2 \times 3 = 6$$

Hallamos el producto: $P_A = (7 \times 11^2)^3 = 847^3$

$\therefore$ El producto de los divisores es 487.

39. Hallar la suma de las inversas de los divisores de 155 925 que sean primos relativos con 728.

Resolución:

Los divisores de 155 925 que no tienen los mismos divisores primos que 728, serán PESÍ.

Hallamos los divisores que son PESÍ:

$155\,925 = 3^4 \times 5^2 \times 7 \times 11$

$728 = 2^3 \times 7 \times 13$

Luego, los divisores de $M = 3^4 \times 5^2 \times 11$ serán PESÍ con 728.

Hallamos la suma de los divisores de M:

$$S_M = \left(\frac{3^5-1}{2}\right)\left(\frac{5^3-1}{4}\right)\left(\frac{11^2-1}{10}\right) = 45\,012$$

Hallamos la suma de las inversas de los divisores de M:

$$I_M = \frac{S_M}{M} = \frac{45\,012}{81 \times 25 \times 11} = 2{,}0207$$

$\therefore$ La suma de las inversas: 2,0207.

40. Si el numeral $\overline{abcd}$ tiene 14 divisores y la suma de sus cifras de orden impar es igual a la suma de las cifras de orden par e igual a 9, hallar: a + 2c + 3d.

Resolución:

Del numeral $N = \overline{abcd}$, se cumple:

$$b + d = a + c = 9$$

Suma de cifras: $a + b + c + d = 18 \Rightarrow N = \overset{\circ}{9}$

$b + d = a + c \Rightarrow (b + d) - (a + c) = 0 \Rightarrow N = \overset{\circ}{11}$

Como N es múltiplo de 9 y 11, entonces dos de sus divisores primos son: 3 y 11. Además, N tiene 14 divisores y si N tiene 14 divisores, éste viene expresado como:

$N = \bigcirc^6 \times \bigcirc$.

Se deduce que el número será: $N = 3^6 \times 11$

Al efectuar: $N = \overline{abcd} = 8019$

$\therefore a + 2c + 3d = 8 + 2(1) + 3(9) = 37$

41. ¿Cuántos divisores de $N = 2^7 \times 5^9 \times 7^{13}$ tienen raíz cúbica pero no tienen raíz cuadrada?

Resolución:

Para que los divisores de N tengan raíz cúbica y no raíz cuadrada, los exponentes de los factores primos deben ser múltiplos de 3 pero no múltiplos de 2.

Luego, tenemos:

N =	$2^7 \times$	$5^9 \times$	7^{13}
	↓	↓	↓
	2^3	5^9	7^9
		5^3	7^3
En total:	1 ×	2 ×	2 = 4 divisores

$\therefore$ Existen 4 divisores de N.

42. ¿Cuál es el mayor número de la forma $\overline{ab0ab}$ que es igual al producto de varios primos consecutivos? Dar como respuesta: a + b.

Resolución:

Descomponemos el número $\overline{ab0ab}$ en bloques y en factores primos:

$\overline{ab0ab} = 1001(\overline{ab}) = 7 \times 11 \times 13 \times \overline{ab}$

($\overline{ab}$ no necesariamente es primo).

Como el mayor número es igual al producto de números primos consecutivos, se cumple:

$7 \times 11 \times 13 \times \overline{ab} = 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17$

Al simplificar: $\overline{ab} = 5 \times 17 = 85$

$\therefore a + b = 13$

43. Sabemos que desde 98 hasta $\overline{abc}$ existen 330 números que son primos relativos con 98. Si $\overline{abc}$ es divisible por 14, hallar: a + b + c.

Resolución:
Mediante la función de Euler hallamos la cantidad de números menores y primos relativos con 98.
Al descomponer: $98 = 2 \times 7^2$

$$\Rightarrow \phi_{(98)} = 98\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right) \Rightarrow \phi_{(98)} = 98\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{6}{7}\right) = 42$$

La cantidad de números menores y PESÍ con $\overline{abc}$:
$42 + 330 = 372$
Pero, sabemos que: $\overline{abc} = \overset{\circ}{14} \Rightarrow \overline{abc} = 2 \times 7 \times k$
Por condición: $\phi_{(abc)} = 372$

Reemplazamos: $\overline{abc}\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right) = 372$

$2 \times 7 \times k\left(\frac{1}{2} \times \frac{6}{7}\right) = 372 \Rightarrow k = 62$

Luego: $\overline{abc} = 2 \times 7 \times 62 = 868$
$\therefore$ a + b + c = 22.

44. Un número primo es OMIRP, cuando al invertir el orden de sus cifras resulta otro número primo. ¿Cuántos números primos OMIRP hay entre 300 y 400?

Resolución:
Utilizamos la Criba de Eratóstenes: para encontrar a los números.
primos entre 300 y 400.

301	302	303	304	305	306	(307)	308	309	310
(311)	312	(313)	314	315	316	(317)	318	319	320
321	322	323	324	325	326	327	328	329	330
(331)	332	333	334	335	336	(337)	338	339	340
341	342	343	344	345	346	(347)	348	(349)	350
351	352	(353)	354	355	356	357	358	(359)	360
361	362	363	364	365	366	(367)	368	369	370
371	372	(373)	374	375	376	377	378	(379)	380
381	382	(383)	384	385	386	(387)	388	(389)	390
391	392	393	394	395	396	397	398	399	400

Los números primos OMIRP son: 311; 313; 353; 373; 383; 337; 347; 387; 359 y 389.
$\therefore$ Existen 10 números.

45. Se llama número **perfecto** a todo número que es igual a la suma de sus divisiones propios. Euclides demostró que cualquier número de la suma $2^{n-1}(2^n - 1)$ donde $(2^n - 1)$ es primo absoluto, es perfecto y par. ¿Cuál es la suma de los cuatro primeros números perfectos pares?

Resolución:
Hallamos los cuatro primeros números perfectos de la forma $2^{n-1}(2^n - 1)$.

Si: $n = 2 \Rightarrow 2^{2-1}(2^2 - 1) = 6$
Si: $n = 3 \Rightarrow 2^{3-1}(2^3 - 1) = 28$
Si: $n = 5 \Rightarrow 2^{5-1}(2^5 - 1) = 496$
Si: $n = 7 \Rightarrow 2^{7-1}(2^7 - 1) = 8128$
Sumando los 4 primeros números perfectos:
6 + 28 + 496 + 8128 = 8658

46. Si Ud. multiplica los 200 primeros números primos y el resultado obtenido lo divide entre 4. ¿Cuál será el residuo?

Resolución:
Nos piden; el residuo al dividir:
$\underbrace{2 \times 3 \times 5 \times 7 \times ... \times P}_{\text{200 factores primos}} \div 4$

- $2\underbrace{(\overset{\circ}{2} + 1)(\overset{\circ}{2} + 1)(\overset{\circ}{2} + 1) ... (\overset{\circ}{2} + 1)}_{\text{199 factores}}$
- $2(\overset{\circ}{2} + 1)^{199}$

Aplicación del binomio de Newton en la divisibilidad.
$2(\overset{\circ}{2} + 1^{199}) = \overset{\circ}{2}(\overset{\circ}{2} + 1)$
$\Rightarrow 2(2k + 1) = 4k + 2 \Rightarrow \overset{\circ}{4} + 2$

47. Hallar el valor de "a", si el número $N = 9^a + 9^{a+2}$ es divisible por 30 números pares.

Resolución:
Se tiene: $N = 9^a + 9^{a+2}$
$N = 9^a + 9^a \times 9^2 = 9^a + 81 \times 9^a$
$N = 82 \times 9^a$
$N = 2 \times 41 \times 3^{2a}$ (DC)
Cálculo de $D(\overset{\circ}{2})$: $N = 2(41^1 \times 3^{2a})$
$D_{(\overset{\circ}{2})} = (1 + 1)(2a + 1) = 30$
$\Rightarrow 2(2a + 1) = 30 \Rightarrow a = 7$

48. ¿Cuántos números de la forma $\overline{abab}$ existen, tales que posean 6 divisores?

Resolución:
Dado el número: $N = \overline{abab}$
Descomposición por bloques:
$N = \overline{abab} = 100 \times \overline{ab} + \overline{ab} = 101(\overline{ab})$
101 es un número primo
$D_{(N)} = 6 = (2)(3) = (1 + 1)(2 + 1)$
$\Rightarrow N = 101^1 \times P^2$ (DC)
$\overline{ab} = P^2 = 5^2; 7^2$
$\therefore$ Existen 2 números: 2525 $\wedge$ 4949

49. Si: $N = 2 \times 3^a \times 7^b$ tiene 40 divisores múltiplos de 9 y 30 divisores múltiplos de 2. Hallar: (a + b)

Resolución:
Dado el número: $N = 2^1 \times 3^a \times 7^b$ (DC)
Cálculo de $D_{(\overset{\circ}{9})}$: $N = 3^2(2^1 \times 3^{a-2} \times 7^b)$
$D_{(\overset{\circ}{9})} = (2)(a - 1)(b + 1) = 40$
$\Rightarrow (a - 1)(b + 1) = 20$
Cálculo de $D_{(\overset{\circ}{2})}$: $N = 2(3^a \times 7^b)$
$D_{(\overset{\circ}{2})} = (a + 1)(b + 1) = 30$
$\Rightarrow (a - 1)(b + 1) = 4 \times 5$
$\Rightarrow (a + 1)(b + 1) = 6 \times 5$

Identificando: $a = 5 \wedge b = 4$
Piden: $a + b = 5 + 4 = 9$

50. Sean $A \times B = 53\,361$ el producto de dos números enteros positivos donde A tiene dos cifras, B tiene tres cifras y es divisible entre 3. Hallar el valor de B.

Resolución:
Por condición; sea: $A = \overline{ab}$; $B = \overline{cde}$
Dato: $A \times B = 53\,361$
Al descomponer canónicamente obtenemos:
$\overline{ab} \times \overline{cde} = 3^2 \times 7^2 \times 11^2$

$\left.\begin{matrix} 63 \times 847 \\ 77 \times 693 \\ 99 \times 539 \end{matrix}\right\}$ agrupando los factores de acuerdo a la cantidad de cifras.

Como: $\overline{cde} = \overset{\circ}{3}$ $\quad \therefore \overline{cde} = 693$

51. ¿Cuántos divisores tiene $2^n \times 3^{n+3}$, si el cuadrado de éste posee 37 divisores más?

Resolución:
Se tiene:
- $N = 2^n \times 3^{n+3}$
  $D_{(N)} = (n + 1)(n + 4)$
- $(N)^2 = (2^n \times 3^{n+3})^2 = 2^{2n} \times 3^{2n+6}$
  $D_{(N^2)} = (2n + 1)(2n + 7)$
  Dato: $D_{(N^2)} - D_{(N)} = 37$
  Reemplazando:
  $(2n + 1)(2n + 7) - (n + 1)(n + 4) = 37$
  Desarrollando:
  $4n^2 + 14n + 2n + 7 - (n^2 + 4n + n + 4) = 37$
  $3n^2 + 11n = 34$
  $n(3n + 11) = 2 \times 17$
  Por identificación: $n = 2$
  $\therefore D_{(N)} = (n + 1)(n + 4) = (2 + 1)(2 + 4) = 18$

52. Al multiplicar N por 27 su número de divisores aumenta en 90. Si $N = 16 \times 5^a$, hallar "a".

Resolución:
Se tiene:
- $N = 16 \times 5^a = (2^4)(5^a) \Rightarrow N = 2^4 \times 5^a$(DC)
  $D_{(N)} = (4 + 1)(a + 1) = 5(a + 1)$ ...(1)
- $N \times 27 = 2^4 \times 5^a \times 3^3$
  $D_{(27N)} = (4 + 1)(a + 1)(3 + 1)$
  $D_{(27N)} = 20(a + 1)$ ...(2)

Dato: $D_{(27N)} - D_{(N)} = 90$
Reemplazando (1) y (2):
$20(a + 1) - 5(a + 1) = 90$
$\Rightarrow 15(a + 1) = 90 \quad \therefore a = 5$

53. ¿Cuántos divisores tendrá:
$N = 36 \times 36^2 \times 36^3 \times 36^4 \times ... \times 36^n$?

Resolución:
Se tiene:
$N = 36^1 \times 36^2 \times 36^3 \times ... \times 36^n$
$N = 36^{1+2+3+...+n} = 36^{\frac{n(n+1)}{2}}$
$N = 6^{2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]} = 6^{n(n+1)}$
$N = (2)(3)^{n(n+1)} = 2^{n(n+1)} \times 3^{n(n+1)}$
$D_{(N)} = [n(n + 1) + 1][n(n + 1) + 1]$
$\therefore D_{(N)} = (n^2 + n + 1)^2$

54. Si: $N = a^{n+1} \times b^{n+3}$ (a; b números primos) y $D_{(\sqrt{N})} = 20$, hallar "n".

Resolución:
Se tiene: $N = a^{n+1} \times b^{n+3}$ (DC)
$\sqrt{N} = N^{1/2} = a^{\frac{n+1}{2}} \times b^{\frac{n+3}{2}}$
$D_{(\sqrt{N})} = \left(\frac{n+1}{2} + 1\right)\left(\frac{n+3}{2} + 1\right)$
$D_{(\sqrt{N})} = \left[\frac{(n+3)}{2}\right]\left[\frac{(n+5)}{2}\right]$; Dato: $D_{(\sqrt{N})} = 20$
$\Rightarrow \frac{(n+3)(n+5)}{4} = 20 \Rightarrow (n + 3)(n + 5) = 8 \times 10$
$\therefore$ Identificando: $n = 5$

55. Sabiendo que: 12×30^n tiene el doble de la cantidad de divisores de $12^n \times 30$. Hallar el valor de "n".

Resolución:
- $N_1 = 12 \times 30^n = (2^2 \times 3)(2 \times 3 \times 5)^n$
  $N_1 = 2^2 \times 3^1 \times 2^n \times 3^n \times 5^n$
  $N_1 = 2^{n+2} \times 3^{n+1} \times 5^n$ (DC)
  $\Rightarrow D_{(N_1)} = (n + 2 + 1)(n + 1 + 1)(n + 1)$
  $D_{(N_1)} = (n + 1)(n + 2)(n + 3)$ ...(1)
- $N_2 = 12^n \times 30 = (2^2 \times 3)^n(2 \times 3 \times 5)$
  $N_2 = 2^{2n} \times 3^n \times 2^1 \times 3^1 \times 5^1$
  $N_2 = 2^{2n+1} \times 3^{n+1} \times 5^1$ (DC)
  $\Rightarrow D_{(N_2)} = (2n + 1 + 1)(n + 1 + 1)(1 + 1)$
  $D_{(N_2)} = (2n + 2)(n + 2)(2)$
  $D_{(N_2)} = 2(n + 1)(n + 2)(2)$
  $D_{(N_2)} = 4(n + 1)(n + 2)$ ...(2)
  Dato: $D_{(N_1)} = 2D_{(N_2)}$
  Reemplazando (1) y (2)
  $(n + 1)(n + 2)(n + 3) = 2[4(n + 1)(n + 2)]$
  $n + 3 = 8 \quad \therefore n = 5$

56. Hallar un número primo mayor que 3, tal que su cuadrado, disminuido en la unidad, dividido por 8, da por cociente un número primo.

Resolución:
Sea: N el número primo absoluto, $3 < N$
Dato: $N^2 - 1 \,\underline{|\, 8}$
$\quad 0 \quad (q) \quad \Rightarrow$ N.° primo

División exacta: $N^2 - 1 = 8q$
Por diferencia de cuadrados:
$(N + 1)(N - 1) = (4)(2 \times q)$
Identificando: $N - 1 = 4 \quad \therefore N = 5$

57. ¿Cuántos números positivos de 3 cifras tienen exactamente 3 divisores?

Resolución:

Sea: $N = \overline{abc}$; además: $D_{(N)} = 3$

$\Rightarrow$ N es número cuadrado perfecto

$N = \overline{abc} = k^2$ (k es un número primo)

Se sabe: $100 \leq \overline{abc} < 1000$

Reemplazando: $100 \leq k^2 < 1000$

$10 \leq k < 31{,}6$

$\Rightarrow$ k puede ser: 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31

$\therefore$ Existen 7 números.

58. Si se sabe que la última cifra no nula de 19! es 4, hallar las 5 últimas cifras de 24!

Resolución

Se sabe que:

19! contiene factores 2 y 5 y de ellos depende en cuántos ceros termine.

Se tiene:

$19! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \underline{5} \times ... \times \underline{10} \times ... \times \underline{15} \times ... \times 19$

son los únicos que contienen el factor 5, entonces termina en tres cifras ceros, ya que cada una cifra cero.

Por dato: 19! = ...4000

Sabemos

$24! = 19! \times 20 \times 21 \times 22 \times 23 \times 24$

$24! = \underbrace{(...4000)20}_{} \times \underbrace{21 \times 22 \times 23 \times 24}_{}$

$24! = (...80000) \times (...4)$

$$\begin{array}{r} ...80000 \times \\ ...4 \\ \hline \end{array}$$

24! = ...20 000

$\therefore$ Las 5 últimas cifras son 20 000

59. Al dividir el mayor número de la forma $\overline{bbb}$ (que tiene 12 divisores) entre 5, se obtiene como residuo:

Resolución:

$N = \overline{bbb}$ (máximo)

$N = 111 \times b = 3^1 \times 37^1 \times b$

Dato: $D_{(N)} = 12 = 2 \times 2 \times 3$

$D_{(N)} = (1 + 1)(1 + 1)(2 + 1)$

$N = 3^1 \times 37^1(2^1 \times 3^1) \Rightarrow b = 6$

$N = 2^1 \times 3^2 \times 37^1$ (DC)

N = 666

$\therefore$ Al dividir 666 ÷ 5, el residuo es 1.

60. Si: $a^2 \times b^3$ tiene 65 divisores, ¿cuántos divisores tiene: $a^9 \times b^9$?

Resolución:

- Sea: $N_1 = a^2 \times b^3$

  $D_{(N_1)} = 65 = 5 \times 13 = (4 + 1)(12 + 1)$

  N_1 tiene 2 factores primos cuyos exponentes son: 4 y 12

  Dándole forma: $a = m^2$; $b = n^4$

  $N_1 = (m^2)^2(n^4)^3 = m^4 \times n^{12}$

  m y n son números primos absolutos.

- $N_2 = a^3 \times b^2$

  Reemplazando:

  $N_2 = (m^2)^3(n^4)^2 \Rightarrow N_2 = m^6 \times n^8$

$\therefore D_{(N_2)} = (6 + 1)(8 + 1) = 7 \times 9 = 63$

61. Si el número N tiene $\overline{ab0}$ divisores compuestos, hallar: (a + b + n). Además: $N = 210^{n-1}$

Resolución:

$N = 210^{n-1} = (3 \times 7 \times 2 \times 5)^{n-1}$

$N = 2^{n-1} \times 3^{n-1} \times 5^{n-1} \times 7^{n-1}$ (DC)

$D_{(N)} = (n - 1 + 1)(n - 1 + 1)(n - 1 + 1)(n - 1 + 1)$

$D_{(N)} = n \times n \times n \times n = n^4$

Se sabe: $D_{(N)} = D_{primos} + D_{comp} + 1$

Reemplazando: $n^4 = 4 + \overline{ab0} + 1 \Rightarrow n^4 = \overline{ab5}$

Identificando: $n = 5$; $\overline{ab5} = 625$

a = 6; b = 2

Piden: a + b + n = 6 + 2 + 5 = 13

62. Al multiplicar por 33 al numeral $N = 21 \times 11^n$ se duplica su cantidad de divisores. Hallar: (n + 1).

Resolución:

- $N = 21 \times 11^n = (3 \times 7)(11^n)$

  $N = 3^1 \times 7^1 \times 11^n$

  $D_{(N)} = (1 + 1)(1 + 1)(n + 1)$

  $D_{(N)} = 4(n + 1)$ (DC)

- $N \times 33 = 3 \times 7 \times 11^n \times 3 \times 11$

  $N \times 33 = 3^2 \times 7^1 \times 11^{n+1}$ (DC)

  $D_{(N \times 33)} = (2 + 1)(1 + 1)(n + 1 + 1)$

  $D_{(N \times 33)} = 6(n + 2)$

  Dato: $D_{(N \times 33)} = 2 \times D_{(N)}$

  Reemplazando: $6(n + 2) = 2[4(n + 1)]$

  $3(n + 2) = 4(n + 1) \quad \therefore n = 2$

63. Hallar un número entero de la forma $N = 12 \times 20^a$, sabiendo que tiene 24 divisores más que el número 672 280. Dar como respuesta la suma de las cifras.

Resolución:

$672\,280 = 2^3 \times 5^1 \times 7^5$

$D_{(672\,280)} = (3 + 1)(1 + 1)(5 + 1) = 48$

N posee 24 divisores más

Posee 48 + 24 = 72 divisores

$N = 12 \times 20^a = 2^2 \times 3^1 \times 2^{2a} \times 5^a$

$N = 2^{2a+2} \times 3^1 \times 5^a$

$\Rightarrow D_{(N)} = (2a + 2 + 1)(1 + 1)(a + 1) = 72$

$(2a + 3)(2)(a + 1) = 72 \quad \Rightarrow a = 3$

$\Rightarrow N = 12 \times 20^3 = 96\,000$

Suma de cifras 9 + 6 + 0 + 0 + 0 = 15

64. Si P = 16a + 4b + c, ¿cuántos valores puede tomar P, de tal manera que se convierte en un núme-

ro primo absoluto? siendo a, b y c ∈ $\mathbb{N}$ y menores que 4.

Resolución:

$16a + 4b + c = \overline{abc}_4$

Luego: $P = \overline{abc}_4$ (a; b; c < 4)

$100_4 < \overline{abc}_4 < 1000_4$

$16 < P < 64$ son primos:

P = 17; 19; 23; 27; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61

Son: 12 números

65. Indicar la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:

I. Existen 8 parejas de números primos entre sí, cuyos productos es 1260.

II. La suma de todos los divisores enteros de un número entero no nulo es cero.

III. Existen 48 números entre, 1425 y 1500 que son PESI con 75.

Resolución:

I. $1260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

Haciendo: $a = 2^2$; $b = 3^2$; $c = 5$; $d = 7$

⇒ a, b, c y d son primos entre sí

$1260 = a^1 \times b^1 \times c^1 \times d^1$

Cantidad de productos en que se descompone 1260 (2; 3; ... etc. factores):

$D_{(1260)} = (1 + 1)(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 16$

1 $\frac{16}{2} = 8$ ...(Verdadero)

II. En los enteros: si (a) divide a N (−a) también divide a N.

$\Sigma a + \Sigma(-a) = \Sigma a - \Sigma a = 0$ ...(Verdadero)

III. Como $75 = 3 \times 5^2$

$\overset{\circ}{3}$: {1428; 1431; ...; 1497} (24 números)

$\overset{\circ}{5}$: {1430; 1435; ...; 1495} (14 números)

$\overset{\circ}{15}$: {1440; 1455; ...; 1485} (4 números)

Son: $\overset{\circ}{3} \vee \overset{\circ}{5}$: 24 + 14 − 4 = 34 números

De 1426 a 1499 hay 74 números

Existen 74 − 34 = 40 números

PESÍ con 75 ...(Falso)

∴ VVF

66. El número positivo N tiene 36 divisores y si N se divide entre 8; 9; 11 y 49, los residuos son 4; 3; 0 y 21, respectivamente. ¿Cuál es el residuo que se obtiene al dividir N entre 13?

Resolución:

$N = \overset{\circ}{8} + 4 = \overset{\circ}{4}$

N es múltiplo de 4 pero no de 8

⇒ $N = (2^2 \times ...)$ ...(1)

- $N = \overset{\circ}{9} + 3 = \overset{\circ}{3}$, similar

  ⇒ $N = (3 \times ...)$ ...(2)

- $N = \overset{\circ}{11} + 0 \Rightarrow N = \overset{\circ}{11}$

  ⇒ $N = (11^k \times ...)$ ...(3)

- $N = \overset{\circ}{49} + 21 = \overset{\circ}{7}$ (no de 49)

  ⇒ $N = (7 \times ...)$ ...(4)

  De (1), (2), (3) y (4):

  $N = 2^2 \times 3^1 \times 7^1 \times 11^k$

  $D_{(N)} = (2 + 1)(1 + 1)(1 + 1)(k + 1) = 36$

  Resolviendo: k = 2

  $N = 2^2 \times 3 \times 7 \times 11^2 = 10\,164$

- Dividiendo N entre 13:

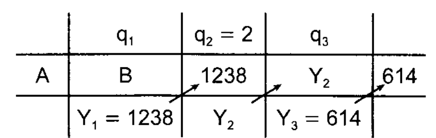
  10164 |13
  11 781 ∴ Residuo = 11

67. En el proceso de hallar el máximo común divisor de dos números positivos mediante el algoritmo de Euclides, se obtiene como primer y tercer residuos 1238 y 614, respectivamente. Si el segundo cociente es 2, hallar la suma de las cifras del menor de los números.

Resolución:

Sean los números A y B:

(A > B) del algoritmo de Euclides tenemos:



	q_1	$q_2 = 2$	q_3	
A	B	1238	Y_2	614
	$Y_1 = 1238$	Y_2	$Y_3 = 614$	

Se sabe que:

	q	
D	d	
	r	

⇒ $D = d \times q + r$, donde (r < d)

Luego: $1238 = q_3 \times y_2 + 614$

Observación: $y_2 > 614$

⇒ $q_3 \times y_2 = 624$

↓ ↓

1 624

Finalmente: $B = 1238 \times 2 + 624 \Rightarrow B = 3100$

∴ La suma de cifras de 3100 es 4.

68. Si la suma de los divisores de $N = 16 \times 7^k$ es 1767, hallar la suma de las cifras de N.

Resolución:

$N = 2^4 \times 7^k$

Suma de divisores de N:

$$S_{(N)} = \left(\frac{2^5 - 1}{2 - 1}\right)\left(\frac{7^{k+1} - 1}{7 - 1}\right) = 1767$$

$$\Rightarrow \frac{7^{k+1} - 1}{7 - 1} = 57 = 1 + 7 + 7^2 = \frac{7^3 - 1}{7 - 1}$$

De donde: $k = 2 \Rightarrow N = 2^4 \times 7^2 = 784$

∴ Suma de cifras = 19

69. Calcular la suma de las cifras del menor número mayor que 10^5 que tiene 21 divisores, de los cuales 19 admiten más de 2 divisores.

Resolución:

19 divisores no son primos (admiten más de 2 divisores)

1 divisor posee un solo divisor.

Luego: solo tiene 1 divisor primo

$N = a^{20} \Rightarrow$ 21 divisiones; 1 Divisor primo: a

$a = 2 \Rightarrow 2^{20} = 1\,048\,576 > 10^6$

$\therefore$ Suma de cifras: $1 + 0 + 4 + 8 + 5 + 7 + 6 = 31$

70. El número $\overline{ac0d}$ tiene 8 divisores entre los cuales están los números $\overline{ab}$, $\overline{ba}$ y b, los cuales a su vez tienen 2 divisores. Calcule a + b + c + d.

Resolución:

Si el número tiene 8 divisiones:

$8 = (1 + 1)(1 + 1)(1 + 1)$

Admite 3 divisiones primos que son: $\underbrace{\overline{ab};\ \overline{ba};\ b}$

Primos absoluto (poseen 2 divisiones)

Como $\overline{ab}$ y $\overline{ba}$ son primos:

$\overline{ab}$: 13; 17; 37
$\overline{ba}$: 31; 71; 73 $\Rightarrow$ Como b es primo: $b \neq 1$

Posibles soluciones:

$13 \times 31 \times 3 = 1209$ ✓

$17 \times 71 \times 7 = 8449$ ✗

$37 \times 73 \times 3 = 8103$ ✗

$37 \times 73 \times 7 = 18\,907$ ✗

$\Rightarrow a = 1;\ b = 3;\ c = 2;\ d = 9$

$\therefore a + b + c + d = 15$

71. El número $N = 3^b \times 5^a$ tiene 3 divisores más que el número $M = 2^a \times 5^3$. Hallar la suma de los divisores de M.

Resolución:

$D_{(N)} = (b + 1)(a + 1)$

$D_{(M)} = (a + 1)(3 + 1) = 4(a + 1)$

$D_{(N)} = 3 + D_{(M)}$

$(b + 1)(a + 1) = 3 + 4(a + 1)$

$(b + 1 - 4)(a + 1) = 3$

$\underbrace{(b - 3)}_{1}\underbrace{(a + 1)}_{3} = 3 \Rightarrow b = 4;\ a = 2 \Rightarrow M = 2^2 \times 5^3$

$$\therefore S_{(M)} = \frac{2^{2+1}-1}{2-1} \times \frac{5^{3+1}-1}{5-1} = 1092$$

72. ¿Cuántos divisores de 34 012 224 son múltiplos de 3888?

Resolución:

$N = 34\,012\,224 = 2^6 \times 3^{12}$

Como $3888 = 2^4 \times 3^5$

$\Rightarrow N = (2^4 \times 3^5)(2^2 \times 3^7)$

$\therefore D_{\overset{\circ}{3888}(N)} = (2 + 1)(7 + 1) = 24$ divisores

73. Si "N" representa el número por el cual se debe multiplicar a la suma de los términos de la fracción continua originada por 2061/900 para que resulte el mayor número cuadrado perfecto de 4 cifras. Calcular N.

Resolución:

Sea $F = \frac{2061}{900} = \frac{229}{100}$

Hallemos la fracción continua simple que se origina mediante el algoritmo de Euclides:

	2	3	2	4	3
229	100	29	13	3	① → MCD
	29	13	3	1	

$F = \frac{229}{100} = \underbrace{(2; 3; 2; 4; 3)}_{\text{términos}}$

$N(2 + 3 + 2 + 4 + 3)$ = cuadrado perfecto de 4 cifras.

$N \times 2 \times 7$ = cuadrado $\leq 10^4$

↓

$2 \times 7 \times p^2 \times 2 \times 7 \leq 10^4$

$2 \times 7 \times p \leq 10^2 \Rightarrow p = 7$

$\therefore N = 2 \times 7 \times 7^2 = 686$

74. Sabiendo que $(\overline{ba})^n(\overline{ab})^m$ posee 63 divisores PESÍ con $\overline{abb5}$, donde este es un cuadrado perfecto. Calcular la suma de los valores de m + n + a + b, si: $a + b < 6$ y $m < n$.

Resolución:

$\overline{abb5} = k^2$

Como termina en 5 y es k^2 perfecto:

$b = 2 \Rightarrow \overline{ab} = \overline{a2} = p(p + 1);\ a + b < 6$ (Dato)

12 ✓

42 ✗

72 ✗

Además: $(\overline{ba})^n(\overline{ab})^m$ tiene 63 divisores PESÍ con:

$\overline{abb5} = 35^2 \times 5^2 \times 7^2$

$\Rightarrow 21^n \times 12^m = 2^{2m} \times 3^{m+n} \times 7^n$

Simplificando se tiene:

$(2m + 1)(m + n + 1) = 63;\ m < n$

1 1 19

3 3 5

Luego: a + b + m + n pueden ser:

$1 + 2 + 1 + 19 = 23 \vee 1 + 2 + 3 + 5 = 11$

$\therefore 23 + 11 = 34$

75. Un número divisible por 15 que tiene 6 divisores cumple que la media aritmética de sus divisores es $20\frac{2}{3}$. ¿Cuál es la suma de las cifras del complemento aritmético del número?

Resolución:

Sea N un número que es divisible por 15:

$D_{(N)} = 6 = 2 \times 3 = (1 + 1)(2 + 1)$

$N = A^1 \times B^2$ (DC)

Dato: $N = \overset{\circ}{15} \Rightarrow \overset{\circ}{3} \vee \overset{\circ}{5}$

La media aritmética de los divisores de N:

$N = 20\frac{2}{3} = \frac{62}{3}$

$\overline{MA} = \frac{SD_{(N)}}{D_{(N)}} = \frac{SD_{(N)}}{6} = \frac{62}{3}$

$SD_{(N)} = 124 = 4 \times 31$

$\quad\quad\quad\downarrow \quad \downarrow$

$(1+3)(1+5+5^2)$

$\Rightarrow N = 3^1 \times 5^2 \Rightarrow N = 75;\ CA(75) = 25$

$\therefore$ Suma de cifras del CA(75) = 2 + 5 = 7

76. Un número natural N admite 2 factores primos que son a la vez 2 números consecutivos. Si N posee 5 divisores impares y 15 divisores $\overset{\circ}{18}$, hallar la suma de sus cifras.

Resolución:

Se tienen 2 números primos consecutivos:

(n) y (n+1)

$\downarrow \quad \downarrow$

(2) (3) $\Rightarrow N = 2^a \times 3^b$ (DC)

Dato: $D_{(impares)} = 5$

(1; 3; 9; 27; 81)

$\downarrow$

$(3^4) \Rightarrow b = 4$

Reemplazando:

$N = 2^a \times 3^4$ (DC)

Dato: $D_{(\overset{\circ}{18})} = 15;\ 18 = 2^1 \times 3^2$

$N = 2 \times 3^2(2^{a-1} \times 3^2)$

$D_{(\overset{\circ}{18})} = (a - 1 + 1)(2 + 1) = 3a$

Dato: $3a = 15 \Rightarrow a = 5$

$\Rightarrow N = 2^5 \times 3^4 = 2592$

$\therefore$ Suma de cifras de: N = 2 + 5 + 9 + 2 = 18

77. Hallar el valor de "a", si se sabe que el número $N = 189^a$ tiene 133 divisores.

Resolución:

Se tiene el número $N = 189^a$, buscando su descomposición canónica:

$N = (3^3 \times 7)^a = 3^{3a} \times 7^a$ (DC)

$\Rightarrow D_{(N)} = (3a + 1)(a + 1)$

Dato: $D_{(N)} = 133$

Igualando: $(3a + 1)(a + 1) = 19 \times 7$

Por identificación de factores:

$\therefore a + 1 = 7 \Rightarrow a = 6$

78. El número A tiene 21 divisores y el número B tiene 10 divisores. Si el máximo común divisor de A y B es 18, hallar A + B.

Resolución:

Como el MCD(A; B) es 18 (es decir 2×3^2) entonces los números A y B tienen al menos dos factores primos.

Sabemos: $D_{(A)} = 21 = 3 \times 7 = (2 + 1)(6 + 1)$

A posee dos factores primos con exponentes 2 y 6.

$D_{(B)} = 10 = 2 \times 5 = (1 + 1)(4 + 1)$

B posee dos factores primos con exponentes 1 y 4.

Además: $A = MCD \times p$

$B = MCD \times q$ (p y q son PESI)

Luego: $A = 2 \times 3^2(2^5) \Rightarrow A = 576$

$B = 2 \times 3^2(3^2) \Rightarrow B = 162$

$\therefore A + B = 738$

79. Si: $P = 10 \times 20 \times 30 \times ... \times 100$, tiene n divisores, ¿cuántos tiene: $Q = 5 \times 10 \times 15 \times ... \times 50$?

Resolución:

Se tiene: $P = 10 \times 20 \times 30 \times ... \times 100$

$Q = 5 \times 10 \times 15 \times ... \times 50$

Se tiene:

- $P = (2 \times 5)(2 \times 10)(2 \times 15) \times ... \times (2 \times 50)$

  $P = 2^{10} \times \underbrace{5 \times 10 \times 15 ... \times 50}_{2^a \times 3^b \times ...}$ (DC)

  Cálculo de a: $10 \times 20 \times 30 \times 40 \times 50 = 1 \times (2) \times 3 \times (4) \times 5 \times (10^5)$

  Donde: $2^1 \times 2^2 \times 2^5 = 2^8 \Rightarrow a = 8$

  $P = 2^{10} \times 2^8 \times 3^b \times ... = 2^{18} \times 3^b \times ...$

  $D_{(P)} = (18 + 1)(b + 1) \times ... = n$

  $(b + 1) \times ... = \frac{n}{19}$ ...(1)

- $Q = 5 \times 10 \times 15 \times ... \times 50 = 2^8 \times 3^b \times ....$

  $D_{(Q)} = (8 + 1)(b + 1) \times ....$

  Reemplazando (1):

  $\therefore D_{(Q)} = 9\left(\frac{n}{19}\right)$

80. Hallar el menor número que posea 31 divisores compuestos y 4 primos.

Resolución:

Sea N el menor número: $D_{(primos)} = 4;\ D_{(comp.)} = 31$

Se sabe: $D_{(N)} = D_p + D_c + 1$

$D_{(N)} = 4 + 31 + 1 = 36$

$D_{(N)} \begin{cases} 2 \times 18 = (1 + 1)(17 + 1) \\ 3 \times 12 = (2 + 1)(11 + 1) \\ 4 \times 9 = (3 + 1)(8 + 1) \\ 6 \times 6 = (5 + 1)(5 + 1) \end{cases}$

$N \begin{cases} A^1 \times B^{17} = 3 \times 2^{17} & ✗ \\ A^2 \times B^{11} = 3^2 \times 2^{11} & ✗ \\ A^3 \times B^8 = 3^3 \times 2^8 = 6912 & ✓ \\ A^5 \times B^5 = 2^5 \times 3^5 = 7776 & ✗ \end{cases}$

$\therefore N = 6912$

81. Si se tiene el número $2^a \times 5 \times 7$, cuya suma de sus divisores es 720, hallar "a".

Resolución:

Se tiene: $N = 2^a \times 5^1 \times 7^1$

Dato: $S_{(N)} = 720$

Se sabe:

$$S_{(N)} = \left[\frac{(2^{a+1}-1)}{2-1}\right]\left[\frac{(5^2-1)}{5-1}\right]\left[\frac{(7^2-1)}{7-1}\right]$$

$S_{(N)} = (2^{a+1} - 1) \times 6 \times 8 = 720 \Rightarrow 2^{a+1} - 1 = 15$

$2^{\textcircled{a+1}} = 16 = 2^{\textcircled{4}} \Rightarrow a + 1 = 4 \quad \therefore a = 3$

81. Si el número $N = 4^4 \times n^n$ tiene 54 divisores y "n" es un número primo, ¿en cuántos ceros terminará N?

Resolución:

Se tiene el número: $N = 4^4 \times n^n = (2^2)^4 \times n^n$

$N = 2^8 \times n^n$ (DC)

n: número primo

$D_{(N)} = (8 + 1)(n + 1) = 54 = 9 \times 6$

$\Rightarrow n + 1 = 6 \Rightarrow n = 5$

$\Rightarrow N = 2^8 \times 5^5\, 2^3 \times 10^5 = 800\,000$

$\therefore$ N terminará en 5 ceros.

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2003 - I)

La cantidad de cifras de los números A, B y C son números consecutivos. Si el producto A^4; B^3 y C^2 tiene por lo menos 125 cifras, hallar la cantidad máxima de cifras que puede tener dicho producto.

A) 130 B) 131 C) 132
D) 133 E) 134

Resolución:

Del problema:

$10^{n-1} \leq A < 10^n$; $10^n \leq B < 10^{n+1}$; $10^{n+1} \leq C < 10^{n+2}$

Luego:

$$10^{4n-4} \leq A^4 < 10^{4n}$$
$$10^{3n} \leq B^3 < 10^{3n+3}$$
$$10^{2n+2} \leq C^2 < 10^{2n+4}$$

Multiplicando: $10^{9n-2} \leq A^4B^3C^2 < 10^{9n+7}$

Cantidad mínima de cifras:

$(9n - 2) + 1 = 125 \Rightarrow n = 14$

$\therefore$ Cantidad máxima de cifras: $9(14) + 7 = 133$

Clave: D

PROBLEMA 2 (UNI 2005 - I)

Si p, q, r son números primos, diferentes entre sí, tales que: $20 < p + q < 30$; $20 < r + s < 30$; $p^2 + q^2 = r^2 + s^2$, hallar la suma p + q + r + s.

A) 50 B) 54 C) 58
D) 62 E) 66

Resolución:

p, q, r y s son números primos diferentes:

$p^2 + q^2 = r^2 + s^2$

Si asumimos que p o q es 2, entonces $(p^2 + q^2)$ es impar.

Luego $(r^2 + s^2)$ es impar, por tanto, r o s debe ser par; contradice la condición (diferentes).

Luego, p, q, r y s son números primeros impares:

3; 5; 7;11; 13; 17; 19; 23

Entonces (p + q) y (r + s) son pares.

Pero por dato:

$20 < p + q < 30 \Rightarrow p^2 + q^2$

$p+q$	p	q	p^2+q^2
24	7	17	338
	5	19	386
	11	13	290
26	3	13	538
	7	19	410
28	5	23	554
	11	17	410

Los números primos son: 7; 19 y 11; 17

$\therefore p + q + r + s = 54$

Clave: B

PROBLEMA 3 (UNI 2006 - II)

Sean $\overline{aa}$, $\overline{bc}$ y $\overline{(b+1)(c-2)}$ tres números primos, tales que el primero divide a la suma de los otros dos. Si r_1 y r_2 son los restós de dividir el segundo entre le primero y el tercero entre el primero, respectivamente, entonces $r_1 - r_2$ es igual a:

A) 8 B) 3 C) 1
D) −3 E) −8

Resolución:

Con los datos del enunciado del problema: $\overline{aa} = 11$

Sabemos por teoría, que el único número primo de dos dígitos iguales es el 11; entonces podemos afirmar:

$1 \leq b \leq 9 \quad \wedge \quad 1 \leq b + 1 \leq 9$

$0 \leq b \leq 8$

$\Rightarrow 1 \leq b \leq 8 \quad ...(\alpha)$

Dado los números primos $\overline{bc}$ y $\overline{(b+1)(c-2)}$, por propiedad sus cifras deben ser menores que la base 10; entonces:

$0 \leq c \leq 9 \quad \wedge \quad 0 \leq c - 2 \leq 9$

$2 \leq c \leq 11$

$\Rightarrow 2 \leq c \leq 9 \quad ...(\beta)$

Luego, por condiciones del problema, sabemos también que el primer número primo $\overline{aa} = 11$ va a dividir a la suma de los otros dos números primos en forma exacta:

$$n=\frac{\overline{bc}+\overline{(b+1)(c-2)}}{11}=\frac{(10b+c)+10(b+1)+(c-2)}{11}$$

$$n=\frac{2(10b+c+4)}{11} \quad ...(\gamma)$$

Ahora, 10b + c + 4 debe ser múltiplo de 11 para que (γ) sea un número natural, es decir:

$10b + c + 4 = \overset{\circ}{11} \Rightarrow (11b - b) + c + 4 = \overset{\circ}{11}$

$\Rightarrow c - b + 4 = \overset{\circ}{11}$

Luego de (α) y (β):

$(9) - (2) + 4 = \overset{\circ}{11} \Rightarrow c = 9 \wedge b = 2$

Finalmente los tres números naturales son:

$\overline{aa} = 11; \overline{bc} = 29; \overline{(b+1)(c-2)} = 37$

Obtenemos los residuos al dividir el segundo y tercer número entre el primero:

$$29 \,\underline{|\,11} \quad 37\,\underline{|\,11}$$
$$\underbrace{7}_{r_1}\;\; 2 \qquad \underbrace{4}_{r_2}\;\; 4$$

$\therefore r_1 - r_2 = 7 - 4 = 3$

Clave: B

PROBLEMA 4 (UNI 2007 - I)

¿Cuántos divisores primos tiene 130 130?

A) 3　B) 4　C) 5
D) 6　E) 7

Resolución:

Descomponemos polinómicamente:

$130\,130 = 2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13^2$

$\therefore$ Divisores primos: 2; 5; 7; 11 y 13 (5 números).

Clave: C

PROBLEMA 5 (UNI 2008 - I)

Si N^2 tiene 63 divisores y N^3 tiene 130 divisores; ¿cuántos divisores tiene N^4? Calcule la suma de las cifras de esta cantidad.

A) 4　B) 5　C) 6
D) 7　E) 8

Resolución:

$D_{(N^3)} = \underbrace{130}_{10\times 13} \Rightarrow N^3 = p^9 \times q^{12}$

$D_{(N^2)} = \underbrace{63}_{7\times 9} \Rightarrow N^2 = p^6 \times q^8$

Se concluye: $N = p^3 \times q^4 \Rightarrow N^4 = p^{12} \times q^{16}$

$\therefore D_{(N^4)} = 13 \times 17 = 221 \Rightarrow 2 + 2 + 1 = 5$

Clave: B

PROBLEMA 6 (UNI 2010 - I)

Sean los números: $N_1 = 6^{3a+1} \times 8^a \wedge N_2 = 8^a \times 3^{a+1}$ donde la cantidad de los divisores de N_1 es igual a la cantidad de los divisores de N_2 aumentado en 20, entonces el valor de 2a − 1 es:

A) 1　B) 3　C) 5
D) 7　E) 9

Resolución

$N_1 = 6^{3a+1} \times 8^a \wedge N_2 = 8^a \times 3^{3a+1}$

Donde: $N_1 = 2^{6a+1} \times 3^{3a+1} \wedge N_2 = 2^{3a} \times 3^{3a+1}$

Por condición del problema:

$D_{(N_1)} = D_{(N_2)} + 20$

$(6a + 2)(3a + 2) = (3a + 1)(3a + 2) + 20$

$\Rightarrow 2(3a + 1)(3a + 2) = (3a + 1)(3a + 2) + 20$

$\Rightarrow (3a + 1)(3a + 2) = 20$

Luego: $9a^2 + 9a - 18 = 0 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0$

$\Rightarrow a = 1$ (cumple) $\vee$ $a = -2$ (no cumple) $\Rightarrow a = 1$

$\therefore$ Nos piden: $2a - 1 = 2(1) - 1 = 1$

Clave: A

PROBLEMA 7 (UNI 2011 - I)

Si el número N que se factoriza como $N = 51(117^n)$, tiene la tercera parte del número de divisores de 311 040, determine el valor de "n".

A) 1　B) 2　C) 3　D) 4　E) 5

Resolución:

$311\,040 = 2^8 \times 3^5 \times 5^1$

$D_{(311\,040)} = (8 + 1)(5 + 1)(1 + 1) = 108$

Si: $N = 51(117)^n \Rightarrow N = 17^1 \times 13^n \times 3^{2n+1}$

Por dato: $D_{(N)} = 2(n + 1)(2n + 2) = 108/3 = 36$

$\therefore n = 2$

Clave: B

PROBLEMA 8 (UNI 2011 - II)

El número $N = 3^b \times 5^a$ (con $a \geq 1$) tiene tres divisores más que $M = 2^a \times 5^3$. Determine la suma de las inversas de los divisores de M.

A) 1,564　B) 1,852　C) 2,184
D) 1,248　E) 1,884

Resolución:

$N = 3^b \times 5^a \Rightarrow D_{(N)} = (b + 1)(a + 1)$

$M = 2^a \times 5^3 \Rightarrow D_{(M)} = (a + 1)(3 + 1)$

$\Rightarrow D_{(N)} - D_{(M)} = 3$

$(b + 1)(a + 1) - 4(a + 1) = 3$

$(a + 1)(b - 3) = 3 \times 1 \Rightarrow a = 2 \wedge b = 4$

$M = 2^2 \times 5^3 \Rightarrow I_{(M)} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125}\right)$

$\therefore I_{(M)} = \frac{7 \times 156}{4 \times 125} = \frac{1092}{500} = 2,184$

Clave: C

PROBLEMA 9 (UNI 2012 - II)

Se tiene un número de 3 cifras, múltiplo de 30, que tiene un total de 24 divisores. Al multiplicarlo por 10 se forma un nuevo número cuya cantidad de divisores es 15/8 de la cantidad de divisores del número original.

Calcule la suma de las cifras del menor número que cumple las condiciones indicadas.

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

Resolución:

Como: $\overline{abc} = \overset{\circ}{30} \Rightarrow \overline{abc} = 2^{\alpha} \times 3^{\beta} \times 5^{\gamma}$

$(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) = 24$

Del dato: $10 \times \overline{abc} = 2^{\alpha+1} \times 3^{\beta} \times 5^{\gamma+1}$

$(\alpha + 2)(\beta + 1)(\gamma + 2) = \frac{15}{8}(24) = 45$

Como: $24 = 2 \times 3 \times 4 \wedge 45 = 3 \times 3 \times 5$

Entonces los exponentes son: $\{1; \beta = 2; 3\}$

Posibles números:

$\Rightarrow \overline{abc} = 2^1 \times 3^2 \times 5^3 = 2250$

$\overline{abc} = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 360$ (menor)

$\therefore$ Suma de cifras $= 3 + 6 + 0 = 9$

Clave: B

PROBLEMA 10 (UNI 2013 - II)

Considere el mayor de los números N cuya descomposición en sus factores primos de una cifra es $2^a \times 5^3 \times m^u \times 3^r$, sabiendo que cuando se divide por 40 se obtiene otro número de 54 divisores y además $a + u + r < 9$. Calcule la suma de sus cifras.

A) 9 B) 10 C) 12
D) 15 E) 18

Resolución:

$N = 2^a \times 5^3 \times m^u \times 3^r$ ... (DC)

$m \rightarrow ⑦$

$\frac{N}{40} = 2^{a-3} \times 5^2 \times 7^u \times 3^r$ ...(DC)

Cantidad de divisores:

$(a - 2)(2 + 1)(u + 1)(r + 1) = 54$

$(a - 2)(u + 1)(r + 1) = 18$

	a	u	r
$2 \times 3 \times 3$	4	2	2
$3 \times 2 \times 3$	5	1	2
$3 \times 3 \times 2$	5	2	1

} $a + u + r < 9$

$1 \times 3 \times 6$	3	2	5
$1 \times 6 \times 3$	3	5	2
$1 \times 9 \times 2$	3	8	1
$1 \times 2 \times 9$	3	1	8

Elegimos: $(a; u; r) = (4; 2; 2)$

Para que el número sea máximo:

$N = 2^4 \times 5^3 \times 7^2 \times 3^2 = 882\,000$

$\therefore \Sigma$ cifras $(N) = 8 + 8 + 2 = 18$

Clave: E

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Si $N = 15 \times 30^n$, tiene 294 divisores, hallar "n".

A) 3 B) 4 C) 5 D) 7 E) 8

2. Sabiendo que $A = 12 \times 30^n$ tiene el doble de la cantidad de divisores que: $B = 12^n \times 30$, hallar "n".

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

3. Si: 16^n tiene "p" divisores, ¿cuántos divisores tendrá 256^n?

A) 4p + 1 B) 4p − 1 C) 2p + 1
D) 2p − 1 E) 8p

4. Si: $E = 10^1 \times 10^2 \times 10^3 \times ... \times 10^n$ tiene 2116 divisores, hallar el valor de "2n".

A) 8 B) 12 C) 16
D) 18 E) 20

5. Si: $N = 30^n \times 15$ tiene 144 divisores múltiplos de 2, hallar "n^2".

A) 1 B) 4 C) 9
D) 16 E) 25

6. Si: $M = 2 \times 3^n \times 7^m$ tiene 140 divisores divisibles por 9 y 30 divisores que son pares, hallar "$m \times n$".

A) 12 B) 16 C) 18
D) 20 E) 24

7. Cuántos divisores debe tener $M = 6^n \times 3^4$, para que su raíz cuadrada tenga 8 divisores.

A) 12 B) 9 C) 27
D) 21 E) 15

8. ¿Cuántos de los divisores del número $14^4 \times 625 \times 11^3$ son cuadrados perfectos?

A) 27 B) 36 C) 54
D) 18 E) 81

9. Si el número: $M = 3 \times 45^n$ tiene 207 divisores múltiplos de 3 más que el número $P = 45 \times 3^n$, determinar la suma de los divisores del número "n".

A) 6 B) 9 C) 12
D) 15 E) 18

10. Si el número: $2^7 \times 3^{a+2} \times 7^a \times 11$ tiene 24 divisores primos con 440, hallar el valor de "a".

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

11. ¿Cuántos de los divisores de 10 080 son divisibles por 12 pero no por 7?

A) 16 B) 32 C) 8
D) 20 E) N. A.

12. Encontrar un número que contiene en su descomposición canónica a los divisores primos 2; 3 y 7; si al ser multiplicado por 6 o por 9 queda duplicada su cantidad de divisores. Dar la suma de cifras del número y, si se divide por 21 su número de divisores queda reducido a la tercera parte.

A) 18 B) 15 C) 21
D) 24 E) N. A.

13. Si A tiene 21 divisores, B tiene 25 divisores y $A \times B$ tienen 165 divisores, ¿cuántos divisores tendrá $A \times B^2$?

A) 405 B) 810 C) 135
D) 270 E) N. A.

14. Hallar "n", sabiendo que: $E = 180 \times 12^n \times 45^2$ tiene 88 divisores múltiplos de 8 pero no de 5.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 2

15. ¿Cuántas veces hay que multiplicar por 30 al número 360 para que el número resultante tenga 336 divisores?

A) 3 B) 6 C) 5
D) 4 E) N. A.

16. Hallar un número de la forma $N = 2^\alpha \times 7^\beta$, sabiendo que si se multiplica por 35 y 80, su número de divisores queda triplicado y cuadruplicado respectivamente. Dar como respuesta $\alpha + \beta$.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) N. A.

17. Si: $M = 36 \times 36 \times 36 \times ... \times 36$ ("n" factores), hallar "n" para que M tenga 169 divisores.

A) 4 B) 7 C) 6
D) 5 E) 8

18. ¿Cuántos ceros se debe poner a la derecha de 44_6 para que el resultado tenga 198 divisores?

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

19. El número: $4^{k-1} \times 6^{k+1} \times 7^{2k}$ posee 70 divisores que son $\overset{\circ}{2}$, pero no $\overset{\circ}{8}$. ¿Cuántos de sus divisores son $\overset{\circ}{21}$?

A) 256 B) 221 C) 216
D) 208 E) 244

20. Si: $4^a \times 3^b$ tiene $\overline{aa}$ divisores, ¿cuántos divisores tiene $\overline{abba}$?

A) 18 B) 9 C) 21
D) 36 E) 45

21. Sea: $N = (a - b)^3(\overline{ab})(\overline{ba})$, donde $(a - b)$; $\overline{ab}$ y $\overline{ba}$ son primos absolutos. Encontrar el número de valores que adopta N.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) Más de 4

22. ¿Cuántos divisores múltiplos de 3, pero no de 7 ni de 5 tiene el número 126 000?

A) 80 B) 40 C) 60
D) 10 E) 30

23. ¿Cuántos divisores pares de 540 000 son $\overset{\circ}{9}$, pero no $\overset{\circ}{125}$?

A) 30 B) 42 C) 36
D) 28 E) 40

24. Si: $T = 7^a + 7^{a+1} + 7^{a+2} + 7^{a+3}$, tiene 135 divisores, ¿cuántos divisores tiene $(a + 1)^{a-1}$?

A) 20 B) 12 C) 15
D) 17 E) 18

25. Si: $N = 2^x \times 3^y \times 5^z$ tiene 30 divisores, ¿cuántos divisores de N son impares, si N toma su máximo valor?

A) 10 B) 12 C) 18
D) 15 E) 20

26. Si a un número entero se le divide por 49, su número de divisores disminuye en 36. ¿Cómo varía el número de divisores si se multiplica por 343?

A) 20 B) 40 C) 54
D) 48 E) 60

27. Si: $N = 2 \times 3^a \times 7^b$, tiene 40 divisores $\overset{\circ}{9}$ y 30 divisores pares, hallar: $a^2 + b^2$.

A) 9 B) 81 C) 41
D) 31 E) 21

28. Hallar el número de divisores de "n", sabiendo que: $E = 13^{n+1} \times 6^n$ tiene 146 divisores compuestos.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 6 E) N. A.

29. Hallar un número par de 3 cifras que cumpla: "La suma de sus cifras es 18 y tiene 21 divisores". Dar como respuesta la cifra de mayor orden del número.

A) 9 B) 7 C) 8
D) 5 E) N. A.

30. Hallar un número de 6 cifras que tenga 60 divisores y que dividido por 16 deja como residuo 8 y dividido entre 27 deja residuo 18.

A) 172 872 B) 170 072 C) 177 200
D) 721 700 E) 720 017

31. Hallar: $a \times b \times c$, si: $a - 1 = b - c$ y $\overline{abc}$ tiene 14 divisores.

A) 24 B) 0 C) 35
D) 36 E) 48

32. Si: $p = 26 \times 27 \times 28 \times \ldots \times 48$, tiene 5n divisores, ¿cuántos divisores tiene 32p?

A) 2n B) 8n C) 6n
D) 10n E) N. A.

33. Si el número: $B = 17^{a+2} - 17^a$, tiene 105 divisores que no son primos, calcular el valor de a^2.

A) 25 B) 36 C) 49
D) 16 E) 64

34. Si el número: $A = 48^a \times 75$, tiene 150 divisores múltiplos de 60, hallar la cantidad de divisores de $B = 48 \times 25^a \times 3^a$.

A) 270 B) 160 C) 320
D) 135 E) 180

35. Calcular el producto de los divisores de 240 que sean múltiplos de 3 y dar la cantidad de divisores de dicho producto.

A) 1386 B) 1516 C) 1486
D) 1286 E) 3226

36. ¿Cuántos divisores de 960 000 tienen raíz cúbica exacta?

A) 12 B) 10 C) 7
D) 9 E) 8

37. La suma de los divisores de $M = 2 \times 400^a$ es 129 veces la suma de los divisores de $N = 100^a$. Hallar el valor de "a".

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

38. Calcular la suma de los divisores de 23 760 que sean divisibles por 18, pero no por 8?

A) 7776 B) 15 552 C) 31 104
D) 23 328 E) N. A.

39. Un número tiene 15 divisores, la suma de los cuales es 961. ¿Cuántos de ellos terminan en 5?

A) 8 B) 6 C) 4
D) 2 E) 3

40. Un número entero admite dos factores primos únicamente; tiene 9 divisores y la suma de estos es 1767. Calcular la suma de las cifras del numeral.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 10 E) 11

41. ¿Cuál es el exponente de 7 en la descomposición canónica de 300!?

A) 42 B) 48 C) 56
D) 63 E) 36

42. ¿Cuál es la mayor potencia de 12 en 400!?

A) 196 B) 197 C) 397
d) 396 E) 297

43. ¿Cuál es el menor número de veces que se debe de multiplicar a 100! por 3, para que sea divisible por 3^{100}?

A) 42 B) 52 C) 62
D) 89 E) 92

44. ¿Cuál es la mayor potencia de 11 que divide a 1000!?

A) 11^{90} B) 11^{92} C) 11^{98}
D) 11^{99} E) 11^{95}

45. ¿Cuántas veces está contenido el factor primo 2 en $2^n!$?

A) 2^{n-1} B) $2^n - 1$ C) 2^n
D) $2n^{-1}$ E) 2^{n+1}

46. Cuál es el valor de la cifra "a" del numeral $\overline{abcd}$, si sabemos que tiene 8 divisores y que:
$a + c = b + d = 12$

A) 3 B) 7 C) 6
D) 5 E) 4

47. Hallar el valor de "m", si el siguiente numeral: $N = 2^{13} \times 21^m \times 7$, tiene 396 divisores que no son 28.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 9 E) 8

48. ¿Cuántos rectángulos cuyas dimensiones están expresadas por un número entero de decímetros tienen una superficie de un metro cuadrado?

A) 5 B) 4 C) 10
D) 3 E) 2

49. Hallar "k", sabiendo que la suma de todos los divisores compuestos del número $N = 6^k \times 15$ es 10 879.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

50. Hallar el número $\overline{abcd}$, sabiendo que tiene 8 divisores cuya suma es 5280, que sus factores primos son: a, m, $\overline{ca}$ y que $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ son números primos absolutos.

A) 3179 B) 3731 C) 2979
D) 3741 E) 4137

51. El número $\overline{aa55}$ tiene 20 divisores. Hallar la suma de sus divisores.

A) 8712 B) 8428 C) 8827
D) 9436 E) N. A.

52. Si tenemos que $10^m \times 25^n$ tiene 33 divisores, hallar m + n.

A) 5 B) 8 C) 4
D) 9 E) 6

53. ¿Cuántos divisores de 30^3 terminan en la cifra **5**?

A) 18 B) 16 C) 14
D) 12 E) 10

54. Cuántos divisores tiene el número:
$T = 15^1 \times 15^2 \times 15^3 \times 15^4 \times \ldots \times 15^n$

A) $(n^2 + 1)^2$ B) $(1/4)(n^2 + n + 2)^2$
C) $(1/2)(n^2 + n)$ D) $(n^3 - n^2)$
E) $(n^2 + n + 1)^2$

55. Si: $M = 8^U + 8^{U+2}$ tiene 88 divisores, ¿cuántos divisores tiene 8^{U+2}?

A) 26 B) 28 C) 24
D) 27 E) 30

56. Si 63! tiene "n" divisores, ¿cuántos tendrá 64!?

A) (64/29)n B) (32/29)n C) (16/29)n
D) (16/58)n E) (32/57)n

57. ¿Cuántos triángulos rectángulos, cuyos catetos son números enteros en metros, tienen por área 2700 m^2?

A) 22 B) 33 C) 24
D) 40 E) 48

58. Si el numeral: $N = 13^{k+2} - 13^k$ tiene 91 divisores compuestos, calcular el valor de "k".

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

59. Dar la suma de cifras del número que descompuesto en sus factores primos es: $3^a \times b^b \times a^3$, sabiendo que tiene 72 divisores y no es múltiplo de 27.

A) 9 B) 18 C) 24
D) 27 E) 30

60. ¿Cuántos números de 3 cifras son primos relativos con 6?

A) 200 B) 150 C) 300
D) 600 E) 450

61. ¿Cuántos números menores que 540 son primos entre sí con él?

A) 140 B) 144 C) 96
D) 150 E) 72

62. ¿Cuántos números menores que N, son PESÍ con él? Dar como respuesta la suma de dichos números, si $\phi(N)$ indica la cantidad de números menores que N y PESÍ con N.

A) $\frac{1}{2}N \times \phi(N)$ B) $\frac{1}{2}\phi(N)$
C) $N \times \phi(N)$ D) $\frac{1}{3}N \times \phi(N)$
E) N. A.

63. Si el producto de los divisores de un número es $3^{18} \times 7^{12}$, hallar la suma de las inversas de los divisores de dicho número.

A) 1,72 B) 1,49 C) 1,18
D) 1,26 E) 1,14

64. Sabiendo que el producto de divisores de un número es $3^{12} \times 5^{18}$, hallar el número e indicar la suma de cifras.

A) 9 B) 18 C) 27
D) 12 E) 15

65. Si el número $(\overline{aa a_7})^{2a}$ tiene 125 divisores, hallar la suma de los divisores no compuestos.

A) 23 B) 24 C) 25
D) 26 E) 27

66. Si los números $\overline{ab(b+1)}$ y $\overline{bab}$ tienen 3 y 18 divisores, respectivamente, hallar: a + b.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

67. Si el número $\overline{(2a)(2b)ab}$ tiene 8 divisores, hallar la suma de todos los valores de ab.

A) 119 B) 108 C) 78
D) 88 E) 96

68. Sabiendo que: $N = 3^{13} \times (21)^n \times 11^4$ tiene 120 divisores que no son $\overset{\circ}{21}$, ¿cuántos divisores de N son cubos perfectos?

A) 20 B) 12 C) 24
D) 28 E) 18

69. ¿Cuántos divisores de: $N = 2^{10} \times 3^9 \times 5^{14}$ tienen raíz cúbica pero no tienen raíz cuadrada?

A) 24 B) 16 C) 27
D) 12 E) 8

70. Sabiendo que el número $N = 45\,000^k \times 625 \times 324$ tiene $\overline{aabb}$ divisores, hallar a + b + k.

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

71. Hallar la cantidad de divisores enteros múltiplos de 12 que tiene 15!.

A) 2440 B) 2880 C) 4880
D) 5420 E) 5760

72. Si el número $N = 25 \times 36^n$ tiene 884 divisores compuestos y enteros más que del número M = 48n, hallar "n".

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

73 Si el número $\overline{ababab}$ tiene 12 divisores, hallar la cantidad de divisores no primos que tiene el número $\overline{abab}$.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

74. Si el número $N = 7 \times 25 \times 245^n$ tiene 56 divisores enteros que no son múltiplos de 35, hallar "n".

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

75. Los factores primos de un número son 2 y 3, además la cantidad de divisores de su raíz cuadrada y de su cuadrado son 12 y 117, respectivamente. Hallar la suma de las cifras de dicho número.

A) 15 B) 16 C) 18
D) 20 E) 24

76. Si la suma de tres números primos naturales es 82, hallar la cantidad de triadas de números que cumplen dicha condición.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

77. Hallar la suma de los cuadrados de todos los divisores de 51.

A) 21 180 B) 21 240 C) 21 400
D) 21 600 E) 22 100

78. ¿Cuántos divisores del número $N = 15^4 \times 18^6 \times 40^5$ no son cuadrados perfectos?

A) 3245 B) 3265 C) 3445
D) 3465 E) 3675

79. Si $n = 6^{20}$, ¿cuántos pares de números (x; y) existen, tal que $n = \dfrac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$?

A) 1519 B) 1520 C) 1559
D) 1580 E) 1599

80. ¿Cuántos números naturales existen que sean primos relativos con 700, pero menores que este?

A) 240 B) 242 C) 244
D) 248 E) 254

CLAVES

1. C	11. A	21. B	31. B	41. B	51. A	61. B	71. E
2. C	12. C	22. D	32. C	42. A	52. E	62. A	72. D
3. D	13. A	23. A	33. A	43. B	53. D	63. A	73. C
4. D	14. B	24. C	34. A	44. C	54. B	64. A	74. D
5. D	15. D	25. D	35. A	45. B	55. B	65. B	75. C
6. D	16. B	26. C	36. E	46. A	56. B	66. A	76. B
7. D	17. C	27. C	37. C	47. A	57. C	67. A	77. E
8. E	18. E	28. C	38. B	48. A	58. C	68. D	78. A
9. E	19. C	29. D	39. E	49. C	59. A	69. E	79. E
10. C	20. A	30. A	40. D	50. D	60. C	70. B	80. A

Máximo común divisor (MCD) y Mínimo común múltiplo (MCM)

07 capítulo

Giuseppe Peano nació en Spinetta, 27 de agosto de 1858 y murió en Turín, 20 de abril de 1932, fue un matemático, lógico y filósofo italiano, conocido por sus contribuciones a la lógica matemática y la teoría de números. Peano publicó más de doscientos libros y artículos, la mayoría en matemáticas. La mayor parte de su vida la dedicó a enseñar en Turín. Ingresó en la cercana Universidad de Turín en 1876. Se graduó en 1880 con honores y comenzó su carrera académica como asistente en la Universidad de Turín en 1880. Fue jefe de cátedra en Cálculo infinitesimal.

Peano publicó su primer libro sobre lógica matemática en 1887. Este libro fue el primero en usar los símbolos modernos para la unión e intersección de conjuntos. En 1898 presentó una nota a la Academia acerca del sistema de numeración binario y su capacidad para ser usado para representar los sonidos de las lenguas.

Hacia 1901 estaba en la cima de su carrera matemática. Hizo avances en las áreas de análisis, fundamentos y lógica, realizó muchas contribuciones a la enseñanza del cálculo y contribuyó en los campos de ecuaciones diferenciales y análisis vectorial. Jugó un papel central en la axiomatización de las matemáticas y fue pionero en el desarrollo de la lógica matemática. En 1908 Peano publica la quinta y última edición del Proyecto Formulario, titulado *Formulario Mathematico*. Contenía 4200 fórmulas y teoremas, todos completamente enunciados y la mayoría probados.

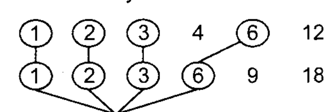
Fuente: Wikipedia

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (MCD)

El máximo común divisor de dos o más números, es el mayor de los divisores comunes de dichos números.

Ejemplo:

Analizamos los divisores de 12 y 18.



El mayor divisor común: 6

∴ MCD(12; 18) = 6

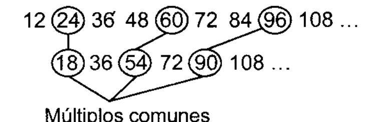
"Todos los divisores comunes son también divisores de su MCD".

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (MCM)

El mínimo común múltiplo de dos o más números, es el menor múltiplo común de dichos números.

Ejemplo:

Analizamos los divisores de 12 y 18:



El menor múltiplo común: 36

∴ MCM(12; 18) = 36

"Todos los múltiplos comunes, son también múltiplos de su MCM".

MÉTODOS PARA CALCULAR EL MCD Y MCM

Por descomposición simultánea

Para un conjunto de números enteros, el MCD se obtiene multiplicando los factores comunes extraídos de dichos números; mientras que el MCM se obtiene multiplicando los factores comunes y no comunes.

Ejemplo:

Calcular el MCD y MCM de los números: 12; 18 y 30.

Resolución:

Hallamos el MCD (divisores comunes).

$$\begin{array}{ccc|l} 12 & 18 & 30 & 2 \\ 6 & 9 & 15 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & \end{array} \Big\} \text{ Divisores comunes}$$

∴ MCD (12; 18; 30) = 2 × 3 = 6

Hallamos el MCM (divisores comunes y no comunes).

$$\begin{array}{ccc|l} 12 & 18 & 30 & 2 \\ 6 & 9 & 15 & 2 \\ 3 & 9 & 15 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array} \Bigg\} \text{ Divisores comunes y no comunes}$$

∴ $MCM(12;18;30) = 2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$

Por descomposición individual

Dado un conjunto de números que son descompuestos canónicamente, el MCD será el producto de los factores primos comunes elevados al menor exponente, mientras que el MCM será el producto de los factores primos comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

Ejemplo:

Calcular el MCD y MCM de los números: 180; 600 y 5292.

Resolución:

Descomponiendo los números en factores primos:

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$; $600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$; $5292 = 2^2 \times 3^3 \times 7^2$

Hallamos el MCD (divisores primos comunes elevados al menor exponente).

$$MCD(180; 600; 5292) = 2^2 \times 3 = 12$$

Hallamos el MCM (divisores primos comunes y no comunes, elevados al mayor exponente).

$$MCM(180; 600; 5292) = 2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^2 = 264\,600$$

PROPIEDADES DEL MCD Y MCM

- Si se tienen dos números enteros, de los cuales uno contiene al otro, su MCD será el menor de los números y su MCM el mayor.

  Ejemplo:

  Sean los números 36 y 144. (36 está contenido en 144).

  MCD(36; 144) = 36 (el menor número)

  MCM(36; 144) = 144 (el mayor número)

- Si se tienen dos números que son PESÍ, su MCD será la unidad y su MCM el producto de los números.

  Ejemplo:

  Sean los números 14 y 15 que son PESÍ.

  MCD(14; 15) = 1 (la unidad)

  MCM(14; 15) = 210 (el producto)

- Si a dos o más números se les divide entre su MCD, se obtienen cocientes exactos que son PESÍ.

  Es decir:

  Sean los números A; B y C, tal que: MCD(A; B; C) = k

  Al dividir los números por su MCD:

  $$\left.\begin{array}{l} \frac{A}{k} = C_1 \\ \frac{B}{k} = C_2 \\ \frac{C}{k} = C_3 \end{array}\right\} \text{Cocientes exactos PESÍ}$$

  De donde, se cumple:

  $\boxed{A = kC_1}$; $\boxed{B = kC_2}$; $\boxed{C = kC_3}$

  Ejemplo:

  Sean los números 104 y 143, MCD(104; 143) = 13

Luego: 756 m. 468 m

$$\frac{143}{13} = 11 \quad \Big\} \text{ Números PESÍ}$$

Solo para dos números, se cumple: "El producto del MCD y MCM de dos números es igual al producto de dichos números".

Es decir: $\boxed{MCD(A; B) \times MCM(A; B) = A \times B}$

Además:

Sean los números A y B, tal que:

$$MCD(A; B) = k \Rightarrow \begin{cases} A = kc_1 \\ B = kc_2 \end{cases} \text{ y } MCM(A; B) = R$$

Hallamos el MCM(A; B), por propiedad:

$kR = kc_1 \times kc_2$

$\Rightarrow \boxed{R = k \times c_1 \times c_2}$ (el divisor común y los no comunes).

Ejemplo:

Sean los números 24 y 40, sabiendo que:

MCD(24; 40) = 8; MCM(24; 40) = 120

Vemos que: $MCD \times MCM = 8 \times 120 = 960$

$A \times B = 24 \times 40 = 960$

$\therefore$ Se verifica la propiedad.

PROPIEDADES ADICIONALES

I. Si el MCM de dos o más números se dividen por cada número, se obtienen cocientes enteros que son PESÍ.

Es decir:

Sean los números A; B y C, tal que:

MCM(A; B; C) = R

Al dividir el MCM por cada número:

$$\frac{R}{A} = C_1; \quad \frac{R}{B} = C_2; \quad \frac{R}{C} = C_3$$

Donde: C_1; C_2 y C_3 son PESÍ.

II. Si a dos o más números enteros se les multiplica (o divide) por una misma cantidad, sus MCD y MCM, quedarán también multiplicados (o divididos) por dicha cantidad.

Es decir:

Sean los números A; B y C, tal que:

MCD(A; B; C) = k; MCM(A; B; C) = R

Ahora, si a los números se les multiplica por "n", se tiene:

MCD(nA; nB; nC) = nk;

MCM(nA; nB; nC) = nR

Ejemplo:

Hallar el MCD de los números 0,048 y 0,056.

Solución:

Sea: MCD(0,048; 0,056) = k

Multiplicando los números por 1000.

$$\underbrace{MCD(48; 56)}_{8} = 1000k$$

$8 = 1000k \Rightarrow k = 0{,}008$

$\therefore$ MCD(0,048; 0,056) = 0,008.

III. Si dos o más números, de un conjunto de números enteros, son reemplazados por su MCD o su MCM, entonces el MCD o el MCM de dichos números no es alterado.

Es decir:

Sean los números A; B; C y D, tal que se cumple:

- MCD(A; B; C) = MCD[MCD(A; B) y MCD(B; C)]
- MCD(A; B; C; D) = MCD[MCD(A; B) y MCD(C; D)]
- MCD(A; B; C; D) = MCD[MCD(A; B; C) y D]
- MCM(A; B; C; D) = MCM[MCM(A; B) y MCM(C; D)]

Ejemplo:

Sean los números: 36; 48; 60 y 72.

I. MCD(36; 48; 60; 72) = 12
 = MCD[MCD(36; 60) = 12 y MCD(48; 72) = 24]
 $\Rightarrow$ MCD(12; 24) = 12

II. MCD(36; 48; 60; 72) = 12
 = MCD[MCD(36; 48; 60) = 12 y 72]
 $\Rightarrow$ MCD(12; 72) = 12

III. MCM(36; 48; 60) = 720
 = MCM[MCM(36; 48) = 144 y 60]
 $\Rightarrow$ MCM(144; 60) = 720

IV. Casos especiales:

- MCD[a; (a + b)] = MCD(a; b)
- MCD[a; b] = MCD[(a + bc); a + b(c + 1)]
- MCD[a; b] = MCD[(a ± b); m];
 donde: m = MCM(a; b).
- Si: MCD(a; b) = 1
 se cumple: MCD(a + b; a × b) = 1;
 MCM(a – b; a × b) = 1

ALGORITMO DE EUCLIDES O DIVISIONES SUCESIVAS

Mediante este método es posible calcular el MCD de dos o más números. El procedimiento consiste en una secuencia de divisiones sucesivas, hasta que la división sea exacta, en esta última operación, el divisor será el MCD.

El procedimiento para hallar el MCD de A y B (A > B) mediante el algoritmo de Euclides, es el siguiente:

1.°: Se divide A por B, obteniéndose cociente q_1 y residuo r_1.

2.°: Se divide B por r_1, obteniéndose cociente q_2 y residuo r_2.

3.°: Se divide r_1 por r_2, obteniéndose cociente q_3 y residuo r_3.

Y así sucesivamente, hasta que la división sea exacta; de esta última división que es exacta, el divisor será su MCD.

Haciendo una tabla:

Cocientes		q_1	q_2	...	q_n	q_{n+1}
Divisores	A	B	r_1	...	r_{n-1}	r_n
Residuos	r_1	r_2	r_3	...	–	

$\therefore$ MCD(A; B) = r_n

Ejemplos:

1. Hallar el MCD de los números 1037 y 425.

Resolución:

Usando el método de divisiones sucesivas:

Cocientes		2	2	3	1	2
Divisores	1037	425	187	51	34	17
Residuos	187	51	34	17	–	

Si se quisiera calcular el MCM de los números A y B, aplicamos la propiedad:

MCD(A; B) × MCM(A; B) = A × B

$\therefore$ MCD (1 037; 425) = 17

2. Hallar el MCM de los números 1037 y 425.

Resolución:

Sabemos que: MCD(1037; 425) = 17

Hallamos el MCM, usando la propiedad:

$\underbrace{[\text{MCD}(1037; 425)]}_{17}[\text{MCM}(1037; 425)] = 1037 \times 425$

$17\,[\text{MCM}(1037; 425)] = 1037 \times 425$

$\therefore$ MCM(1037; 425) = 25 925

PROBLEMAS RESUELTOS

1. ¿Cuántos divisores comunes tienen los números 5040; 6720 y 12 600?

Resolución:

Hallamos el mayor divisor común:

MCD(5040; 6720; 12 600) = 840

Los divisores del MCD, son también los divisores comunes de los tres números.

Luego:

$840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7 \Rightarrow D_{840} = 4 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

$\therefore$ Son 32 divisores comunes.

2. César, Martín y Aldo visitan a Nathaly cada 8; 9 y 12 días, respectivamente. Si la visitaron juntos el 10 de julio, ¿cuál será la fecha más próxima en que volverán a visitarla?

Resolución:

Sea t el tiempo que debe transcurrir para que los tres vuelvan a visitar a Nathaly, se cumple que:

$\left.\begin{array}{l} t = \overset{\circ}{8} \\ t = \overset{\circ}{9} \\ t = \overset{\circ}{12} \end{array}\right\} \begin{array}{l} t = \text{MCM}(8; 9; 12) \\ t = \overset{\circ}{72} \end{array}$

Los tres visitan a Nathaly cada 72 días.

La fecha más próxima será:

10 julio + 72 días = 20 de septiembre

$\therefore$ El 20 de septiembre

3. Tres móviles A; B y C parten al mismo tiempo del partidor de una pista circular que tiene 240 m de circunferencia. Se sabe que A se desplaza a 8 m/s; B a 5 m/s y C a 3 m/s. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que los 3 móviles realicen el primer encuentro?

Resolución:

Hallamos los tiempos que cada móvil emplea en dar una vuelta a la pista circular.

$t_A = \dfrac{240}{8} = 30$ s; $t_B = \dfrac{240}{5} = 48$ s; $t_C = \dfrac{240}{3} = 80$ s

Sea t, el tiempo que transcurre para que se vuelvan a encontrar, se cumple:

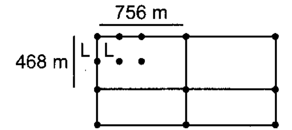
$\left.\begin{array}{l} t = \overset{\circ}{30} \\ t = \overset{\circ}{48} \\ t = \overset{\circ}{80} \end{array}\right\} \begin{array}{l} t = \text{MCM}(30; 48; 80) \\ \Rightarrow t = \overset{\circ}{240} \text{ s} <> \overset{\circ}{4} \text{ min} \end{array}$

Los móviles se encontrarán cada 4 min.

$\therefore$ El primer encuentro será a los 4 min.

4. En una superficie rectangular de dimensiones 936 m y 1512 m se siembran árboles en filas y columnas en forma equidistante de manera que haya un árbol en cada vértice y uno en el centro mismo del terreno en dicha distribución. ¿Cuál será el mínimo número de árboles a sembrar?

Resolución:



Vemos que "L" es divisor común de 468 y 756

$\Rightarrow$ L = MCD(468; 756) = 36

Hallamos el número de árboles:

A lo largo: $\dfrac{1512}{36} + 1 = 43$

A lo ancho: $\dfrac{936}{36} + 1 = 27$

Total de árboles: 43 × 27 = 1161

$\therefore$ Son 1161 árboles.

5. ¿Cuántos múltiplos comunes de 4 cifras tienen los números 24; 50 y 60?

Resolución:

Sea N, el número de 4 cifras.

Por dato:

$$\left.\begin{aligned} N &= \overset{\circ}{24} \\ N &= \overset{\circ}{50} \\ N &= \overset{\circ}{60} \end{aligned}\right\} N = MCM(24; 50; 60) = 600$$

$N = \overset{\circ}{600} \Rightarrow N = 600k;\ k \in \mathbb{Z}^+$

Hallamos los múltiplos comunes de 4 cifras:

$1000 \leq 600k < 10\,000$

$1,6 \leq k < 16,6 \Rightarrow k = \underbrace{\{2; 3; ...; 16\}}_{15\text{ valores}}$

$\therefore$ Existen 15 números.

6. Sabiendo que:
MCD(3A; 24C) = 19k; MCD(2C; B) = 2k;
MCD(A; 4B; 8C) = 210
Calcular la suma de cifras de "k".

Resolución:

Como: MCD(2C; B) = 2k

Multiplicando por 12:

MCD(24C; 12B) = 24k ...(1)

MCD(3A; 24C) = 19k ...(2)

Hallando el MCD de (1) y (2):

$$\underbrace{MCD(3A; 12B; 24C)}_{3[\underbrace{MCD(A; 4B; 8C)}_{210}]} = \underbrace{MCD(24k; 19k)}_{k}$$

$210 \Rightarrow k = 630$

$\therefore$ Suma de cifras: 9

7. Calcular el MCD de A y B, si:
MCD(24A; 64B) = 720; MCD(64A; 24B) = 480

Resolución:

Hallamos el MCD de los 4 números:

MCD(24A; 64A; 24B; 64B) = MCD(720; 480)

Agrupándolos adecuadamente:

MCD[MCD(24A; 64A); MCD(24B; 64B)] = 240

MCD(8A; 8B) = 240 $\Rightarrow$ 8[MCD(A; B)] = 240

$\therefore$ MCD(A; B) = 30

8. Tres ciclistas parten simultáneamente de la misma línea de una pista circular. En cada vuelta tardan, respectivamente: 1 min 12 s; 1 min 30 s y 1 min 45 s. ¿Cuántas vueltas habrá dado cada ciclista, cuando hayan pasado nuevamente y a la vez por la línea de partida?

Resolución:

Sean los ciclistas A; B y C, cuyos tiempos respectivos son:

t_A = 1 min 12 s = 72 s

t_B = 1 min 30 s = 90 s

t_C = 1 min 45 s = 105 s

Sea t, el tiempo en que los tres ciclistas se vuelven a encontrar por primera vez.

$$\left.\begin{aligned} N &= \overset{\circ}{72} \\ N &= \overset{\circ}{90} \\ N &= \overset{\circ}{105} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &t = MCM(72; 90; 105) \\ &t = 2520\text{ s} \end{aligned}$$

Hallamos el número de vueltas:

De A: $\frac{2520}{72} = 35$ vueltas;

De B: $\frac{2520}{90} = 28$ vueltas;

De C: $\frac{2520}{105} = 24$ vueltas

$\therefore$ Las vueltas, respectivamente, son: 35; 28 y 24.

9. ¿Cuántos números de 4 cifras existen, tales que al ser divididos por 12; 18 y 20 dejan como resto 4 en todos los casos, pero al ser divididos por 7, dejan como resto 2?

Resolución:

Sea N el número de 4 cifras, tal que:

$$\left.\begin{aligned} N &= \overset{\circ}{12} + 4 \\ N &= \overset{\circ}{18} + 4 \\ N &= \overset{\circ}{20} + 4 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &N = MCM(12; 18; 20) + 4 \\ &t = \overset{\circ}{180} + 4 \end{aligned}$$

Luego: $N = 180k + 4;\ k \in \mathbb{Z}^+$ ... (1)

Pero: $N = \overset{\circ}{7} + 2$ ... (2)

(1) = (2): $180k + 4 = \overset{\circ}{7} + 2$

Respecto al módulo 7: $(\overset{\circ}{7} + 5)k + 4 = \overset{\circ}{7} + 2$

Los valores de k: k = 1; 8; 15; 22; 29; ...

Los valores de k, para que N tenga 4 cifras:

k = {8; 15; 22; ...; 50} $\Rightarrow$ 7 valores

$\therefore$ Son 7 números

10. Hallar el valor de n $(n \in \mathbb{Z}^+)$, si:
$A = 18 \times 30^n$; $B = 45 \times 20^n$ y
MCM(A; B) = 19 440[MCD(A;B)].

Resolución:

Descomponiendo en factores primos:

$A = 18 \times 30^n = 2^{n+1} \times 3^{n+2} \times 5^n$

$B = 45 \times 20^n = 2^{2n} \times 3^2 \times 5^{n+1}$

Luego:

$MCD(A; B) = 2^{n+1} \times 3^2 \times 5^n$

$MCM(A; B) = 2^{2n} \times 3^{n+2} \times 5^{n+1}$

Pero: $MCM(A; B) = \underbrace{19\,440}_{2^4 \times 3^5 \times 5}[MCD(A; B)]$

Reemplazando:

$2^{2n} \times 3^{n+2} \times 5^{n+1} = 2^4 \times 3^5 \times 5 \times 2^{n+1} \times 3^2 \times 5^n$

Al igualar:

$2^{2n} \times 3^{n+2} \times 5^{n+1} = 2^{n+5} \times 3^7 \times 5^{n+1}$

$2n = n + 5 \qquad \therefore n = 5$

11. Se tienen tres obras literarias con 660; 780 y 900 hojas las cuales se quieren editar en fascículos, todos iguales, estando el número de hojas comprendido entre 10 y 20. ¿En cuántas semanas como

mínimo se terminará de publicar las 3 obras, a razón de un fascículo semanal?

Resolución:

Sea H el número de hojas de los fascículos. El mayor número de hojas de cada fascículo es:

$$H = MCD(660; 780; 900) = 60$$

Pero: $10 < H < 20$

$\Downarrow$

divisor de 60, lo mayor posible $\Rightarrow H = 15$

Cada fascículo debe tener 15 hojas.

Luego, el número de semanas:

$$\frac{660 + 780 + 900}{15} = 156$$

$\therefore$ Son 156 semanas.

12. Calcular el MCD de los numerales:

$$\underbrace{33...33_{(4)}}_{462\,\text{cifras}} \text{ y } \underbrace{77...77_{(8)}}_{378\,\text{cifras}}$$

Dar la suma de cifras en base 16.

Resolución:

Expresando los números en base 2.

$A = \underbrace{33...33_{(4)}}_{462\,\text{cifras}} = 4^{462} - 1 = 2^{924} - 1;$

$B = \underbrace{77...77_{(8)}}_{378\,\text{cifras}} = 8^{378} - 1 = 2^{1134} - 1$

Hallamos el MCD:

$MCD(2^{924} - 1; 2^{1134} - 1) = 2^{MCD(924;\,1134)} - 1$

$MCD(A; B) = 2^{42} - 1$

El resultado a base 16: $(2^4)^{10} \times 2^2 - 1$

Tenemos: $16^{10} \times 4 - 1$

Luego:

$$\begin{array}{r} \overbrace{4\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ \ldots\ \ 0\ \ 0_{16}}^{10\text{ ceros}} - \\ 1 \\ \hline 3\ \underbrace{(15)(15)(15)\ \ldots\ (15)(15)}_{10\text{ cifras}} \end{array}$$

$\therefore \Sigma$ cifras $= 3 + 15 \times 10 = 153$

13. El MCD de los numerales $\overline{1a8b}$ y $\overline{bc2b}$ es 126. ¿Cuál es su MCM?

Resolución:

Por dato: $MCD(\overline{1a8b}; \overline{bc2b}) = 126$

Luego: $\overline{1a8b}$ y $\overline{bc2b}$ son $\overset{\circ}{126}$

$$* \ \overline{1a8b} = \overset{\circ}{126} \begin{cases} \overset{\circ}{7} \\ \overset{\circ}{9} \\ \overset{\circ}{2} \end{cases}$$

Si: $\overline{1a8b} = \overset{\circ}{9} \Rightarrow a + b = 9$ ...(1)

Si: $\overline{1a8b} = \overset{\circ}{7} \Rightarrow 2a + b + 2 = \overset{\circ}{7}$ ...(2)

De (1) y (2): $a = 3; b = 6$

Reemplazando: $\overline{6c26} = \overset{\circ}{126} \Rightarrow c = 4$

Hallamos el MCM(1386; 6426) = 70 686

$\therefore$ El MCM es 70 686.

14. Se divide un terreno de forma rectangular de 468 m por 540 m, en cuadrados cuyas longitudes de sus lados son números enteros en m. Hallar el número de cuadrados, sabiendo que el área de cada uno está comprendida entre 100 m^2 y 300 m^2.

Resolución:

Hallamos la mayor longitud del cuadrado:

$L = MCD(468; 540) = 36$

Pero: $100 < \text{área} = (\text{lado})^2 < 300$

$\Rightarrow 10 < \text{lado} < 17{,}3 \Rightarrow \text{lado} = 12$ m

$\downarrow$

divisor de 36

Hallamos el número de cuadrados:

$$\text{n.° cuadrados} = \frac{468 \times 540}{12 \times 12} = 1755$$

$\therefore$ Son 1755 cuadrados.

15. N es el mayor número natural, tal que al dividir 3999; 5585 y 6378 por N deja un mismo residuo. Hallar la suma de las cifras de N.

Resolución:

Del enunciado, se cumple:

$3999 = \overset{\circ}{N} + r$ ...(1)

$5585 = \overset{\circ}{N} + r$ ...(2)

$6378 = \overset{\circ}{N} + r$ ...(3)

(2) − (1): $1586 = \overset{\circ}{N}$ ...(4)

(3) − (2): $793 = \overset{\circ}{N}$ ...(5)

De (4) y (5), el mayor valor de N:

$N = MCD(1586; 793) = 793$

$\therefore \Sigma\text{cifras} = 7 + 9 + 3 = 19$

16. Encontrar tres números A; B y C, sabiendo que:

$MCD(A; B) = MCD(A; C) = MCD(B; C) = 17$

$MCM(A; B; C) = 1785$ y $A + B + C = 255$

Dar la suma de las cifras del mayor de ellos.

Resolución:

De: $MCD(A; B) = MCD(A; C) = MCD(B; C) = 17$

$A = 17C_1; B = 17C_2; C = 17C_3; C_1; C_2$ y C_3 PESÍ

De: $MCM(A; B; C) = 1785$

$17 \times C_1 \times C_2 \times C_3 = 1785$

$C_1 \times C_2 \times C_3 = 105$ ...(1)

Además: $A + B + C = 255$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$17C_1 \quad 17C_2 \quad 17C_3$

$\Rightarrow C_1 + C_2 + C_3 = 15$ ...(2)

De (1) y (2): $C_1 = 3; C_2 = 5; C_3 = 7$

Los números son: $A = 17 \times 3 = 51$

$B = 17 \times 5 = 85$

$C = 17 \times 7 = 119$

$\therefore$ Suma de cifras del mayor número: $1 + 1 + 9 = 11$

17. El MCD de 2 números es 248 y el menor de ellos es 2976. Sabiendo que el MCM está comprendido entre 59 200 y 89 500, ¿cuántas soluciones hay para el mayor de dichos números?

Resolución:

Sea N el mayor número.

Por dato: MCD(N; 2976) = 248

$2976 = 248 \times 12 \Rightarrow$ C PESÍ con 12

$N = 248C \Rightarrow C \neq \overset{\circ}{2}$ y $\neq \overset{\circ}{3}$ ...(1)

También: $MCM(N; 2976) = 248 \times 12 \times C$

Pero: 59 200 < MCM(N; 2976) < 89 500

Reemplazando: $59\,200 < 248 \times 12 \times C < 89\,500$

$19{,}8 < C < 30{,}1$ ... (2)

De (1) y (2): C = {23; 25; 29}

∴ El mayor número puede tomar 3 valores.

18. Hallar: a + b + c, sabiendo que los cocientes sucesivos al calcular el MCD por el algoritmo de Euclides de los numerales $\overline{a(a+4)a}$ y $\overline{(a+4)bc}$, fueron: 1; 1; 1 y 3.

Resolución:

Del enunciado, reconstruimos el algoritmo de Euclides.

Cocientes:		1	1	1	3
Divisores:	$\overline{a(a+4)a}$	$\overline{(a+4)bc}$	4k	3k	k
Residuos:	4k	3k	k	–	

Se tiene: $\overline{a(a+4)a} = 7k = \overset{\circ}{7} \Rightarrow a = 5$

$595 = 7k \Rightarrow k = 85$

Además: $\overline{(a+4)bc} = 11k = 935$

⇓

85

$\Rightarrow b = 3; c = 5 \quad \therefore a + b + c = 13$

19. Tres reglas de 2400 mm, cada una, están divididas en 300; 200 y 96 partes, respectivamente. Se hace coincidir los extremos de las tres reglas. ¿En cuántas divisiones, además de los extremos, coinciden?

Resolución:

Hallamos las longitudes de las divisiones en cada regla:

1.°: $\frac{2400}{300} = 8$ mm;

2.°: $\frac{2400}{200} = 12$ mm;

3.°: $\frac{2400}{96} = 25$ mm

Sea L, la longitud en la que las tres divisiones coinciden.

L

1.° 8 8 8 ...

2.° 12 12 12 ...

3.° 25 25 ...

Luego:

$L = \overset{\circ}{8}$, $L = \overset{\circ}{12}$, $L = \overset{\circ}{25}$ $\Big\}$ L = MCM(8; 12; 25) = 600; $L = \overset{\circ}{600}$

Además de los extremos, las reglas coincidirán a los: 600 mm; 1200 mm y 1800 mm.

∴ Coinciden 3 veces.

20. Un móvil se desplaza a velocidad constante, recorriendo primero 756 km, luego 3402 km. Si el MCM de los tiempos empleados es 486 h, ¿cuántas horas se ha demorado en total?

Resolución:

Sea V la velocidad constante del móvil.

Hallamos los tiempos empleados:

$t_1 = \frac{756}{V}; \ t_2 = \frac{3402}{V}$

Por dato: $MCM\left(\frac{756}{V}; \frac{3402}{V}\right) = 486$

Tenemos: $\frac{MCM(756; 3402)}{MCD(V; V)} = 486$

Efectuando: $\frac{6804}{V} = 486 \Rightarrow V = 14$ km/h

El tiempo total: $\frac{756 + 3402}{14} = 297$ h

∴ Tiempo total: 297 horas

21. Hallar la suma de las cifras de un número entero, comprendido entre 800 y 1000, cuyo MCD con 702 es igual a su MCD con 1365 e igual a 39.

Resolución:

Sea N el número.

Por dato:

$MCD(702; N) = 39 \begin{cases} 702 = 39 \times 18 \\ N = 39C \end{cases}$

⇒ C y 18 son PESÍ: $C \neq \overset{\circ}{2}$ y $\neq \overset{\circ}{3}$ ...(1)

$MCD(1365; N) = 39 \begin{cases} 1365 = 39 \times 35 \\ N = 39C \end{cases}$

⇒ C y 35 son PESÍ: $C \neq \overset{\circ}{5}$ y $\neq \overset{\circ}{7}$ ...(2)

Pero: $800 < N = 39C < 1000$

$20{,}5 < C < 25{,}6$ ...(3)

De (1), (2) y (3): C = 23

El valor de N: $39 \times 23 = 897$

∴ Suma de cifras: 24.

22. Hallar el menor de dos números enteros, sabiendo que la suma de sus cuadrados es 10 530 y su MCM 297?

Resolución:

Sean los números A y B.

Por dato: $A^2 + B^2 = 10\,530$ ...(1)

MCM(A; B) = 297 ...(2)

Si: $MCD(A; B) = K \Rightarrow A = Kc_1; B = Kc_2$

En (1): $K^2(c_1^2 + c_2^2) = 10\,530 = 81 \times 130$ ...(α)

En (2): $K \times c_1 \times c_2 = 297 = 9 \times 3 \times 11$ ...(β)

De (α) y (β): $k = 9; c_1 = 3; c_2 = 11$

Los números son: $A = 9 \times 3 = 27$; $B = 9 \times 11 = 99$

∴ El menor número es 27.

23. Hallar el valor de "b", sabiendo que:
$MCD(\overline{abc}; \overline{cba}) = 18$ y $a - c = 6$

Resolución:

Por propiedad: $\overline{abc} = 18 \times c_1$ ...(1)

$\overline{cba} = 18 \times c_2$ ...(2)

(1) − (2): $\overline{abc} - \overline{cba} = 18(c_1 - c_2)$

$99\underbrace{(a - c)}_{6} = 18(c_1 - c_2)$

$\Rightarrow c_1 - c_2 = 33$

$\downarrow \quad \downarrow$

49 16

Luego: $\overline{abc} = 18 \times 49 = 882$;

$\overline{cba} = 18 \times 16 = 288$

∴ El valor de "b": 8

24. Hallar la menor cantidad de hojas que puede tener un libro, sabiendo que si sus hojas se cuentan de 18 en 18 sobran 11; de 24 en 24 sobran 17; de 30 en 30 sobran 23, pero si se cuentan de 11 en 11 no sobran hojas.

Resolución:

Sea H, el número de hojas, tal que:

$\left.\begin{array}{l} H = \overset{\circ}{18} + 11 = \overset{\circ}{18} - 7; \\ H = \overset{\circ}{24} + 17 = \overset{\circ}{24} - 7; \\ H = \overset{\circ}{30} + 23 = \overset{\circ}{30} - 7; \end{array}\right\} \begin{array}{l} H = MCM(18; 24; 30) - 7 \\ H = \overset{\circ}{360} - 7 \end{array}$

También: $H = 360k - 7; k \in \mathbb{N}$ ...(1)

Pero: $H = \overset{\circ}{11}$ ...(2)

(1) = (2): $360k - 7 = \overset{\circ}{11}$

Respecto al módulo 11:

$(\overset{\circ}{11} + 8)k - 7 = \overset{\circ}{11} \Rightarrow k = 5$

El menor número de hojas:

$H = 360 \times 5 - 7 = 1793$

∴ El número de hojas 1793.

25. Hallar la diferencia de dos números enteros, uno con 21 divisores y el otro con 10 divisores y cuyo MCD sea 18.

Resolución:

Sean los números A y B, tal que:

$MCD(A; B) = 18$ ... (1)

y: $D_A = 21 = 7 \times 3$; $D_B = 10 = 5 \times 2$ ... (2)

De (1) y (2), los factores primos de A y B son 2 y 3:

$A = 2^6 \times 3^2 = 576$; $B = 2 \times 3^4 = 162$

Hallamos la diferencia de los números:

∴ $A - B = 414$

26. Hallar el número N, sabiendo que tiene 10 divisores y su MCD con 2205 es 245.

Resolución:

Por dato: $MCD(N; 2205) = 245 \begin{cases} N = 245C \\ 2205 = 245 \times 9 \end{cases}$

De donde: C es PESÍ con 9 $\Rightarrow C \neq \overset{\circ}{3}$

Además: $D_N = 10$ ...(1)

y: $N = 5 \times 7^2 \times C$ ...(2)

De (1) y (2): $C = 7^2 \Rightarrow N = 5 \times 7^4 = 12\,005$

∴ El número es 12 005.

27. El MCM de dos números es 288 veces su MCD; el mayor de estos números tiene 7 divisores. Hallar la diferencia de estos números.

Resolución:

Si: $MCD(A; B) = k \Rightarrow A = kC_1; B = kC_2$

Por dato: $MCM(A; B) = 288[MCD(A; B)]$

$k \times C_1 \times C_2 = 288k$

$C_1 \times C_2 = 288 = 32 \times 9$

$\Rightarrow (C_1 = 32; C_2 = 9) \vee (C_1 = 9; C_2 = 32)$

El mayor número: $A = 32k$ ...(1)

Pero: $D_A = 7$ ...(2)

De (1) y (2): $k = 2$

Luego: $A - B = 23 \times 2 = 46$

∴ La diferencia es 46.

28. La diferencia de dos números es 2160 y tienen 24 divisores comunes. Hallar el máximo común divisor de dichos números.

Resolución:

Si: $MCD(A; B) = k \Rightarrow A = kC_1; B = kC_2$

Por dato: $k(C_1 - C_2) = 2160$ ...(1)

$D_k = 24$ ...(2)

"k" es divisor de 2160 con 24 divisores.

De (1): $2160 = 2^4 \times 3^3 \times 5 \Rightarrow k = 2^3 \times 3^2 \times 5$

$\Rightarrow k = 360$ ∴ El MCD es 360.

29. Si: $M = \{a / MCD(1500; a) = 60$ y $a < 1500\}$. Hallar la suma de los elementos de M.

Resolución:

Como: $MCD(1500; a) = 60 \begin{cases} 1500 = 60 \times 25 \\ a = 60c \end{cases}$

$\Rightarrow$ c PESÍ con 25: $c \neq \overset{\circ}{5}$

Pero: $a < 1500 \Rightarrow 60 \times c < 1500 \Rightarrow c < 25$

Valores de c:

{1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9; 11; 12; 13; 14; 16; 17; 18; 19; 21; 22; 23; 24}

La suma de los valores de "a".

$60(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 22 + 23 + 24) = 15\,000$

∴ La suma es 15 000.

30. Si el máximo común divisor de dos números naturales es 144 y tienen, respectivamente, 33 y 35 divisores, hallar uno de ellos .

Resolución:

Sean los números A y B, tal que:

$MCD(A; B) = 144 = 2^4 \times 3^2$

Además: $D_A = 33$ y $D_B = 35$

Los factores primos de A y B son: 2 y 3

Luego, los números serán:

$A = 2^{10} \times 3^2 = 9216$; $B = 2^4 \times 3^6 = 11\,664$

∴ Uno de los números es 11 664.

31. Sabiendo que el MCM de los números: $A = 12 \times 90^n$ y $B = 12^n \times 90$ tienen 2048 divisores, ¿cuántos números dividen exactamente a A y B?

Resolución:

Por descomposición canónica:

$A = 12 \times 90^n = 2^2 \times 3(2 \times 3^2 \times 5)^n = 2^{n+2} \times 3^{2n+1} \times 5^n$

$B = 12^n \times 90 = (2^2 \times 3)^n \times 2 \times 3^2 \times 5 = 2^{2n+1} \times 3^{n+2} \times 5$

Hallamos: $MCM(A; B) = 2^{2n+1} \times 3^{2n+1} \times 5^n$

Pero: $D_{MCM(A;B)} = 2048$

$\Rightarrow (2n+2)(2n+2)(n+1) = 2048$

$4(n+1)^3 = 4 \times 8^3 \Rightarrow n = 7$

Luego: $A = 2^9 \times 3^{15} \times 5^7$; $B = 2^{15} \times 3^9 \times 5$

$MCD(A; B) = 2^9 \times 3^9 \times 5$

La cantidad de divisores comunes: $10 \times 10 \times 2 = 200$

$\therefore$ Son 200 números.

32. Hallar dos números enteros, si su diferencia es 36 y su MCM es 336. Dar la suma de ellos.

Resolución:

Sean A y B los números:

Por datos: $A - B = 36$ ...(1)

$MCM(A; B) = 336$ ...(2)

Si: $MCD(A; B) = k \Rightarrow A = kC_1$; $B = kC_2$

En (1): $k(C_1 - C_2) = 36$ ...(3)

En (2): $k \times C_1 \times C_2 = 336$ ...(4)

(3) ÷ (4): $\dfrac{C_1 - C_2}{C_1 \times C_2} = \dfrac{3}{28} \Rightarrow C_1 = 7; C_2 = 4$

En (3): $k(7 - 4) = 36 \Rightarrow k = 12$

Los números: $A = 12 \times 7 = 84$

$B = 12 \times 4 = 48$

$\therefore A + B = 132$

33. Si dos números se multiplican por 8, sus MCD y MCM aumentan en 252 y 22 932, respectivamente. Hallar el mayor de los números, si estos no son divisibles entre sí.

Resolución:

Sean los números A y B.

Si: $MCD(A; B) = k$ ...(1)

$MCM(A; B) = R$ ...(2)

Multiplicando a los números por 8, se cumple:

$MCD(8A; 8B) = 8k$

$MCM(8A; 8B) = 8R$

Por dato: $8k - k = 252 \Rightarrow k = 36$

$8R - R = 22\,932 \Rightarrow R = 3276$

En (1): $MCD(A; B) = 36 \Rightarrow A = 36C_1$; $B = 36C_2$

En (2): $MCM(A; B) = 3276 \Rightarrow 36 \times C_1 \times C_2 = 3276$

$\Rightarrow C_1 \times C_2 = 91 = 7 \times 13 \Rightarrow C_1 = 7; C_2 = 13$

Los números: $A = 36 \times 7 = 252$; $B = 36 \times 13 = 468$

$\therefore$ El mayor de los números 468.

34. La suma de dos números es 180 y el cuadrado de su MCM es igual al cubo de su MCD. Hallar el mayor de los números.

Resolución:

Sean los números P y Q.

Por datos:

$P + Q = 180$ ...(1)

$[MCM(P; Q)]^2 = [MCD(P; Q)]^3$ ...(2)

Si: $MCD(P; Q) = k \Rightarrow P = kC_1$; $Q = kC_2$

En (1): $k(C_1 + C_2) = 180$ ...(3)

En (2): $(k \times C_1 \times C_2)^2 = k^3 \Rightarrow C_1^2 \times C_2^2 = k$ ...(4)

De (3) y (4): $k = 36$; $C_1 = 2$; $C_2 = 3$

Los números: $P = 36 \times 2 = 72$; $Q = 36 \times 3 = 108$

$\therefore$ El mayor número es 108.

35. Al dividir 2255 y 3157 por un mismo número, se obtiene por restos los cocientes respectivos. Encontrar el mayor número.

Resolución:

Sea N el número, tal que:

$3157 = Nq_1 + q_1 = q_1(N + 1)$

$2255 = Nq_2 + q_2 = q_2(N + 1)$

Vemos que $(N + 1)$ es divisor común:

$\Rightarrow N + 1 = MCD(3157; 2255) = 451$

$\Rightarrow N = 450$

$\therefore$ El mayor número es 450.

36. Hallar la suma de dos números, sabiendo que ambos tienen 2 cifras y 2 factores primos; además, la diferencia entre su MCM y su MCD es 243.

Resolución:

Sean los números A y B, tales que:

$MCM(A; B) - MCD(A; B) = 243$ ...(1)

Si: $MCD(A; B) = k \Rightarrow A = kC_1$; $B = kC_2$

En (1): $k \times C_1 \times C_2 - k = 243$

$k(C_1 \times C_2 - 1) = 243 = 9 \times 27$

$\Rightarrow k = 9 \wedge C_1 \times C_2 - 1 = 27$

$C_1 \times C_2 = 28 = 7 \times 4$

Los números son:

$A = 9 \times 7 = 63 \Rightarrow B = 9 \times 4 = 36$

$\therefore A + B = 99$

37. Los números 21 448 y 33 111 divididos por un número de 4 cifras dan, respectivamente, por residuos 42 y 29. Determinar dicho número.

Resolución:

Sea $\overline{abcd}$ el número:

Por dato: $21\,448 = \overset{\circ}{\overline{abcd}} + 42 \Rightarrow 21\,406 = \overset{\circ}{\overline{abcd}}$

$33\,111 = \overset{\circ}{\overline{abcd}} + 29 \Rightarrow 33\,082 = \overset{\circ}{\overline{abcd}}$

Luego, $\overline{abcd}$ es divisor común:

$\Rightarrow \overline{abcd} = MCD(33\,082; 21\,406) = 1946$

$\therefore$ El número es 1946.

38. Hallar el producto de dos números enteros, tales que el cociente de dividir su MCM por su MCD es 675 y la suma de los números es 364.

Resolución:

Sean los números M y N.

Por datos: $\dfrac{MCM(M; N)}{MCD(M; N)} = 675$ ...(1)

$M + N = 364$ ...(2)

Si: $MCD(M; N) = k \Rightarrow M = kC_1;\ N = kC_2$

En (1): $\dfrac{k \times C_1 \times C_2}{k} = 675 \Rightarrow C_1 \times C_2 = 675 = 25 \times 27$

$\Rightarrow C_1 = 25;\ C_2 = 27$

En (2): $k(25 + 27) = 364 \Rightarrow k = 7$

Los números son:

$M = 25 \times 7 = 175 \quad \wedge \quad N = 27 \times 7 = 189$

$\therefore$ El producto: $175 \times 189 = 33\ 075$.

39. Hallar la suma de dos números, uno de 20 divisores y otro de 12 divisores, si su MCM es 720.

Resolución:

Sean los números M y N, tal que:

$MCM(M; N) = 720$ ...(1)

$D_M = 20;\ D_N = 12$ ...(2)

Si: $MCD(M; N) = k \Rightarrow M = kC_1;\ N = kC_2$

En (1): $k \times C_1 \times C_2 = 72 = 30 \times 8 \times 3$

Los números son:

$M = 30 \times 8 = 240 \Rightarrow D_M = 20$ divisores

$N = 30 \times 3 = 90 \Rightarrow D_N = 12$ divisores

$\therefore M + N = 330$.

40. Al calcular el MCD de los numerales $\overline{(a+1)(b+1)c}$ y $\overline{(a-1)bc}$ por el algoritmo de Euclides, se obtuvo como cocientes sucesivos 2; 3; 3 y 2, respectivamente. Hallar: a + b + c.

Resolución:

Reconstruyendo el algoritmo de Euclides:

Cocientes:		2	3	3	2
Divisores:	$\overline{(a+1)(b+1)c}$	$\overline{(a-1)bc}$	7k	2k	k
Residuos:	7k	2k	k	–	

Luego: $\overline{(a-1)bc} = 23k$ ...(1)

$\overline{(a+1)(b+1)c} = 53k$ ...(2)

(2) – (1): $210 = 30k \Rightarrow k = 7$

En (1): $\overline{(a-1)bc} = 161 \Rightarrow a = 2;\ b = 6;\ c = 1$

$\therefore a + b + c = 9$

41. Hallar "a + b", sabiendo que son diferentes y que el MCM de los números $\overline{aa}$; $\overline{bb}$ y $\overline{ab}$ es 1287.

Resolución:

Como: $MCM(\overline{aa}; \overline{bb}; \overline{ab}) = 1287$

Se deduce que 11 es factor de los primeros números.

Pero: $1287 = 11 \times 3 \times 3 \times 13$

Eligiendo convenientemente:

$\overline{aa} = 33;\ \overline{bb} = 99$ y $\overline{ab} = 39 \Rightarrow a = 3;\ b = 9$

$\therefore a + b = 12$

42. Sabiendo que: $MCM(\overline{abc}; \overline{cba}) = 1782$, hallar el valor de: "$a \times b \times c$".

Resolución:

Como: $MCM(\overline{abc}; \overline{cba}) = 1782$

Al descomponer: $1782 = 9 \times 2 \times 9 \times 11$

Convenientemente: $\overline{abc} = 2 \times 9 \times 11 = 198$

$\overline{cba} = 891 = 11 \times 81$

$\Rightarrow a = 1;\ b = 9;\ c = 8 \quad \therefore a \times b \times c = 72$

43. Si el numeral $N = \overline{(a+2)a(a+5)}$, cumple: $MCM(N; 24) = MCM(N; 264)$, hallar N.

Resolución:

De: $MCM(N; 24) = MCM(N; 264)$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$3 \times 8 \qquad \underbrace{11 \times 24}$

$\overset{\circ}{11} \Rightarrow N = \overset{\circ}{11}$

Luego: $\overline{(a+2)a(a+5)} = \overset{\circ}{11} \Rightarrow a = 4$

$\therefore N = 649$

44. Determinar: a + b + c + d, si:

$MCD(\overline{a3bb}; \overline{b(a+1)cd}) = 72$

Resolución:

Como: $MCD(\overline{a3bb}; \overline{b(a+1)cd}) = 72$

$\Rightarrow \overline{a3bb}$ y $\overline{b(a+1)cd}$ son $\overset{\circ}{72}$.

Luego:

- $\overline{a3bb} = \overset{\circ}{72} \begin{cases} \overset{\circ}{8} \\ \overset{\circ}{9} \end{cases}$

$\Rightarrow \overline{3bb} = \overset{\circ}{8} \Rightarrow b = 4 \quad \wedge \quad \overline{a344} = \overset{\circ}{9} \Rightarrow a = 7$

- $\overline{48cd} = \overset{\circ}{72} \Rightarrow c = 2 \quad \wedge \quad d = 4$

$\therefore a + b + c + d = 17$

45. Se trata de formar un cubo con ladrillos cuyas dimensiones son 24 cm de largo; 15 cm de ancho y 9 cm de alto. ¿Cuántos ladrillos son necesarios para formar el cubo más pequeño?

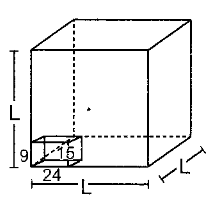
Resolución:

Sea L la longitud de la canasta del cubo.

Se deduce que:

$\left.\begin{aligned} L &= \overset{\circ}{24} \\ L &= \overset{\circ}{15} \\ L &= \overset{\circ}{9} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} L &= MCM(24; 15; 9) = \overset{\circ}{360} \\ L &= \overset{\circ}{360} \end{aligned}$

Si el cubo es el más pequeño posible: L = 360 cm, hallamos el número de ladrillos:



$$n.^{\circ}\ ladrillos = \frac{V_{cubo}}{V_{ladrillo}} = \frac{360 \times 360 \times 360}{24 \times 15 \times 9} = 14\ 400$$

$\therefore$ Son 14 400 ladrillos.

46. Calcular el número de veces por el que debemos multiplicar por 30 al número 396 para obtener otro que sea el MCM de 490 números enteros distintos.

Resolución:

Sea "n" el número de veces por el que se debe multiplicar por 30 al número 396, obteniéndose:

$N = 30^n \times 396$ ...(1)

Como N debe ser el MCM de 490 números enteros distintos, se cumple: $D_N = 490$

Hallamos el número de divisores de N:

$N = (2 \times 3 \times 5)^n \times 2^2 \times 3^2 \times 11$

Al efectuar: $N = 2^{n+2} \times 3^{n+2} \times 5^n \times 11$

Su número de divisores: $D_N = (n + 3)^2(n + 1)(2)$

Por condición: $(n + 3)^2(n + 1)(2) = 490$

Al descomponer en factores:

$(n + 3)^2(n + 1) = 245 = 7^2 \times 5$

Igualando factores: $n + 1 = 5 \Rightarrow n = 4$

$\therefore$ Se multiplica por 30: 4 veces.

47. Se sabe que dos números enteros tienen 12 divisores comunes y que el MCM de estos enteros es 4095. ¿Cuál es la mayor suma de estos enteros?

Resolución:

Sean los números enteros A y B, tales que:

MCD(A; B) = k ...(1)

MCM(A; B) = 4095 ...(2)

De (1) se cumple:

$A = kC_1$; $B = kC_2$; (C_1 y C_2 PESÍ)

Además, por dato: $D_k = 12$ divisores

De (2), se cumple: $k \times C_1 \times C_2 = 4095$

Vemos que el MCD es un factor de 4095 con 12 divisores.

Entonces descomponemos 4095 en tres factores, donde uno de ellos tenga 12 divisores

Tenemos: $4095 = 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$

Descomponiendo en 3 factores:

i. Primer caso:

$k = 3^2 \times 5 \times 7 = 315$, $C_1 = 13$, $C_2 = 1$ $\Rightarrow$ $A = 315 \times 13 = 4095$; $B = 315 \times 1 = 315$; La suma: $A + B = 4410$

ii. Segundo caso:

$k = 3^2 \times 5 \times 13 = 585$, $C_1 = 7$, $C_2 = 1$ $\Rightarrow$ $A = 585 \times 7 = 4095$; $B = 585 \times 1 = 585$; La suma: $A + B = 4680$

iii. Tercer caso:

$k = 3^2 \times 7 \times 13 = 819$, $C_1 = 5$, $C_2 = 1$ $\Rightarrow$ $A = 819 \times 5 = 4095$; $B = 819 \times 1 = 819$; La suma: $A + B = 4914$

Obsérvese que en todos los casos, el valor del MCD es un número que tiene 12 divisores.

$\therefore$ La mayor suma: 4914

48. El número de pisos de un rascacielos está comprendido entre 100 y 130. A este número le falta una unidad para ser múltiplo de 3, le faltan 6 unidades para ser múltiplo de 8 y le sobran 2 para ser múltiplo de 10. Hallar la suma de las cifras del número de pisos.

Resolución:

Sea N el número de pisos del rascacielos, tal que por dato se cumple:

$N + 1 = \overset{\circ}{3} \Rightarrow N = \overset{\circ}{3} - 1$; $N + 6 = \overset{\circ}{8} \Rightarrow N = \overset{\circ}{8} - 6$;

$N - 12 = \overset{\circ}{10} \Rightarrow N = \overset{\circ}{10} + 2$

Homogeneizando el residuo, tenemos:

$N = \overset{\circ}{3} - 1 = \overset{\circ}{3} + 2$; $N = \overset{\circ}{8} - 6 = \overset{\circ}{8} + 2$; $N = \overset{\circ}{10} + 2$

Por propiedad: $N = MCM(3; 8; 10) + 2$

$N = \overset{\circ}{120} + 2$

Pero, el número de pisos: $100 < N < 130$

$\Rightarrow N = 120 + 2 = 122$

$\therefore$ La suma de las cifras: $1 + 2 + 2 = 5$

49. En una granja, el número de patos es el menor número de 4 cifras. Si los patos se acomodan en jabas de 12; 18; 24 o 30 patos, sobran 10; 4; 10 y 28, respectivamente. ¿Cuántos patos quedan, si se venden 8 quincenas?

Resolución:

Sea N el número de patos de la granja y que al acomodarlos en las jabas cumple lo siguiente:

$N = \overset{\circ}{12} + 10 \lor \overset{\circ}{12} - 2$; $N = \overset{\circ}{18} + 4 \lor \overset{\circ}{18} - 14$;

$N = \overset{\circ}{24} + 10 \lor \overset{\circ}{24} - 14$; $N = \overset{\circ}{30} + 28 \lor \overset{\circ}{30} - 2$

Como los residuos por defecto y por exceso son distintos entre sí, al homogeneizarlos con un mismo residuo, solo es posible sumarles un número que sea múltiplo del respectivo módulo, se cumple:

$N = \overset{\circ}{12} + 10 + 48 = \overset{\circ}{12} + 58$

$N = \overset{\circ}{18} + 4 + 54 = \overset{\circ}{18} + 58$

$N = \overset{\circ}{24} + 10 + 48 = \overset{\circ}{24} + 58$

$N = \overset{\circ}{30} + 28 + 30 = \overset{\circ}{30} + 58$

Por propiedad:

$N = MCM(12; 18; 24; 30) + 58 \Rightarrow N = \overset{\circ}{360} + 58$

Como N es el menor número de 4 cifras, tenemos:

$N = 360 \times 3 + 58 = 1138$

Pero, el número de patos vendidos:

$15 \times 8 = 120$

$\therefore$ Número de patos que quedan: $1138 - 120 = 1018$

50. Un empleado trabaja 5 días seguidos y descansa el sexto día. Si empieza a trabajar un lunes 27 de abril, ¿en qué fecha descansa un domingo por tercera vez?

Resolución:

Sea "d" el número de días que deben transcurrir para que el empleado descanse un domingo, se cumple:

Si el empleado descansa el sexto día: $d = \overset{\circ}{6}$

Para que descanse un día domingo: $d = \overset{\circ}{7}$

Por propiedad: d = MCM(6; 7) ⇒ $d = \overset{\circ}{42}$

Vemos que deben transcurrir 42 días para que el empleado descanse un domingo.

El número de días que deben transcurrir para que el empleado descanse un domingo por tercera vez es: $42 \times 3 = 126$ días.

Hallamos la fecha: 27 abril + 126 días = 31 agosto

∴ Descansa el 31 de agosto del mismo año.

51. El volumen de agua vertido cuando se abre una llave es DP al caudal y al tiempo de llenado. Una llave llena un estanque hasta las 3/7 de su volumen con un caudal de 2 L/min; luego aumenta dicho caudal en 1 L/min para llenar lo que falta. Si el menor múltiplo común de los tiempos parciales es 360 min, hallar el tiempo de llenado del estanque.

Resolución:

Volumen (DP) caudal × tiempo

$\Rightarrow \dfrac{V}{Q \times t} = \text{constante}$

$\Rightarrow \dfrac{3V/7}{(2)t_1} = \dfrac{4V/7}{(3)t_2}$

Se obtiene $\dfrac{t_1}{9} = \dfrac{t_2}{8} = k \left\{ \begin{array}{l} t_1 = 9k \\ t_2 = 8k \end{array} \right.$

Dato: MCM(t_1; t_2) = 360 min

⇒ MCM(9K; 8K) = 360

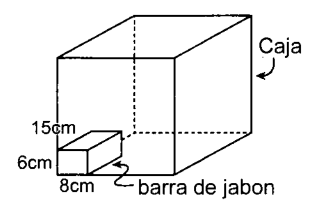
K[MCM(9; 8)] = k(72) = 360 ⇒ k = 5

⇒ $t_1 = 9(5) = 45$; $t_2 = 8(5) = 40$

∴ Tiempo de llenado: 45 + 40 = 85 = 1 h 25 min

52. ¿Cuál es el menor volumen que debe tener una caja cúbica en la que se colocarán barras de jabón, cuyas dimensiones son 6 cm, 8 cm y 15 cm, si no debe sobrar espacio?

Resolución:



Como queremos que la caja sea cúbica y contenga un número exacto de barras de jabón, la arista de la misma debe de contener exactamente a 6 a 8 y a 15.

$\left. \begin{array}{l} a = \overset{\circ}{6} \\ a = \overset{\circ}{8} \\ a = \overset{\circ}{15} \end{array} \right\} a = \overline{\text{MCM}(6; 8; 15)} \Rightarrow a = \overset{\circ}{120}$

∴ Volumen = $(120)^3 = 1\,728\,000$ cm³ = 1,728 m³

53. Sabiendo que el MCM de los números $\overline{abc}$ y ($\overline{abc}$ + 245) es 1050. Calcular el valor de a + b + c.

Resolución:

Sea k el MCD

$\overline{abc} + 245 = kp$ ...(1)

$\overline{abc} = kq$ ...(2)

Donde: p y q son primos entre sí.

$\left. \begin{array}{l} (1) - (2):\ 245 = k(p - q) \\ \text{Además: } 1050 = k \times p \times q \end{array} \right\} (\div)$

$\dfrac{p - q}{pq} = \dfrac{245}{1050} = \dfrac{7}{30} \Rightarrow p = 10 \wedge q = 3$

⇒ 1050 = k(10)(3) ⇒ k = 35

Entonces: $\overline{abc} = 35 \times 3 = 105$

∴ a + b + c = 1 + 0 + 5 = 6

54. Si el MCD de dos números es 9; ¿cuál es el valor de su MCM, si su producto es 1800?

Resolución:

Dados dos números A y B, se cumple:

A × B = MCD(A; B) = MCM(A; B)

⇒ 1800 = 9[MCM(A; B)] ∴ MCM(A; B) = 200

55. Halle K sabiendo que:

MCD(210K; 300K; 420K) = 1200

Resolución:

Por dato: MCD(210K; 300K; 420K) = 1200

Por descomposición simultánea:

210K	300K	420K	K
210	300	420	10
21	30	42	3
7	10	14	

Son números PESÍ

⇒ MCD(210K; 300K; 420K) = 30K = 1200

∴ K = 40

56. Sea N un número entero positivo tal que: MCD(N/2; 3N/5; 4N/7) = 21. Hallar la suma de las cifras de N.

Resolución:

Tenemos: $\text{MCD}\left(\dfrac{N}{2}; \dfrac{3N}{5}; \dfrac{4N}{7}\right) = 21$

Multiplicamos por 70, que es MCM(2; 5; 7)

Luego: MCD(35N; 42N; 40N) = 70 × 21

Como: 35; 42 y 40 son PESÍ,

Entonces: MCD(35N; 42N; 40N) = N

Finalmente: N = 70 × 21 = 1470

∴ Suma de cifras de N: 12.

57. ¿Cuántos divisores comunes de: 1296; 1152 y 720 son múltiplos comunes de 4; 6 y 9?

Resolución:

Los divisores comunes de 1296; 1152 y 720 serán divisores del MCD de (1296: 1152 y 720) es decir de 144.

Todos los múltiplos comunes de 4; 6 y 9 serán múltiplos del MCM de (4; 6 y 9), es decir, de 36. Finalmente, como: 36; 72; 108 y 144 son múltiplos de 36 y divisores de 144, entonces hay 4 números.

58. Sea N el mayor número de 4 cifras que al dividirlo por 4; 6; 9; 11 y 12 se obtienen restos iguales. Hallar la suma de las cifras de N.

Resolución:
Por dato:

$$N = \begin{cases} \overset{\circ}{4} + r \\ \overset{\circ}{6} + r \\ \overset{\circ}{9} + r \\ \overset{\circ}{11} + r \\ \overset{\circ}{12} + r \end{cases} \quad N = \overset{\circ}{\overline{MCM(4; 6; 9; 11; 12)}} + r \quad N = \overset{\circ}{396} + r$$

El máximo $\overset{\circ}{396}$ de 4 cifras es $396 \times 25 = 9900$
r puede ser 0; 1; 2; 3
$r_{máx.} = 3 \quad \therefore N_{máx.} = 9900 + 3 = 9903$

59. Al hallar el MCD de 2 números por el algoritmo de Euclides se obtuvieron como cocientes sucesivos a: 4; 1; 1; 8. ¿Cuál es la diferencia de dichos números sabiendo que es un cuadrado perfecto y el menor posible? Dar la suma de las cifras de dicha diferencia.

Resolución:
Sea k el MCD
A = kp; B = kq; donde p y q son PESÍ.
Reconstruyendo el algoritmo tenemos:

	4	1	1	8
77k	17k	9k	8k	k
9k	8k	k	0	

Entonces: A = 77k B = 17k
Luego: $A - B = 77k - 17k = q^2 \Rightarrow 60k = q^2$
$(2^2 \times 3 \times 5)k = q^2 \Rightarrow k = 15$
Luego: $A - B = 60(15) = 900$
$\therefore$ Suma de cifras $9 + 0 + 0 = 9$

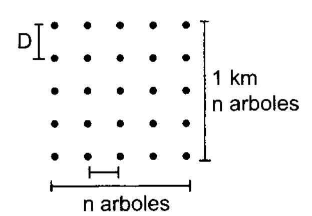
60. Halle el mínimo común múltiplo de 5 números, si su máximo común divisor es 210 y los cocientes de dividir cada número entre el máximo común divisor son 2; 4; 6; 7 y 8.

Resolución:
Sea: MCD(A; B; C) = d
Luego: A = dp; B= dq; C = dr
donde: p, q y r son PESÍ
Entonces se cumple:
MCM(A; B; C) = [MCM(A; B; C)][MCM(p; q; r)]
Propiedad que aplicamos a los 5 números.
$A = 210 \times 2; \quad B = 210 \times 4; \quad C = 210 \times 6$
$D = 210 \times 7; \quad E = 210 \times 8$
MCM(A; B; C; D; E) = 210[MCM(2; 4; 6; 7; 8)]

$\therefore 210 \times 168 = 35\,280$

61. En un bosque se observa que los árboles están colocados de modo que cada uno de estos equidista de los cuatro más próximos a él. Si se cuentan de 82 en 82 el número N de árboles que tiene el bosque por km² nos sobran 46; si se les cuenta de 150 en 150 sobran 114 y si se les cuenta de 180 en 180 sobran 144. La distancia D de un árbol cualquiera a cada uno de los más próximos a él está comprendido entre 4 y 6 m. Hallar N y D.

Resolución:
$N = \overset{\circ}{82} + 46 = \overset{\circ}{82} - 36$
$N = \overset{\circ}{150} + 114 = \overset{\circ}{150} - 36$
$N = \overset{\circ}{180} + 144 = \overset{\circ}{180} - 36$
$N = MCM(82; 150; 180) - 36$
$\Rightarrow N = \overset{\circ}{36900} - 36 = 36\,864$
Como es la cantidad de árboles en un km², y se encuentran a igual distancia a los 4 más próximos para cada árbol:



Se observa: $N = n^2 = 36\,864 \Rightarrow n = 192$
Luego, hay 192 árboles en cada lado.
$\therefore$ Distancia: $D = \dfrac{1000}{192 - 1} = 5{,}2$ m

62. Hallar la suma de los 3 menores números tal que su MCD es 18 y que poseen 10; 15 y 18 divisores.

Resolución:
Sean los números A; B y C
$D_A = 10 \Rightarrow A = 2 \times 3^2(3^2) = 162$
$D_B = 15 \Rightarrow B = 2 \times 3^2(2^3) = 144$
$D_C = 18 \Rightarrow C = 2 \times 3^2(2 \times 5) = 180$
(+) 486
$MCD(A; B; C) = 18 = 2 \times 3^2$
$\therefore A + B + C = 486$

63. ¿Cuántos números de 3 cifras de la base decimal son tales que, convertidos a los sistemas de numeración de bases 6; 8 y 9, dan como resultados números que terminan en 2?

Resolución:
Sean $\overline{abc}$ los números que al convertirlos a la base 6, 8 y 9 dan residuo 2, entonces se debe cumplir:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{abc} = \overset{\circ}{6} + 2 \\ \overline{abc} = \overset{\circ}{8} + 2 \\ \overline{abc} = \overset{\circ}{9} + 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \overline{abc} = MCM(6; 8; 9) + 2 \\ \overline{abc} = \overset{\circ}{72} + 2 \Rightarrow 72m + 2 \end{array}$$

Pero: $100 \leq 72m + 2 < 1000 \Rightarrow 1{,}3 \leq m < 13{,}8$

$\Rightarrow m = 2; 3; 4; ...; 13 \quad \therefore$ Hay $13 - 1 = 12$ números.

64. Se dividen tanto la suma como el producto de 2 números entre su MCD, se obtiene como cociente 10 y 225 respectivamente. Hallar los 2 números y dar como respuesta su diferencia.

Resolución:

Sean A y B los 2 números:

A = kp; B = kq; tal que p y q son PESI.

Luego:

$\frac{kp + kq}{k} = 10 \Rightarrow p + q = 10 \quad ...(1)$

$\frac{k^2pq}{k} = 225 \Rightarrow kpq = 225 = 3^2 \times 5^2 \quad ...(2)$

De (1) y (2) se deduce que:

p = 9; q = 1; k = 25

$A = kp = 25 \times 9 = 225$

$B = kq = 25 \times 1 = 25$

$\therefore A - B = 225 - 25 = 200$

65. Al calcular el MCD de 2 números por el algoritmo de Euclides se han obtenido como cocientes sucesivos 3; 3 y 2. Si el MCM de dichos números, es un número de 3 cifras que termina en 3. Hallar dicho MCD.

Resolución:

Sean A y B los 2 números, tales que:

A = kp; B = kp, donde p y q son PESÍ

Reconstruyendo el algoritmo tenemos:

	3	3	2
23k	7k	2k	k
2k	k	0	

Entonces: A = 23k ∧ B = 7k

Luego: p = 23 ∧ q = 7

Como: $MCM(23; 7; k) = \overline{ab3}$

$\Rightarrow 231k = \overline{ab3} = 693 \Rightarrow k = 3$

∴ El MCD(A; B) es 3.

66. Tres cuerpos empiezan a girar simultáneamente alrededor de sus ejes centroidales a razón de $\pi/3$ rad/s, $3\pi/4$ rad/s y $\pi/8$ rad/s. Al cabo de 5 minutos, ¿cuántas veces han pasado simultáneamente por la posición inicial?

Resolución:

Los cuerpos regresan a su posición inicial cada

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6 \text{ s}; \quad \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{4}} = \frac{8}{3} \text{ s}; \quad \frac{2\pi}{\frac{\pi}{8}} = 16 \text{ s}$$

Además, simultáneamente lo hacen cada:

MCM(6; 8/3; 16) = 48 s

Entonces en 5 minutos han pasado simultáneamente: $\frac{5 \times 60}{48} = 6{,}25 = 6$

∴ Han pasado 6 veces por la posición inicial.

67. Si: $A = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + ...}_{(n-1) \text{ sumandos}}$

$B = \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + ...}_{\left(\frac{n-2}{2}\right) \text{ sumandos}}$

Además MCM(A; B) = 171

Calcular el número de divisores comunes que tienen 49n y 280.

Resolución:

$$A = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + ... + \frac{1}{(n-1)n}$$

$$A = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left[\left(\frac{1}{n-1}\right) - \frac{1}{n}\right] = \frac{n-1}{n}$$

$$A = \frac{n-1}{n}$$

$$B = \underbrace{\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{7 \times 9} + ... + \left[\frac{1}{(n-3) \times (n-1)}\right]}_{\left(\frac{n-2}{2}\right) \text{ sumandos}}$$

$$2B = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + ... + \left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-1}\right)$$

$$B = \frac{n-2}{2(n-1)}$$

Como: $\frac{n-2}{2}$ = número entero a $\Rightarrow$ n es par

$\Rightarrow n = 2k$

$$MCM\left[\underbrace{\frac{2k-1}{2k}}_{A}; \underbrace{\frac{(2k-2)}{2(2k-1)}}_{B}\right] = 171$$

$\underbrace{(2k-1)}_{19}\underbrace{(k-1)}_{9} = 19 \times 9 \Rightarrow k = 10$

$\Rightarrow MCD(49 \times 20; 280) = 7 \times 2^2 \times 5$

∴ Número de divisores comunes: $2 \times 3 \times 2 = 12$

68. Si MCM(A; B) = 2100 y MCD(A; B) = 7, ¿cuántos pares de números, que tienen al menos 2 cifras cumplen estas condiciones?

Resolución:

MCD(A; B) = 7

A = 7a; B = 7b, a y b son PESÍ

- MCM(7a; 7b) = 2100

  $\Rightarrow \underbrace{MCM(a; b)}_{PESÍ} = 300$

  $a \times b = 2^2 \times 3 \times 5^2$

- Para que A y B tengan dos cifras al menos, basta a y b ≥ 2

  $a = (2^2 \times 3 \times 5^2); (2^3 \times 3); (3 \times 5^2); (2 \times 5^2)$

  $b = \underset{\text{¡No!}}{1}; \underbrace{5^2; \quad 2^2; \quad 3^2}_{3 \text{ formas}}$

- Haciendo: $a \times b = x \times y \times z$
  donde: $x = 2^2$; $y = 3$; $z = 2^2$, son PESÍ

La cantidad de formas que se puede descomponer "$x \times y \times z$" en el producto de dos factores será la cantidad de números PESÍ que se está buscando.

$P = x^1 \times y^1 \times z^1$

Cantidad de factores: $(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 8$

Se descompone en 2 factores: $8/2 = 4$ formas.

De ellas se elimina 1.

$\therefore$ Existen 3 pares de números.

69. ¿De cuántas maneras se puede dividir exactamente en parcelas cuadradas iguales un terreno rectangular de 120 m × 90 m? Cada parcela tiene un número entero de metros cuadrados.

Resolución:

L: lado de cada parcela cuadrada.

MCD(120; 90) = 30

Divisores de 30: 1; 2; 3; 6; 5; 10; 15; 30

L podrá tomar cualquier valor que sea divisor de 30 ya que estará contenido a la vez en 120 y 90.

$\therefore$ L toma 8 valores.

70. Hallar la suma de dos números cuyo MCD sea 18, sabiendo que el primero tiene 10 divisores y el segundo 15 divisores.

Resolución.

$MCD(A; B) = 18 = 2 \times 3^2$

$A = xy^4$ posee 10 divisores

$B = m^2n^4$ posee 15 divisores

- Se observa que 2 y 3 son los divisores primos de A y B.
- $n \neq y$ porque de lo contrario en su MCD aparecería y^4 (o m^4)
- Solo $m = y$; $n = x$
  $A = m^4n$; $B = m^2m^4$
  $\Rightarrow MCD = m^2n = 2 \times 3^2 \begin{cases} m = 2 \\ m = 3 \end{cases}$

$A = 3^4 \times 2 = 162 \wedge B = 3^2 \times 2^4 = 144$

$\therefore A + B = 306$

71. Si MCD(N; 22 050) = 225 y la cantidad de divisores de N es 15, hallar la suma de la cifras del menor valor de N.

Resolución:

MCD(N; 22 050) = 225

$N = 225k$ ← k; 98

$22\,050 = 225 \times 98$ ← son PESÍ

$\Rightarrow k \neq \overset{\circ}{2}; k \neq \overset{\circ}{7}$

- $N = 225k = (3^2 \times 5^2)k$
  posee 15 divisores, $m^2 \times m^4$
  $k = 3^2$: $N = 3^4 \times 5^2$
  $k = 5^2$: $N = 3^2 \times 5^4$

$\Rightarrow$ menor $N = 3^4 \times 5^2 = 2025$

$\therefore$ Suma de cifras: $2 + 2 + 5 = 9$

72. La suma de los tres menores números tal que su MCD es 18 y que poseen 10; 15 y 18 divisores es $\overline{abc}$, hallar el valor de $a + b + c$.

Resolución:

$MCD(A; B; C) = 18 = 2 \times 3^2$

$A = 18a$; $B = 18b$; $C = 18c$

Donde a, b y c son PESÍ

- $A = xy^4$ posee 10 divisores
- $B = m^2n^4$ posee 15 divisores
- $C = p^2q^2r$ posee 18 divisores

$\Rightarrow x = n = r = 2$; $y = m = q = 3$; $p = 5$

Menores números:

$A = 2 \times 3^4$; $B = 3^2 \times 2^4$; $C = 5^2 \times 3^2 \times 2$

$\Rightarrow A = 162$; $B = 144$; $C = 450$

$\therefore \overline{abc} = 756 \Rightarrow a + b + c = 18$

73. Hallar la suma de los divisores comunes a los números p y q, donde:

$p = 66...6_{(7)}$ (213 cifras) $\wedge$ $q = 66...6_{(7)}$ (216 cifras)

Resolución:

$p = \underbrace{66...6_7}_{213\ cifras} = 7^{213} - 1$; $q = \underbrace{66...6_7}_{216\ cifras} = 7^{216} - 1$

Los divisores comunes están contenidos en el MCD

$MCD(p; q) = 7^{MCD(213; 216)} - 1$

$MCD(p; q) = 7^3 - 1 = 342 = 2 \times 3^2 \times 19$

$\therefore$ Suma de divisores: $(2 + 1)(3^2 + 3 + 1)(19 + 1) = 780$

74. Si: $MCD(KA; KB) = 16 \wedge MCD\left(\frac{A}{K^2}; \frac{B}{K^2}\right) = 2$, hallar: $E = MCD(K^2A; K^2B)$

Resolución:

- $MCD(A; B) = d$
  se reemplaza en:
- $MCD(KA; KB) = K[MCD(A; B)] = 16$
  $\Rightarrow Kd = 16$ ...(1)
- $MCD\left(\frac{A}{K^2}; \frac{B}{K^2}\right) = \frac{1}{K^2}[MCD(A; B)] = 2$
  $\Rightarrow \left(\frac{1}{K^2}\right)d = 2$ ...(2)

De (1) y (2): $K = 2$; $d = 8$

Se pide hallar: $E = MCD(k^2A; K^3B)$

$\therefore E = K^2MCD(A; B) = 2^2 \times 8 = 32$

75. ¿Cuántos números de 3 cifras cumplen que: $MCD(360; \overline{abc}) = 30$?

Resolución:

$MCD(360; \overline{abc}) = 30$

$360 = 30 \times 12$ ← PESÍ

$\overline{abc} = 30 \times m$ ← $m \neq \overset{\circ}{2}; \overset{\circ}{3}$

Como $\overline{abc}$ posee 3 cifras:

$100 < 30m < 1000$

$3,3 < m < 33,3$

$\therefore m = \underbrace{5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 25; 29; 31}_{10\ números}$

76. Si MCD($\overline{abc}$; 756; 972) = 36; $\overline{abc} \neq \overset{o}{13}$, hallar la suma de todos los números de la forma $\overline{abc}$.

Resolución:

MCD($\overline{abc}$; 756; 972) = 36

$\left.\begin{array}{l}\overline{abc} = 36k \\ 756 = 36 \times 21 \\ 972 = 36 \times 27\end{array}\right\}$ k; 21; 27 son PESÍ, $k \neq \overset{o}{3}$

Por dato: $k \neq \overset{o}{13}$

Como: $100 < 36k < 1000$

$2{,}8 < k < 27{,}8$

k = 4; 5; 7; 8; 10; 11; 14; 16; 17; 19; 20; 22; 23; 25

Suma de los valores de $\overline{abc}$:

$S_{\overline{abc}} = 36\underbrace{(4+5+7+...+23+25)}_{201}$ $\therefore S_{\overline{abc}} = 7236$

77. En una división inexacta el dividendo y el divisor tienen los mismos divisores que el divisor y el residuo. Se sabe que el dividendo es $2^{4\alpha} \times 3^{2\beta} \times 7^{\gamma}$, el divisor es $2^2 \times 3^{2y} \times 5^n$ y el residuo es $2^2 \times 3^8$, además $2\alpha > \beta > y > 3$, hallar el menor valor de $\beta + y$.

Resolución:

MCD(D; d) = MCD(d; r)

$\left.\begin{array}{l}D = 2^{4\alpha} \times 3^{2\beta} \times 7^{\gamma} \\ d = 2^2 \times 3^{2y} \times 5^n\end{array}\right\} MCD = 2^2 \times 3^{2y}$

$(\beta > y)$

$\left.\begin{array}{l}d = 2^2 \times 3^{2y} \times 5^n \\ r = 2^2 \times 3^8\end{array}\right\} MCD = 2^2 \times 3^{2y}$

$\Rightarrow 2y \leq 8 \Rightarrow y \leq 4$

Como $y > 3$, entonces $y = 4$

Además: $\beta > y \Rightarrow \beta > 4$

$\Rightarrow$ Menor $\beta = 5$ $\therefore$ Menor $\beta + y = 5 + 4 = 9$

78. Hallar a + b, si:

$$MCD\left(\underbrace{\overline{abab...aba}_{(8)}}_{17\text{ cifras}}; \underbrace{\overline{bababab...ab}}_{43\text{ cifras}}\right) = \overset{o}{7}$$

Resolución:

Si MCD(M; N) = $\overset{o}{7}$

Se cumple: M = $\overset{o}{7}$; N = $\overset{o}{7}$

- $\underbrace{\overline{bababa...bab}}_{43\text{ cifras}} = \overset{o}{7} + b = \overset{o}{7}$; solo $b = \overset{o}{7}$

  Como es cifra significativa: b = 7
- $\overline{a7a7a...a7a}_8 = \overset{o}{7}$

  En base 8: N = $\overset{o}{7}$, si suma de cifras de N = $\overset{o}{7}$

  $\Rightarrow 9a + 8(7) = \overset{o}{7} \Rightarrow a = 7$

$\therefore a + b = 7 + 7 = 14$

79. Si MCD(21a; 28b) = 168, hallar MCD(0,25a; $0,\widehat{3}$b).

Resolución:

MCD(21a; 28b) = 168 $\Rightarrow$ MCD(3a; 4b) = 24

$\left.\begin{array}{l}3a = 24x \Rightarrow a = 8x \\ 4b = 24y \Rightarrow b = 6y\end{array}\right\}$ x; y son PESÍ

Además: 0,25 = 1/4

$0,\widehat{3}$ = 1/3

Se desea hallar:

$MCD\left(\frac{a}{4}; \frac{b}{3}\right) = MCD\left(\frac{8x}{4}; \frac{6y}{3}\right)$

$\Rightarrow$ MCD(2x; 2y) = 2[MCD(x; y)]; (x, y PESÍ)

$\therefore$ (0,25a; $0,\widehat{3}$b) = 2(1) = 2

80. Si MCD($\overline{4p8p}$; $\overline{5qpr}$; $\overline{34r}$) = 9, hallar el valor de $E = p^2 + q^2 + r^2$

Resolución:

MCD($\overline{4p8p}$; $\overline{5qpr}$; $\overline{34r}$) = 9

- $\left.\begin{array}{l}\overline{4p8p} = \overset{o}{9} \\ \Rightarrow 4 + p + 8 + p = \overset{o}{9}\end{array}\right\} p = 3$
- $\left.\begin{array}{l}\overline{34r} = \overset{o}{9} \\ \Rightarrow 3 + 4 + r = \overset{o}{9}\end{array}\right\} r = 2$
- $\left.\begin{array}{l}\overline{5q32} = \overset{o}{9} \\ \Rightarrow 5 + q + 3 + 2 = \overset{o}{9}\end{array}\right\} q = 8$

$\therefore E = 3^2 + 8^2 + 2^2 = 77$

81. Se tienen 3 recipientes cilindros, con capacidades, 144, 168 y 216 litros, los cuales se encuentran llenos de agua. Se desean vaciar estos recipientes, con el menor número de extracciones, con una batea cilíndrica la cual tenga como capacidad un número entero de litros. Hallar el menor número de extracciones.

Resolución:

Para realizar el menor número de extracciones el volumen de la batea cilíndrica debe ser el mayor posible.

Dicho volumen debe estar contenido en cada uno de los volúmenes de los recipientes señalados:

$$V = MCD(\underset{24 \times 6}{\underset{\downarrow}{144}}; \underset{24 \times 7}{\underset{\downarrow}{168}}; \underset{24 \times 9}{\underset{\downarrow}{216}})$$

$\Rightarrow$ V = 24 litros

$\therefore$ N.° extracciones: $\frac{144 + 168 + 216}{24} = 22$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2002 - I)

Sean los 4 números:
$p = 2^{7458}$; $q = 3^{6215}$; $r = 7^{3729}$; $t = 17^{2486}$
Su escritura en orden creciente es:

A) p; q; r; t B) p; q; t; r C) p; t q; r
D) q; p; r; t E) q; p t; r

Resolución:
Observamos:
MCD(7458; 6215; 3729; 2486) = 1243
Haciendo n = 1243, luego:
$p = 2^{6n}$; $q = 3^{5n}$; $r = 7^{3n}$; $t = 17^{2n}$
Desarrollando tenemos:
$p = 64^n$; $q = 243^n$; $r = 343^n$; $t = 289^n$
Entonces: $p < q < t < r$

Clave: B

PROBLEMA 2 (UNI 2002 - I)

La suma de las cifras del MCM de $2^9 - 1$ y $2^{12} - 1$ es:

A) 37 B) 36 C) 35
D) 34 E) 33

Resolución:
Recordando: $MCM(N^a + r; N^b + r) = N^{MCM(a; b)} + r$
Aplicando: $MCM(2^9 - 1; 2^{12} - 1) = 2^{MCM(9; 12)} - 1$
$MCM(2^9 - 1; 2^{12} - 1) = 2^{36} - 1$
Luego: $m = (2^3)^{12} - 1$
$m = (8)^{12} - 1 \Rightarrow m = (\overset{\circ}{9} - 1)^{12} - 1$
$m = \overset{\circ}{9} + 1 - 1 \Rightarrow m = \overset{\circ}{9}$
Como m es múltiplo de 9, la suma de sus cifras será un múltiplo de 9, entonces: Σ de cifras(m) = 36

Clave: B

PROBLEMA 3 (UNI 2006 - I)

Al descomponer en sus factores primos los números A y B se expresan como: $A = 3^\alpha b^2$; $B = 3^\beta a$ (con α y β consecutivos). Sabiendo que su mínimo común múltiplo y su máximo común divisor son 675 y 45, respectivamente, halle el valor más pequeño de A + B.

A) 360 B) 368 C) 456
D) 720 E) 810

Resolución:
Con los datos del problema tenemos lo siguiente:
$A = 3^\alpha \times b^2$; $B = 3^\beta \times a$
Luego: $MCM(A; B) = 3^3 \times 5^2$; $MCD(A; B) = 3^2 \times 5$
Observando ambas expresiones para A y B, concluimos que $\alpha < \beta$
$\alpha < \beta$, condición básica para que se cumpla que A + B sea mínimo.
Entonces por condición del problema, α y β deben ser consecutivos: $\alpha = 2 \wedge \beta = 3$

Concluimos, por consiguiente, que el valor mínimo de A + B es:
$A + B = (3^2 \times 5^2) + (3^3 \times 5) = 360$

Clave: A

PROBLEMA 4 (UNI 2006 - I)

Si se sabe: $MCD(\overline{aac}; \overline{(a-1)(a-1)b})$ es 15,
$MCD(\overline{aac}; \overline{da(a-1)})$ es 66
determine la suma de todos los posibles valores de a + b + c + d.

A) 23 B) 24 C) 25
D) 26 E) 27

Resolución:
De los datos:
$MCD(\overline{aac}; \overline{(a-1)(a-1)b}) = 15$
$\Rightarrow \overline{aac} = \overset{\circ}{15}$ y $\overline{(a-1)(a-1)b} = \overset{\circ}{15}$ ...(α)
También:
$MCD(\overline{aac}; \overline{da(a-1)}) = 66$
$\Rightarrow \overline{aac} = \overset{\circ}{66}$ y $\overline{da(a-1)} = \overset{\circ}{66}$ ...(β)
De (α) y (β):
$\overline{aac} \langle \begin{matrix} \overset{\circ}{15} \\ \overset{\circ}{66} \end{matrix} \Rightarrow \overline{aac} = \overset{\circ}{330}$ (330; 660; 990)
✓ ✗ ✓

Si: $\overline{aac} = 330 \Rightarrow \overline{22b} = \overset{\circ}{15} \Rightarrow b = 5$
y $\overline{d32} = \overset{\circ}{66} \Rightarrow d = 1$
Luego: a + b + c + d = 3 + 5 + 0 + 1 = 9
Si: $\overline{aac} = 990 \Rightarrow \overline{22b} = \overset{\circ}{15} \Rightarrow b = 5$
y $\overline{d32} = \overset{\circ}{66} \Rightarrow d = 1$
Luego: a + b + c + d = 9 + 5 + 0 + 1 = 15
Por lo tanto, la suma de todos los valores de a, b, c y d es: 9 + 15 = 24

Clave: B

PROBLEMA 5 (UNI 2007 - II)

Halle la cantidad de pares de números de modo que su MCD sea 36 y estén comprendidos entre 750 y 950.

A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

Resolución:
Como: $MCD(A; B) = 36 \Rightarrow A = 36p \wedge B = 36q$
donde p y q son PESÍ
Además: $750 < 36p$; $36q < 950$
$20,8 < p$; $q < 26,3$
Luego como p y q son PESÍ:

p	21	21	21	21	22	22	23	23	23	24	25
q	22	23	25	26	23	25	24	25	26	25	26

Hay 11 pares de números PESÍ que están entre 20 y 27.

Por lo tanto, hay 11 pares de números que están entre 750 y 950 cuyo MCD es 36.

Clave: C

PROBLEMA 6 (UNI 2010 - I)

Indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. Si m y n son números enteros no divisibles por 3, entonces la suma o la diferencia de ellos es un múltiplo de tres.

II. Si m y n son múltiplos de 3 con $m > n > 0$, entonces el cociente m/n es un múltiplo de tres.

III. Si m y n son múltiplos de tres con m, $n > 0$, entonces MCD(m; n) es un múltiplo de tres.

A) VVV B) VFV C) VFF
D) FVF E) FFF

Resolución:

I. La proposición es verdadera

Como m y n no son divisibles por 3, entonces:

- $m = \overset{\circ}{3} + 1 \vee m = \overset{\circ}{3} + 2$
- $n = \overset{\circ}{3} + 1 \vee n = \overset{\circ}{3} + 2$

Analizamos:

- Si los residuos son iguales:
  $\Rightarrow m + n \neq \overset{\circ}{3} \wedge m - n = \overset{\circ}{3}$
- Si los residuos son diferentes:
  $\Rightarrow m + n = \overset{\circ}{3} \wedge m - n \neq \overset{\circ}{3}$

Entonces, la suma o diferencia de m y n es un múltiplo de tres.

II. La proposición es falsa.

Contraejemplo:

Sea: m = 84 y n = 12 (ambos múltiplos de 3)

$\Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{84}{12} = 7 \neq \overset{\circ}{3}$

III. La proposición es verdadera.

Como m y n son múltiplos de 3, con m, $n > 0$

$\Rightarrow m = 3k \wedge n = 3p$

Luego:

$MCD(m; n) = MCD(3k; 3p) = 3MCD(k; p) = \overset{\circ}{3}$ (propiedad)

Entonces: $MCD(m; n) = \overset{\circ}{3}$

Clave: B

PROBLEMA 7 (UNI 2011 - II)

El mínimo común múltiplo de dos números distintos es al máximo común divisor de ellos como 35 es a 1. Si el número mayor es 3017, determine la suma de las cifras del número menor.

A) 12 B) 13 C) 14
D) 5 E) 16

Resolución:

Si: $K = MCD(A; B)$

$\left.\begin{array}{l} A = K\alpha \\ B = K\beta \end{array}\right\} \alpha$ y β son PESÍ

$$\frac{MCM(A;B)}{MCD(A;B)} = \frac{K \times \alpha \times \beta}{K} = 35$$

$\alpha \times \beta = 35 \left\langle \begin{array}{l} 7 \times 5 \quad (\checkmark) \\ 35 \times 1 \quad (\Rightarrow \Leftarrow) \end{array}\right.$

Número mayor: $A = K(7) = 3017 \Rightarrow K = 431$

Número menor: $B = K(5) = 431(5) = 2155$

$\therefore \Sigma$ cifras(B): $2 + 1 + 5 + 5 = 13$

Clave: B

PROBLEMA 8 (UNI 2012 - I)

La Municipalidad de Lince busca mejorar la ornamentación de sus dos avenidas principales de 2520 m y 2000 m, colocando murales equidistantes entre sí de tal forma que haya un mural al inicio y otro al final de cada avenida. Se sabe que para la colocación de cada mural se necesitan al menos 3 trabajadores, quienes percibirán S/.50 cada uno. Calcule la cantidad mínima de trabajadores que debe contratar la Municipalidad de Lince para este trabajo

A) 320 B) 330 C) 345 D) 365 E) 380

Resolución:

L : divisor común de 2520 y 2000 y el mayor posible (para usar menos trabajadores)

L = MCD(2520; 2000) = 40 m

L L 2520m L

L L 2000m L

Número de murales:

1.ª avenida: $\frac{2520}{40} + 1 = 63 + 1 = 64$

2.ª avenida: $\frac{2000}{40} + 1 = 50 + 1 = 55$

115 murales

Como se necesitan 3 trabajadores por mural:

$115 \times 3 = 345$ trabajadores en total

Clave: C

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. ¿Cuántos números de 3 cifras tienen con su complemento aritmético un MCD igual a 40?

A) 16 B) 18 C) 24
D) 20 E) N. A.

2. Se han plantado árboles igualmente espaciados en el contorno de un campo triangular cuyos lados miden 144 m; 180 m y 240 m. Sabiendo que hay un poste en cada vértice y que la distancia entre 2 árboles consecutivos está comprendido entre 4 m y 10 m, calcular el número de árboles.

A) 88 B) 94 C) 90
D) 95 E) 96

3. Hallar la cifra de unidades del mayor número de 3 cifras que convertido a los sistemas de numeración de bases 6; 8 y 9, da como resultado números que terminan en 5; 7 y 8, respectivamente.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

4. A un terreno rectangular de 952 m de largo y 544 m de ancho se le quiere cercar con alambre sujeto a postes equidistantes, de manera que distan de 30 m a 40 m y que corresponda un poste a cada vértice y otro a cada uno de los puntos medios de los lados del rectángulo. ¿Cuántos postes se necesitarán?

A) 56 B) 96 C) 72
D) 88 E) 64

5. Hallar "n", sabiendo que el MCM de los números: $A = 12^n \times 15$; $B = 12 \times 15^n$ tiene 140 divisores.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

6. La suma del MCM y MCD de dos números es 4960. Si el menor es la tercera parte del mayor, dar como respuesta la suma de cifras del número mayor.

A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 16

7. Sabiendo que el MCM(N; N + 1; 3N) = 546, hallar el MCM(N + 2; 2N + 1)

A) 80 B) 105 C) 135
D) 225 E) N. A.

8. ¿Cuál es el menor número de trozos de igual longitud que pueden obtenerse dividiendo tres varillas de 540; 480 y 360 mm, sin desperdiciar material?

A) 10 B) 15 C) 23
D) 35 E) 43

9. Si tenemos que llenar cuatro cilindros de capacidad 72; 24; 56 y 120 galones, respectivamente, ¿cuál es la máxima capacidad del balde que puede usarse para llenarlos exactamente?

A) 4 B) 12 C) 16
D) 6 E) 8

10. Hallar el valor de "n", si el MCM de los números: $A = 450 \times 75^n$ y $B = 75 \times 18^n$ tiene 550 divisores.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

11. Tres reglas de 200 mm de longitud cada una están uniformemente graduadas: la primera cada milímetro, la segunda cada 16/25 mm y la tercera cada 18/23 mm. Si se les hace coincidir en toda su extensión, ¿a qué distancia del origen coincidirán tres trazos de las reglas?

A) 114 mm B) 140 mm C) 141 mm
D) 144 mm E) 156 mm

12. Si: MCD(4A; 6B) = 20N; MCD(4B; 6C) = 24N, hallar N, sabiendo que el MCD de 4A; 6B y 9C es 280.

A) 20 B) 18 C) 15
D) 70 E) 27

13. La suma de los cuadrados de dos números es 5409 y su MCM es 360. Hallar el menor de los números.

A) 12 B) 15 C) 18
D) 60 E) 72

14. Se trata de formar un cubo de ladrillos cuyas dimensiones son 20 cm; 15 cm y 6 cm. ¿Cuántos ladrillos son necesarios para formar el cubo más pequeño posible?

A) 100 B) 120 C) 150
D) 240 E) N. A.

15. Hallar el valor de "n" en los números $A = 12 \times 45^n$ y $B = 12^n \times 45$, para que el MCM tenga 90 divisores.

A) 1 B) 4 C) 3 D) 2 E) 5

16. Hallar "x", si:
MCD(A; B) = x ; MCD(B; C) = x/2 ;
MCD(C; D) = x/4 ; MCD(A; B; C; D) = 12

A) 96 B) 72 C) 48
D) 24 E) N. A.

17. Hallar los números A y B sabiendo que con su MCM y su MCD cumplen:
(A + B)[MCM(A; B) + MCD(A; B)] = 1924

A) 24 y 8 B) 20 y 12 C) 18 y 8
D) 32 y 6 E) N. A.

18. Dos números al multiplicarse por un tercero se obtiene que su MCD es M_1 y cuando se dividen por dicho tercer número el MCD es M_2. Hallar el MCD de dichos números.

A) $\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}$ B) $\frac{M_2}{M_1}$ C) M_1M_2
D) $\frac{M_1}{M_2}$ E) $\sqrt{M_1M_2}$

19. El producto de 2 números enteros positivos es 360. La suma de los cocientes obtenidos al dividir cada uno de ellos por su MCD es 7 y el producto de estos cocientes es 10. Entonces el valor absoluto de la diferencia de estas es:

A) 2 B) 31 C) 18
D) 84 E) 54

20. Sabiendo que: MCD(N; 3N; N − 1) = 2N − 15, calcular MCM(N + 2; 3N + 1)

A) 40 B) 50 C) 60
D) 80 E) N. A.

21. Si: MCD(20A; 6B) = 48; MCD(3A; 30B) = 24, hallar: MCD(A; B).

A) 12 B) 8 C) 10
D) 6 E) 4

22. Dados tres números A, B y C se sabe que el MCD(A; B) = 240 y MCD(B; C) = 432; ¿cuál es el MCD(A; B; C)?

A) 48 B) 36 C) 24
D) 45 E) 30

23. Los números 3760 y 5500 se dividen por N, obteniéndose como residuos 16 y 28, respectivamente. ¿Cuántos valores puede tomar N?

A) 18 B) 9 C) 8
D) 7 E) 6

24. El producto de dos números es 48 384 y su MCD tiene 8 divisores. ¿Cuántas parejas de valores cumplen esta condición?

A) 11 B) 10 C) 12
D) 13 E) 14

25. Se tiene una superficie rectangular cuyas dimensiones son 528 m y 288 m; se desea cercar con alambre sujeto a postes equidistantes. ¿Cuál será el mínimo número de postes a utilizar?

A) 68 B) 34 C) 17
D) 136 E) 96

26. ¿Cuántos divisores compuestos comunes tienen los números 720 720; 840 840 y 600 600?

A) 128 B) 122 C) 121
D) 120 E) N. A.

27. ¿Cuántos números entre 300 y 1400 existen, de manera que al ser divididos por 8; 12 y 15 dejen como residuos 3; 7 y 10, respectivamente?

A) 8 B) 12 C) 11
D) 9 E) 10

28. ¿Cuál es el menor número mayor que 1000 que al dividirse por 18 y 24 da como residuo 15 y 21, respectivamente, pero al divídirse por 7 no da resto?

A) 1358 B) 1869 C) 1253
D) 1365 E) N. A.

29. Hallar la suma de dos números sabiendo que la suma de los cuadrados es 11 840 y el MCM de ambos números es 416.

A) 226 B) 360 C) 216
D) 144 E) 136

30. Sabiendo que el MCD de dos números positivos es 4 y que la suma de sus cuadrados es 2000, hallar la diferencia de dichos números.

A) 52 B) 24 C) 36
D) 26 E) 42

31. Hallar 2 números PESÍ a y b, tales que el MCM de a y b es 330 y a − b = 7.

A) 22 y 29 B) 55 y 46 C) 18 y 25
D) 22 y 15 E) 14 y 21

32. Hallar: a + b + c, si el MCD de $\overline{ab}$ y $\overline{(a+b)c}$ es 9 y el MCM de $\overline{ab}$ y $\overline{(a+b)c}$ es 270.

A) 10 B) 9 C) 8
D) 7 E) N. A.

33. Si: MCD(15A; 25A) + MCD(25B; 15B) = 2700, hallar: A + B.

A) 240 B) 360 C) 480
D) 540 E) N. A.

34. La suma de los números a y b es 651, el cociente entre su MCM y MCD es 108. Hallar a − b.

A) 11 B) 77 C) 483
D) 436 E) N. A.

35. Para 2 números se sabe que la suma de su MCD y su MCM es 770 y la diferencia de los mismos es 700. Hallar la suma de los 2 números, sabiendo que no son divisibles entre sí:

A) 420 B) 350 C) 490
D) 560 E) 700

36. El MCM de los números a y b es 88.
Si $a^2 + b^2 = 2000$, hallar: a + b.

A) 66 B) 52 C) 92
D) 48 E) 28

37. La suma de 2 números es a su diferencia como 8 es a 3, el MCM de los números es 55 veces su MCD. Hallar la suma de dichos números sabiendo que son los mayores posibles y que tienen 2 cifras.

A) 132 B) 144 C) 156
D) 127 E) 151

38. Al calcular el MCD de 2 cantidades mediante el algoritmo de Euclides se obtuvo como cocientes sucesivos los números 1; 3; 2; 3. Si la diferencia de los números es 84, calcular la suma.

A) 660 B) 760 C) 720
D) 840 E) N. A.

39. La suma de 2 números pares es 1248. Si los cocientes sucesivos obtenidos al hallar su MCD fueron 2; 6; 1; 1 y 2, hallar la diferencia de dichos números.

A) 852 B) 398 C) 396
D) 912 E) 456

40. El MCD de dos números es 13, se desea conocer cuáles son estos números sabiendo que los cocientes sucesivos que se obtienen al hallar el MCD son 11; 9; 1; 1; 2.

A) 6839 y 624 B) 7929 y 614
C) 7939 y 634 D) 6929 y 634
E) 6929 y 624

41. La diferencia del MCM y MCD de dos números que se les ha multiplicado por 5 es 2940 y el cociente del MCM y MCD de dichos números divididos por 2 cada uno es 7. Hallar el menor de los números.

A) 98 B) 686 C) 130
D) 150 E) 196

42. Si: MCD(15A; 25B) = 560 y MCD(25A; 15B) = 480, hallar el MCD(A; B).

A) 16 B) 24 C) 80
D) 8 E) N. A.

43. Si se tienen dos números cuya diferencia de cuadrados es 1024 y cuyo MCD es 8. Hallar la suma de dichos números.

A) 64 B) 72 C) 56
D) 80 E) 62

44. Hallar 2 números enteros sabiendo que el cociente de su suma por su MCD es 8 y el cociente de su producto por su MCD es 840. Dar la diferencia de los números.

A) 240 B) 160 C) 224
D) 112 E) N. A.

45. La suma de los cuadrados de 2 números es 1224. Si el MCM de ellos es 90, hallar la suma.

A) 54 B) 48 C) 64
D) 72 E) N. A.

46. El MCD de dos números es 28 y el MCM es 168, si uno es $\overset{\circ}{11} + 1$, hallar el otro número.

A) $\overset{\circ}{11} + 3$ B) $\overset{\circ}{11} + 5$ C) $\overset{\circ}{11} + 7$
D) $\overset{\circ}{11} + 9$ E) $\overset{\circ}{11} + 10$

47. El MCM de 45×60^n y $45^n \times 60$ es 12 veces su MCD. Hallar "n".

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

48. Hallar el mayor de 2 números tales que su MCD sea 36 y su MCM sea 5148.

A) 468 B) 486 C) 369
D) 396 E) 639

49. Se han colocado postes igualmente espaciados en el interior de un campo triangular cuyos lados miden 210; 270 y 300 metros. Sabiendo que hay postes en cada vértice y que la distancia entre poste y poste está entre 10 y 20 metros, calcular cuántos postes se colocaron.

A) 50 B) 51 C) 52
D) 53 E) 54

50. Determine el número de divisores comunes de los números 1 760 913 y 83 853.

A) 20 B) 23 C) 24
D) 27 E) 28

51. Si el MCD($\overline{a035}$; $\overline{1b57}$) = 23, hallar a + b.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) N. A.

52. Las circunferencias de las ruedas delanteras y posteriores de una carreta miden 2,8 y 4,8 metros. ¿Qué distancia deberá recorrer la carreta para que las ruedas delanteras den 52 vueltas más que las posteriores?

A) 174,72 m B) 3494,4 m C) 729,8 m
D) 1747,2 m E) 349,44 m

53. Si $A = 69^n \times 161^n$ y $B = 63^n \times 115^m$, hallar m × n, sabiendo que el MCD(A; B) tiene 192 divisores.

A) 35 B) 28 C) 12
D) 42 E) 14

54. Encontrar el mayor número "n", tal que si: 1200; 1671; 1985 y 3084, se dividen por "n" dejan el mismo residuo.

A) 314 B) 196 C) 441
D) 157 E) 126

55. Si: MCD($\overline{x48y}$; $\overline{5bb5}$) = 33, hallar: (x + y + b) sabiendo que es par.

A) 22 B) 14 C) 20
D) 16 E) 18

56. A un terreno de forma rectangular de 1848 m de largo y 1056 m de ancho, se le quiere cercar con alambre sujeto a postes equidistantes de manera que disten de 20 m a 30 m y que corresponda un poste en cada vértice y otros en cada uno de los puntos medios de los lados del rectángulo. ¿Cuántos postes se necesitan?

A) 264 B) 242 C) 263
D) 265 E) 243

57. ¿Cuál es el menor número entero que al dividirlo entre 14; 15; 18 y 25 da un mismo resto por exceso? La suma de sus cifras es:

A) 9 B) 12 C) 14
D) 15 E) 17

58. Hallar la suma de 2 números sabiendo que la diferencia de ellos es 52 y la diferencia entre su MCM y su MCD es 364.

A) 205 B) 208 C) 210
D) 245 E) 224

59. Al aplicar el método de divisores sucesivos para hallar el MCD de dos números se obtuvo como cocientes sucesivos: 2; 4; 1 y 2. Si su diferencia es 204, hallar la suma de dichos números.

A) 750 B) 630 C) 900
D) 680 E) 540

60. El producto de dos números es 3402 y su MCD es 9. Diga cuántos pares de números cumplen dichas condiciones.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

61. Dos números A y B tienen 6 divisores cada uno, su MCM y MCD contienen los mismos factores primos. Si A se triplica y B se duplica el MCM no se altera. Hallar el MCM.

A) 18 B) 24 C) 28
D) 32 E) 36

62. Al calcular el MCD de $\overline{(a+1)(b+1)c}$ y $\overline{(a-b)bc}$ por el algoritmo de Euclides se obtuvo como cocientes sucesivos 2; 3; 3 y 2, respectivamente. Hallar: a + b + c.

A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

63. Se divide A por B y el cociente resulta exacto e igual al cuadrado de su MCD, si además: MCM(A; B) − MCD(A; B) = 720, ¿cuál es la suma de las cifras de A?

A) 12 B) 9 C) 15
D) 18 E) 27

64. Si el MCM de A y B es igual a 2A y el MCD de ellos es A/3, hallar el valor de A, sabiendo además que: A − B = 168

A) 252 B) 504 C) 365
D) 168 E) 924

65. Al calcular el MCD de dos números primos entre sí mediante divisiones sucesivas se obtuvo como cocientes sucesivos: 2; 1; 3; 3 y 2. Hallar la diferencia de los números.

A) 7 B) 30 C) 83
D) 53 E) 23

66. Hallar dos números enteros sabiendo que su suma es igual a 6 veces su MCD y su producto es igual a 8 veces su MCM.

A) 30 y 5 B) 24 y 6 C) 48 y 8
D) 48 y 5 E) 40 y 8

67. Se divide un número N en dos partes, tales que su diferencia es 80 y que su MCM es 1056. ¿Cuál es el número?

A) 304 B) 384 C) 231
D) 272 E) 253

68. Sean A y B dos números enteros cuyo MCD es 12 y la diferencia de sus cuadrados es 20 880. Hallar A − B.

A) 56 B) 40 C) 62
D) 45 E) 60

69. El MCM de dos números es 30 030 y su MCD es 5. ¿Cuántos pares de números hay con esta propiedad?

A) 16 B) 8 C) 5
D) 4 E) 2

70. Tres números son como a; 21 y 32 de menor a mayor. El MCD de los 3 es 78 y el de los 2 menores es 546. Hallar la suma de las cifras del segundo.

A) 21 B) 18 C) 12
D) 15 E) 20

71. Para los números A y B, se cumple:

$$\frac{MCM(A;B)}{MCD(A;B)} = x \wedge MCM(A;B) + MCD(A;B) = y$$

Hallar el MCM(A; B) en función de "x" e "y".

A) (x + y) / xy   B) xy / (x – y)
C) xy / (x + 1)   D) (x – y) / xy
E) (x + y) / (x – y)

72. La distancia entre 2 líneas de una vereda es 1,20 m. Si se empieza a caminar pisando la raya con velocidad de 3 m/s y 75 cm de longitud de paso, ¿cuánto tiempo se debe caminar hasta pisar la raya por 34.ª vez, si se empezó a caminar con la derecha?

A) 26 s   B) 36 s   C) 46 s
D) 56 s   E) 68 s

73. Determinar: a + b, si el MCM de:
$\overline{(a-1)(2a-2)(a-1)}$ y $\overline{(a-1)(a-1)}$
es: $\overline{b(a+1)b}$

A) 12   B) 10   C) 5
D) 6   E) 11

74. Al dividir por exceso a $\overline{abcde}$ por 12; 14; 16 y 18 se obtuvo 4; 6; 8 y 10 como residuos respectivos; y al dividirlo por 17 no se obtuvo residuo. ¿Cuántos valores puede tomar $\overline{abcde}$?

A) 6   B) 5   C) 4   D) 3   E) 2

75. Al encontrar el mayor valor que podría tomar $\overline{abc}$, si MCD($\overline{n2n}$; $\overline{abc}$) = 17. Indicar: a + b + c.

A) 15   B) 18   C) 25
D) 23   E) 20

76. Un número entero de tres cifras y su complemento aritmético tienen como MCD a 200. ¿Cuántos números cumplen con esta condición?

A) 1   B) 2   C) 3   D) 4   E) 5

77. Si se sabe que: MCD($\overline{3a3}$; N) = 19, hallar cuántos valores puede tomar N, si es mayor que 200 y menor que 500.

A) 15   B) 12   C) 10
D) 18   E) 17

78. Si dos números enteros se multiplican por 4 su MCM y MCD aumentan en 11 934 y 54, respectivamente, ¿cuáles son los números? Dar el número de soluciones.

A) 1   B) 2   C) 3   D) 0   E) 4

79. Si 199 y 369 se dividen por "n", se obtiene por residuos a 7 y 9, respectivamente. ¿Cuántos valores puede tomar "n"?

A) 1   B) 2   C) 3   D) 4   E) 5

80. Si: MCM($\overline{ab}$; $\overline{cd}$) = 504 ∧ MCD($\overline{ba}$; $\overline{dc}$) = 9 hallar: b + d.

A) 2   B) 3   C) 4
D) 5   E) 6

81. Si se sabe que MCD(A; B) = k; MCD(C; D) = k/9; MCD(A; B; C; D) = 2, hallar "k".

A) 9   B) 18   C) 27
D) 36   E) N. A.

82. Si: MCD(A; B; C) = 2n/7; MCD(B; C; D) = 6n/7; MCD(A; B; C; D) = 18, hallar "n".

A) 9   B) 12   C) 15
D) 72   E) 63

83. Los cocientes sucesivos que se obtuvo al calcular el MCD de A y B por el algoritmo de Euclides fueron 2; 3 y 2. Si: A > B determinar el valor de:

$$\frac{2(A+B)}{(A-2B)}$$

A) 17   B) 18   C) 21
D) 23   E) 24

84. Al hallar el MCD de dos números por el método de divisiones sucesivas, se obtuvo como cocientes sucesivos: 2a; a; a/4; a y como residuos: 30a; 96; 6a. Calcular el menor de los números.

A) 152   B) 576   C) 510
D) 760   E) 242

85. Sean los números:

$$P = \underbrace{22...22}_{200\text{ cifras}}{}_{(7)} \quad \wedge \quad Q = \underbrace{22...22}_{300\text{ cifras}}{}_{(7)}$$

Hallar la suma de las cifras del MCD(P; Q) en el sistema de base 7.

A) 404_7 B) 403_7 C) 402_7
D) 401_7 E) 400_7

86. Hallar el valor de "m", para que el MCD de los números 156m y 143m sea 18.

A) 12   B) 14   C) 15
D) 16   E) 17

87. Hallar la suma de los divisores comunes de:
$3^{68} - 1$; $3^{60} - 1$ y $3^{64} - 1$

A) 1093   B) 364   C) 121
D) 40   E) 13

88. Dar el valor de "a", sabiendo que el MCM de los numerales $\overline{ab}$ y $\overline{(a+1)(b+1)}$ es 132.

A) 1   B) 2   C) 3   D) 4   E) 5

89. Sabiendo que: MCD($\overline{xyx}$; $\overline{zy44}$; $\overline{z4y1}$) = 13 hallar: x + y + z.

A) 17   B) 16   C) 15
D) 14   E) Menos de 14

90. ¿Cuántos números de 4 cifras existen tal que representados en base 6; 14 y 15 siempre terminan en cifra 2?

A) 43 B) 44 C) 45
D) 46 E) Menos de 43

91. ¿Cuál es el menor número de 5 cifras, tal que al dividirlo por 5; 6; 7 y 8 dejó como residuos respectivos: 2; 1; 2 y 5? Dar como respuesta la suma de sus cifras.

A) 13 B) 12 C) 11
D) 10 E) 15

92. Se tienen las siguientes sucesiones: 3; 8; 13; 18; ... y 5; 12; 19; 26; ... ¿Cuál es el cuarto término común de ambas sucesiones?

A) 188 B) 198 C) 178
D) 138 E) 128

93. La suma de dos números es 8 veces su MCD y su producto es 840 veces su MCD. Encontrar la menor diferencia posible de dichos números.

A) 128 B) 112 C) 144
D) 156 E) 136

94. Si el MCD de dos números es 7 y la diferencia de sus cuadrados es 3185, encontrar la menor suma que pueden tener los números.

A) 84 B) 91 C) 98
D) 105 E) 112

95. Hallar la menor diferencia posible de dos números, cuyo MCD es 48 y su MCM es 4368.

A) 480 B) 432 C) 384
D) 336 E) 288

96. El MCM de dos números es 504 y la suma de sus cuadrados es 68 688. Hallar la suma de las cifras del menor número.

A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

97. Encontrar la suma de dos números PESÍ, si los cocientes obtenidos al calcular su MCD por divisiones sucesivas son: 1; 7; 2; 2; 1; 2 y 3.

A) 1142 B) 1024 C) 1014
D) 1219 E) 1083

98. Cuál es el menor número de 3 cifras tal que él y el número con las cifras invertidas tengan como MCD 66 y que su diferencia sea $\overline{1a8}$. Dar como respuesta la mayor de sus cifras.

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

99. Calcular el producto de divisores del menor número, sabiendo que éste es el MCM de 15 enteros distintos.

A) 12^{15} B) 21^{15} C) 15^{12}
D) 15^{21} E) 36^{12}

100. Hallar el MCD de dos números de tres cifras consecutivas tal que las cifras del primero se encuentran en forma creciente y las del otro de manera descendente, se observa también que ambos números son múltiplos de 7.

A) 21 B) 24 C) 18
D) 27 E) 36

CLAVES

1. B	14. B	27. D	40. E	53. E	66. E	79. B	92. D
2. B	15. D	28. D	41. A	54. D	67. D	80. D	93. B
3. C	16. C	29. E	42. A	55. D	68. E	81. B	94. B
4. D	17. C	30. C	43. A	56. B	69. A	82. E	95. E
5. C	18. E	31. D	44. D	57. E	70. B	83. D	96. A
6. A	19. C	32. B	45. B	58. B	71. C	84. B	97. C
7. C	20. B	33. D	46. C	59. E	72. E	85. A	98. D
8. C	21. B	34. C	47. B	60. A	73. C	86. C	99. A
9. E	22. A	35. B	48. A	61. A	74. A	87. C	100. A
10. B	23. A	36. B	49. C	62. A	75. D	88. A	
11. D	24. A	37. B	50. C	63. D	76. D	89. C	
12. D	25. B	38. A	51. B	64. B	77. D	90. A	
13. B	26. C	39. E	52. E	65. D	78. B	91. D	

Potenciación y radicación

08 capítulo

Christoph Rudolff nació en 1499 en Jawor, región de Silesia y falleció en 1545 en Viena. Fue el autor del primer libro alemán de álgebra.

Rudolff fue desde 1517 a 1521 alumno de Henricus Grammateus —un escriba de Érfurt— en la Universidad de Viena y fue el autor de un libro sobre computación, bajo el título de *Behend und durch die hübsch Rechnung kunstreichen Regeln Algebre*.

Rudolff introdujo el uso del signo radical ($\sqrt{\ }$) en la raíz cuadrada. Se cree que esto se debió a que el símbolo se parecía a una «r» minúscula (por «radix»), aunque no hay evidencia directa. Cajori solo se limitó a decir que el «punto es el embrión de nuestro actual símbolo de raíz cuadrada», a pesar de que según él mismo «posiblemente, quizás probable» los símbolos posteriores a Rudolff no fueran puntos, sino erres.

Fuente: Wikipedia

POTENCIACIÓN

Es una operación abreviada de la multiplicación, que consiste en multiplicar un mismo número, llamado base, tantas veces como lo indica otro número llamado exponente.

Es decir: $P = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{\text{"n" veces}} = a^n$

Donde: a: base; n: exponente; $n \in \mathbb{Z}^+$
P: potencia

Ejemplo:

$$P = \underbrace{18 \times 18 \times \ldots \times 18}_{45\text{ veces}} = 18^{45}$$

CUADRADO PERFECTO

Un cuadrado perfecto es aquel número que resulta de multiplicar por sí mismo, 2 veces otro número.

Ejemplo:

El 144 es cuadrado perfecto, porque resulta de multiplicar a 12 dos veces por sí mismo.

Es decir: $12 \times 12 = 12^2 = 144$

Notación:

Un número cuadrado perfecto se denota por: k^2.

Condición necesaria para que un número sea k^2

Sea el número: $N = a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma$

Se cumple que: N será $k^2 \Rightarrow \alpha; \beta; \gamma$; son $\overset{\circ}{2}$.

Ejemplo:

El 324 es cuadrado perfecto.

Descomponiéndolo en factores primos: $324 = 2^2 \times 3^4$

Vemos que los exponentes son pares.

Criterios de exclusión de los cuadrados perfectos

Son reglas que debe cumplir un número para que sea cuadrado perfecto.

Sea N un número natural, tal que si:

N termina en:	N^2 termina en:
...1	...1
...2	...4
...3	...9
...4	...6
...5	...5
...6	...6
...7	...9
...8	...4
...9	...1
...0	...0

Podemos deducir las siguientes reglas:

I. Todo número natural que termina en las cifras: 1; 4; 5; 6; 9 o en una cantidad par de ceros, puede ser un cuadrado perfecto.

Ejemplo:

Son cuadrados perfectos:
144: Termina en 4
169: Termina en 9
400: Termina en 2 ceros

II. Todo número natural que termina en las cifras 2; 3; 7; 8 o en una cantidad impar de ceros nunca será cuadrado perfecto.

III. Todo número natural que termina en cifra 5, puede ser k^2, si y solo si, su cifra de decenas sea 2, y sus demás cifras formen un número que es el resultado de multiplicar dos números consecutivos.

Ejemplo:

$25^2 = 6\,2\,5$
→ Siempre es 2
→ Resulta de multiplicar dos números consecutivos: $2 \times 3 = 6$

$75^2 = \underbrace{5\,6}\,2\,5$
→ Siempre es 2
→ Resulta de multiplicar dos números consecutivos: $7 \times 8 = 56$

$115^2 = \underbrace{1\,3\,2}\,2\,5$
→ Siempre es 2
→ Resulta de multiplicar dos números consecutivos: $11 \times 12 = 132$

IV. Todo número impar que sea k^2, es de la forma $(\overset{\circ}{8} + 1)$, lo contrario no siempre es cierto.

Ejemplo:

Los siguientes números impares son k^2 y son de la forma: $\overset{\circ}{8} + 1$

$81 = k^2$ y $81 = \overset{\circ}{8} + 1$;
$169 = k^2$ y $169 = \overset{\circ}{8} + 1$
$1681 = k^2$ y $1681 = \overset{\circ}{8} + 1$

V. Todo número natural, múltiplo de "p" (p: número primo) y cuadrado perfecto, será también múltiplo de p^2.

Ejemplo:

Se tiene los siguientes números cuadrados perfectos:

$$36 = k^2 \begin{cases} \overset{\circ}{2} \\ \overset{\circ}{3} \end{cases} \Rightarrow \text{También será} \begin{cases} 2^2 = \overset{\circ}{4} \\ 3^2 = \overset{\circ}{9} \end{cases}$$

$$49 = k^2 \{ \overset{\circ}{7} \Rightarrow \text{También será} \{ 7^2 = \overset{\circ}{49}$$

Cuadrados perfectos especiales

Veremos los cuadrados de un número formado sólo por cifras 9 y los cuadrados de un número formado por cifras cero.

- Si la base está formado sólo por cifras 9.

$$9^2 = 81$$
$$99^2 = 9801$$

$$999^2 = 998001$$
$$9999^2 = 99980001$$
$$\underbrace{99...99}_{\text{"n" cifras}}{}^2 = \underbrace{99...99}_{(n-1)\text{ cif.}}8\underbrace{00...001}_{(n-1)\text{ cif.}}$$

- Si la base está formada por cifras 1.

$$11^2 = 121$$
$$111^2 = 12321$$
$$1111^2 = 1234321$$

Observación

Para los cuadrados de números formados por cifras cero sólo cumple hasta cuando la base tiene 9 cifras uno.

CUBO PERFECTO

Un cubo perfecto, es aquel número que resulta de multiplicar 3 veces por sí mismo, otro número.

Ejemplo:

El número 1331 es un cubo perfecto, porque resulta de multiplicar 11, tres veces por sí mismo:

$$11 \times 11 \times 11 = 11^3 = 1331$$

Notación:

Un número cubo perfecto se denota por: k^3.

Condición necesaria para que un número sea k^3

Sea el número: $N = a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma$

Se cumple que: N será $k^3 \Leftrightarrow \alpha; \beta; \gamma$ son $\overset{\circ}{3}$

Ejemplo:

El 216 es un cubo perfecto.

Descomponiendo en factores primos: $216 = 2^3 . 3^3$

Vemos que los exponentes de los factores primos son $\overset{\circ}{3}$.

Criterios de exclusión de los cubos perfectos

Son reglas que debe cumplir un número para que sea cubo perfecto.

Sea N un número natural, tal que si:

N termina en:	N^3 termina en:
...1	...1
...2	...8
...3	...7
...4	...4
...5	...5
...6	...6
...7	...3
...8	...2
...9	...9
...0	...0

Podemos deducir lo siguiente:

I. Un cubo perfecto puede terminar en cualquier cifra.

II. Si el número termina en cifra cero, ésta cantidad de ceros debe ser $\overset{\circ}{3}$ y el número formado por las demás cifras resulte un cubo perfecto.

Ejemplo:

$64\,000 = 40^3$

III. Todo número natural que termina en cifra 5, puede ser cubo perfecto, cuando la cifra de decenas es 2 o 7.

Ejemplo:

$15^3 = 3375$; $25^3 = 15\,625$

IV. Todo número natural que sea k^3, puede ser de la forma: $\overset{\circ}{9} - 1$; $\overset{\circ}{9}$ o $\overset{\circ}{9} + 1$

Ejemplo:

Analicemos los siguientes números k^3

$13^3 = 2197 = \overset{\circ}{9} + 1$

$12^3 = 1728 = \overset{\circ}{9}$

$11^3 = 1331 = \overset{\circ}{9} - 1$

RADICACIÓN

Es una operación inversa a la potenciación, que consiste en encontrar un número llamado raíz, tal que elevado a otro número llamado exponente, puede reproducir otro número llamado radicando.

$$\boxed{q = \sqrt[n]{N}}$$

Donde: $\sqrt{\ }$: signo radical; N: radicando; n: índice; q: raíz

Raíz cuadrada

La raíz cuadrada de un número entero positivo puede ser exacta o inexacta.

I. Raíz cuadrada exacta. Es aquella, en la que al elevar al cuadrado la raíz, reproduzca exactamente el radicando.

Es decir: $q^2 = N$; $q \in \mathbb{N}$; $n = 2$

Ejemplo:

Vemos que 36 es la raíz cuadrada exacta de 1296, porque $36^2 = 1296$.

II. Raíz cuadrada inexacta. Es aquella, en la cual existe residuo. Se puede calcular de dos maneras: por defecto o por exceso.

Ejemplo:

Sabemos que 152 no tiene raíz cuadrada exacta, pero se encuentra entre dos números que sí lo tienen: $12^2 < 152 < 13^2$

Luego la raíz cuadrada de 152 se puede expresar de dos maneras:

Por defecto: $152 = 12^2 + 8$

Por exceso: $152 = 13^2 - 17$

- **Por defecto.** Es aquella en la que el cuadrado de la raíz es menor que el radicando.

$$\boxed{N = q^2 + r}$$

Donde: q: raíz cuadrada por defecto
r: residuo por defecto

Ejemplo:

Expresamos a 800 como una raíz cuadrada por defecto: $800 = 28^2 + 16$

- **Por exceso.** Es aquella en la que el cuadrado de la raíz es mayor que el radicando.

$$N = (q + 1)^2 - r$$

Donde:
$q + 1$: raíz cuadrada por exceso
r': residuo por exceso

Ejemplo:

Expresamos a 800 como una raíz cuadrada por defecto: $800 = 29^2 - 41$

Propiedades

Sea **N** un número entero positivo que no tiene raíz cuadrada exacta.

i. El número N, se encuentra entre dos números, de raíces consecutivas, que sí tienen raíz cuadrada exacta.

$$q^2 < N < (q + 1)^2$$

ii. La suma de los residuos, por defecto y por exceso, siempre es igual al doble de la raíz por defecto más la unidad.

$$r + r' = 2q + 1$$

iii. El residuo máximo es el doble de la raíz por defecto.

$$r_{máx} = 2q$$

Raíz cúbica

La raíz cúbica puede ser exacta o inexacta.

I. Raíz cúbica exacta. Es aquella en la que al elevar al cubo, reproduzca exactamente el radicando.

Es decir: $q^3 = N$; $q \in \mathbb{Z}$; $N \in \mathbb{Z}$

Ejemplo:

Vemos que 12 es la raíz cúbica exacta de 1728, porque $12^3 = 1728$.

II. Raíz cúbica inexacta. Es aquella en la cual existe residuo. Se puede calcular de dos maneras, por defecto o por exceso.

Ejemplo:

Sabemos que 180 no tiene raíz cúbica exacta, pero se encuentra entre dos números que sí lo tienen.

$$5^3 < 180 < 6^3$$

Luego la raíz cúbica de 180 se puede expresar de dos maneras:

Por defecto: $180 = 5^3 + 55$

Por exceso: $180 = 6^3 - 36$

- **Por defecto.** Es aquella en la que el cubo de la raíz es menor que el radicando.

$$N = q^3 + r$$

Dónde: q: raíz cúbica por defecto
r: residuo por defecto

Ejemplo:

Expresamos a 648 como una raíz cúbica por defecto: $648 = 8^3 + 136$

- **Por exceso.** Es aquella en la que el cubo de la raíz es mayor que el radicando.

$$N = (q + 1)^3 - r'$$

Donde: $q + 1$: raíz cúbica por exceso
r': residuo por exceso

Ejemplo:

Expresamos a 648 como una raíz cúbica por exceso: $648 = 9^3 - 81$

Propiedades

Sea **N** un número entero que no tiene raíz cúbica exacta.

i. El número N, se encuentra entre dos números, de raíces consecutivas, que sí tienen raíz cúbica exacta. $q^3 < N < (q + 1)^3$

ii. La suma de los residuos, por defecto y por exceso, es igual al triple del cuadrado de la raíz por defecto más el triple de dicha raíz más la unidad. $r + r' = 3q^2 + 3q + 1$

iii. El residuo máximo es igual al triple del cuadrado de la raíz por defecto más el triple de dicha raíz. $r_{máx} = 3q^2 + 3q$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. ¿Cuántos números cuadrados perfectos de seis cifras existen, tales que comiencen con cifra 3 y terminan en cifra 4?

Resolución:

Sea el número: $\overline{3abcd4} = k^2$

Vemos que el número cumple:

$3 \times 10^5 \leq \overline{3abcd4} < 4 \times 10^5$

$300\,000 \leq k^2 < 400\,000$

Extrayendo la raíz cuadrada: $547,7 \leq k < 632,4$

Valores de k: $k = \{548; 549; \ldots; 632\}$

Para que k^2 termine en cifra 4, k debe terminar:

$\Rightarrow k = \ldots 2; \quad k = \ldots 8$

- Si k termina en cifra 2: $\underbrace{\{552, 562, \ldots, 632\}}_{9 \text{ números}}$
- Si k termina en cifra 8: $\underbrace{\{548, 558, \ldots, 628\}}_{9 \text{ números}}$

$\therefore$ Existen $9 + 9 = 18$ números

2. Si: $\overline{(a+1)(a)(a+3)(a+2)} = k^2$, hallar: "$a \times k$"

Resolución:

Analizando la última cifra:

La cifra $(a+2)$ puede tener los siguientes valores:
$$\begin{cases} 1 \Rightarrow a = -1 \\ 4 \Rightarrow a = 2 \\ 5 \Rightarrow a = 3 \\ 6 \Rightarrow a = 4 \\ 9 \Rightarrow a = 7 \end{cases}$$

De los cuales no cumple: $a = -1$ y $a = 7$

Reemplazando los valores posibles:

Si $a = 2$: $3254 \begin{cases} \text{Es } \overset{\circ}{2} \\ \text{Pero no es } \overset{\circ}{4} \end{cases} \Rightarrow$ No es k^2

Si $a = 3$: 4365 {La cifra de decenas no es 2

$\Rightarrow$ No es k^2

Si $a = 4$: $5476 = 74^2 \Rightarrow k = 74$

$\therefore a \times k = 4 \times 74 = 296$

3. Hallar "c + d", sabiendo que: $\overline{abcd}$ es cuadrado perfecto y que: $\overline{cd} + 4 = \overline{ab}$.

Resolución:

Sabemos que: $\overline{abcd} = k^2$

Descomponiendo en bloques:

$100 \times \overline{ab} + \overline{cd} = k^2$ ...(1)

Pero: $\overline{ab} = \overline{cd} + 4$

Reemplazando en (1): $100(\overline{cd} + 4) + \overline{cd} = k^2$

Efectuando y factorizando:

$101 \times \overline{cd} = k^2 - 400 = \underbrace{(k+20)(k-20)}_{\text{Dif. de los factores} = 40}$

De la igualdad, 101 y $\overline{cd}$ se diferencian en 40 unidades:

$\Rightarrow 101 - \overline{cd} = 40$

$\overline{cd} = 61 \Rightarrow \overline{ab} = 61 + 4 = 65$

El número buscado es: $\overline{abcd} = 6561 = 81^2$

$\Rightarrow c = 6; d = 1 \quad \therefore c + d = 7$

4. Hallar $\overline{abcd}$, si se cumple que: $\overline{14abcd64} = (\overline{abcd})^2$

Resolución:

De: $\overline{14abcd64} = (\overline{abcd})^2$

Descomponiendo en bloques:

$14\,000\,064 + 100 \times \overline{abcd} = (\overline{abcd})^2$

$14\,000\,064 = \underbrace{\overline{abcd}(\overline{abcd} - 100)}_{\text{Diferencia de los factores: } 100}$

Descomponiendo el primer residuo en dos factores que se diferencian en 100 unidades:

luego: $14\,000\,064 = 3792 \times 3692$

$\therefore \overline{abcd} = 3792$

5. Encontrar un cuadrado perfecto de 4 cifras sabiendo que los números formados por sus 2 primeras y por sus 2 últimas cifras son también cuadrados perfectos.

Resolución:

Sea el número $\overline{abcd} = k^2$ tal que $\begin{cases} \overline{ab} = k_1^2 \\ \overline{cd} = k_2^2 \end{cases}$

Hallamos la raíz cuadrada:

$\sqrt{\overset{\frown}{ab}\overset{\frown}{cd}}$ | pq

Sea "p" la primera cifra de la raíz tal que: $p^2 = \overline{ab}$

Valores de "p": 4; 5; ...; 9

Se debe cumplir: que "2p" tenga una sola cifra.

$\Rightarrow p = 4$

$\sqrt{a\,b\,c\,d}$ | 4

16 | $\overline{8q} \times q = \overline{cd}$

- - c d

Hallamos la segunda cifra de la raíz

$\Rightarrow q = 1$

Luego: $\overline{cd} = 81$ y $\overline{ab} = 16$

$\therefore$ El número es: 1681

6. Cuántos cubos perfectos posee la serie:

$24 \times 1; 24 \times 2; 24 \times 3; \ldots; 24 \times 250.$

Resolución:

De la serie: $24 \times 1; 24 \times 2; 24 \times 3; \ldots; 24 \times 250.$

Su enésimo término es:

$a_n = 24 \times n; n = \{1; 2; \ldots; 250\}$

Hallamos los términos, cubos perfectos: $a_n = k^3$

Reemplazando: $24 \times n = k^3$

$2^3 \times 3 \times n = k^3$

Los exponentes de los factores del primer miembro son $\overset{\circ}{3}$, se cumple: $n = 3^2 \times p^3$

Tenemos: $1 \leq 3^2 \times p^3 \leq 250$

Los valores de p son: $p = \{1; 2; 3\} \Rightarrow$ 3 valores

$\therefore$ Son 3 términos cubos perfectos.

7. ¿Cuál es el menor número entero por el que se debe multiplicar a 648 para que su producto sea cuadrado y cubo perfecto a la vez?

Resolución:

Descomponiendo en factores: $648 = 2^3 \times 3^4$

Sea N el número, tal que:

$648 \times N = k^2$ y k^3 (el número tiene raíz sexta exacta)

N debe contener los menores factores posibles, de manera que sus exponentes sean $\overset{\circ}{6}$

$2^3 \times 3^4(2^3 \times 3^2) = k^6$

$\therefore$ El menor valor de $N = 2^3 \times 3^2 = 72$

8. ¿Cuántos números de 3 cifras pueden ser residuos máximos de una raíz cúbica?

Resolución:

Sabemos que en una raíz cúbica: $r_{máx} = 3q^2 + 3q$

Si el $r_{máx}$ tiene 3 cifras se cumple:

$100 \leq 3q^2 + 3q < 1000$

$\frac{100}{3} \leq q(q+1) < \frac{1000}{3} \qquad 33,3 \leq q(q+1) < 333,3$

Los valores posibles de: $q = \underbrace{\{6; 7; ...; 17\}}_{12 \text{ números}}$

$\therefore$ Existen 12 números.

9. ¿Cuál es el menor número, entre el que debemos dividir al número octal $\overline{abab}_8$ para que el cociente sea cuadrado perfecto?

Resolución:

Del número $\overline{abab}_8$: $\overline{abab}_8 = 65 \times \overline{ab}_8$ ...(1)

Además: $10_8 \leq \overline{ab}_8 < 100_8$

$8 \leq \overline{ab}_8 < 64$ ...(2)

Sea N, el menor número, tal que se cumpla:

$\frac{65 \times \overline{ab}_a}{N} = k^2$

De (1) y (2): $N = 5$ y $\overline{ab}_8 = 13 = 15_8$

$\therefore$ El menor valor de $N = 5$

10. Encontrar un cuadrado perfecto de la forma $\overline{4abab}$. (a y b $\neq 0$). Hallar: a + b.

Resolución:

Por dato: $\overline{4abab} = k^2$

Al descomponer en bloques:

$40\,000 + 101 \times \overline{ab} = k^2 \Rightarrow 101 \times ab = k^2 - 200^2$

En factores: $101 \times ab = (k+200)\underbrace{(k-200)}_{k>200}$

Se deduce que uno de los factores contiene a 101 $\Rightarrow k = 204$ Al reemplazar: $\overline{4abab} = 204^2 = 41\,616$

$\therefore a + b = 7$

11. ¿Cuántos números menores que 10 000 al extraer su raíz cúbica dan como resto el máximo posible, siendo este múltiplo de 7?

Resolución:

Por dato: $N = q^3 + 3q^2 + 3q < 10\,000$ ...(1)

$N = \overset{\circ}{7}$ ...(2)

De (1): $q^3 + 3q^2 + 3q + 1 < 10\,001$

$(q+1)^3 < 10\,001$

$q + 1 < 21,5$

$q < 20,5$

Luego los valores de "q" que satisfacen (2) son:

$q = \{1; 3; 7; 8; 10; 14; 15; 17\}$

$\therefore$ Existen 8 números

12. Si: $\overline{abcd} = k^3$, con $d + 3c + 2b - a = 14$, hallar: $CA(k^2)$.

Resolución:

Del número: $\overline{abcd}$

Se cumple: $d + 3c + 2b - a = 14$ ...(α)

Se deduce que: $\overline{abcd} = \overset{\circ}{7}$

Luego: $\overline{abcd} = 7^3 \times n^3$

Además: $1000 \leq 7^3 \times n^3 < 10\,000$

Reduciendo: $2,9 \leq n^3 < 29,15$

Los valores de n: $n = \{2; 3\}$

Si: $n = 2 \Rightarrow \overline{abcd} = 7^3 \times 2^3 = 2744$

Reemplazando en (α):

$4 + 3(4) + 2(7) - 2 \neq 14$ No cumple

Si: $n = 3 \Rightarrow \overline{abcd} = 7^3 \times 3^3 = 9261$

Reemplazando en (α):

$1 + 3(6) + 2(2) - 9 = 14$ Si cumple

Luego: $\overline{abcd} = 9261 = k^3 \Rightarrow k = 21$

$\therefore CA(21^2 = 441) = 559$

13. ¿Cuántos números cuadrados perfectos de 4 cifras que terminan en cifra 4 existen en base 8?

Resolución:

Los números buscados son: $\overline{abc4}_8 = k^2$

Descomponiendo: $\overset{\circ}{8} + 4 = k^2$

Además: $1000_8 \leq k^2 < 10\,000_8$

En base decimal: $512 \leq k^2 < 4096$

$22,6 \leq k < 64$

Los valores de k: $k = \{23; 24; ...; 63\}$

Para que el valor de k^2 sea $\overset{\circ}{8} + 4$, los valores de k son:

$k = \overset{\circ}{8} + 2 = \{26; 34; ...; 58\} \Rightarrow$ 5 números

$k = \overset{\circ}{8} + 6 = \{30; 38; ...; 62\} \Rightarrow$ 5 números

$\therefore$ Existen 10 números

14. Se multiplican los 3 términos de una raíz cuadrada inexacta cuya raíz es 21 y se ha obtenido 46 830. ¿Cuánto se obtendrá si se suman dichos términos?

Resolución:

De una raíz cuadrada inexacta.

$N = 21^2 + r$ ...(1)

Por dato: $N \times 21 \times r = 46\,830$

$N \times r = 2230$ ...(2)

(1) en (2): $(441 + r)r = 2230 \Rightarrow r = 5$
En (1): $N = 446$
$\therefore\ N + q + r = 472$

15. En una raíz cuadrada inexacta, donde el residuo por exceso excede en 33 unidades al residuo por defecto, se sabe que la suma de la raíz y el residuo por defecto es 20. Hallar la suma de las cifras del radicando.

Resolución:
Del enunciado:
Por defecto: $N = q^2 + r$
Por exceso: $N = (q + 1)^2 - r'$
Por datos: $r' - r = 33$ ...(1)
$q + r = 20$ ...(2)
Por propiedad: $r + r' = 2q + 1$ ...(3)
(1); (2) en (3): $(20 - q) + (33 - q) = 2q + 1$
$\Rightarrow q = 13; r = 7 \Rightarrow N = 13^2 + 7 = 176$
$\therefore$ Suma de cifras: 14

16. Al extraer la raíz cúbica de un número se obtuvo como residuo, su residuo máximo, si éste residuo fue 918. ¿Cuál será el residuo por defecto cuando se extrae la raíz cuadrada de dicho número?

Resolución:
Sea N el número, tal que al extraer su raíz cúbica:
$N = q^3 + 3q^2 + 3q$ ...(1)
Por dato: $3q^2 + 3q = 918 \Rightarrow q^2 + q = 306$
Al resolver: $q = 17$
Reemplazando en (1): $N = 5831$
Extrayendo su raíz cuadrada, se cumple:
$N = 76^2 + 55$
$\therefore$ Residuo por defecto: 55

17. Hallar el número cubo perfecto de la forma $\overline{abcde}$ tal que se cumple: $a + c + e = 19$ y $b + d = 8$. Dar el valor de: $(a \times b)$

Resolución:
Del enunciado: $a + c + e = 19$ ...(1)
$b + d = 8$ ...(2)
(1) – (2): $(a + c + e) - (b + d) = 11$
Se deduce que: $\overline{abcde} = \overset{\circ}{11}$
Si el número es k^3 se cumple: $\overline{abcde} = 11^3 \times n^3$
Además: $10\,000 \le 11^3 \times n^3 < 100\,000$
Reduciendo: $7{,}5 \le n^3 < 75{,}1$
Hallamos los valores de n: $n = \{2; 3; 4\}$

- Si: $n = 2 \Rightarrow \overline{abcde} = 22^3 = 10\,648$
  Reemplazando en (1) y (2): No cumple
- Si: $n = 3 \Rightarrow \overline{abcde} = 33^3 = 35\,937$
  Reemplazando en (1) y (2): Si cumple
- Si: $n = 4 \Rightarrow \overline{abcde} = 44^3 = 85\,184$
  Reemplazando en (1) y (2): No cumple

El número buscado es: 35 937
$\therefore\ a \times b = 15$

18. ¿Cuántos números de 4 cifras existen que sean iguales a 11 veces el cuadrado de la suma de sus cifras?

Resolución:
Sea $\overline{abcd}$ el número, tal que:
$\overline{abcd} = 11(a + b + c + d)^2$ ...(1)
Se deduce que: $\overline{abcd} = \overset{\circ}{11} \Rightarrow a + c = b + d$
En (1): $\overline{abcd} = 44(a + c)^2$ ...(2)
Además: $1000 \le 44(a + c)^2 < 10\,000$
Reduciendo: $4{,}76 \le (a + c) < 15{,}1$
Los valores de a + c: $a + c = \{5; 6; 7; \ldots; 15\}$
Los que cumplen:
$\overline{abcd} = 44 \times 7^2 = 2156$ y $\overline{abcd} = 44 \times 9^2 = 3564$
$\therefore$ Existen 2 números

19. Hallar el número $\overline{abcd}$; sabiendo que $\overline{28abcd8}$ es un cubo perfecto. Dar como respuesta el valor de: $a + b + c + d$.

Resolución:
Por dato: $\overline{28abcd8} = k^3$ ...(1)
Vemos que se cumple: $2\,800\,000 \le k^3 < 3\,000\,000$
$140{,}9 \le k < 144{,}2$
Se tiene: $k = 142$
Reemplazando en (1):
$\overline{28abcd8} = 142^3 = 2\,863\,288 \Rightarrow \overline{abcd} = 6328$
$\therefore\ a + b + c + d = 19$

20. Si el número $\overline{31ab4}$ es cuadrado perfecto y el número $\overline{32ca8}$ es un cubo perfecto. Hallar: $a + b + c$.

Resolución:
Del cuadrado perfecto: $\overline{31ab4} = k^2$ ...(1)
Luego: $31\,000 \le k^2 < 32\,000$
$176{,}1 \le k < 178{,}8 \Rightarrow k = 178$
En (1): $\overline{31ab4} = 178^2 = 31\,684 \Rightarrow a = 6; b = 8$
Del cubo perfecto: $\overline{32ca8} = k^3$ ...(2)
Luego: $32\,000 \le k^3 < 33\,000$
$31{,}7 \le k < 32{,}1 \Rightarrow k = 32$
En (2): $\overline{32ca8} = 32^3 = 32\,768 \Rightarrow c = 7$
$\therefore\ a + b + c = 21$

21. ¿Cuántos términos de la siguiente serie:
$6 \times 1; 6 \times 2; 6 \times 3; \ldots; 6 \times 4000$; son cuadrados perfectos?

Resolución:
Serie: $6 \times 1; 6 \times 2; 6 \times 3; \ldots; 6 \times 4000$
Enésimo término: $a_n = 6 \times n$; $n = \{1; 2; \ldots; 4000\}$
Hallamos los términos k^2: $6 \times n = k^2 \Rightarrow n = 6p^2$
Luego: $1 \le 6p^2 \le 4000$
Los valores de p: $p = \underbrace{\{1; 2; \ldots; 25\}}_{25 \text{ números}}$
$\therefore$ Son 25 términos

22. Hallar el menor número múltiplo de 18 y tal que al sumarle sus 3/7 nos de como resultado un cubo perfecto. ¿Cuántos divisores tiene dicho número?

Resolución:

Sea N el menor número, tal que:

$N = \overset{\circ}{18} \Rightarrow N = 18n$ ...(1)

Además: $N + \frac{3}{7}N = k^3 \Rightarrow \frac{10}{7}N = k^3$

Reemplazando: $\frac{10}{7} \times 18 \times n = k^3$

Descomponiendo en factores: $\frac{2^2 \times 3^2 \times 5}{7} \times n = k^3$

Deducimos el menor valor de "n": n = 1050

En (1): $N = 18 \times 1050 = 18\,900 = 2^2 \times 3^3 \times 5^2 \times 7$

Hallamos la cantidad de divisores:

$D_N = 3 \times 4 \times 3 \times 2 = 72$ divisores

∴ El número tiene 72 divisores.

23. En una raíz cuadrada inexacta, donde el residuo por exceso excede en 105 unidades al residuo por defecto, se sabe que la suma de la raíz y el residuo por defecto es 108. Hallar la suma de las cifras del radicando.

Resolución:

Sea N el número, tal que expresado por:

Por defecto: $N = q^2 + r$

Por exceso: $N = (q+1)^2 - r'$

Por dato: $r' - r = 105$ ...(1)

$q + r = 108$ ...(2)

Por propiedad: $r + r' = 2q + 1$ ...(3)

De (1), (2) y (3): q = 80; r = 28; r' = 133

El número buscado es: $N = 80^2 + 28 = 6428$

∴ Σ cifras = 20

24. Hallar el número de la forma $\overline{ab81}$ que sea cuadrado perfecto. ¿Cuántos de estos números existen?

Resolución:

Por dato: $\overline{ab81} = k^2$ ...(1)

Al descomponer en bloques: $100 \times \overline{ab} = k^2 - 81$

Descomponiendo en factores:

$2 \times 2 \times 5 \times 5 = \overline{ab} = (k+9)(k-9)$

I. Si: $k + 9 = 100 \Rightarrow k = 91$

En (1): $\overline{ab81} = 91^2 = 8281$

II. Si: $k + 9 = 50 \Rightarrow k = 41$

En (1): $\overline{ab81} = 41^2 = 1681$

III. Si: $k - 9 = 50 \Rightarrow k = 59$

En (1): $\overline{ab81} = 59^2 = 3481$

∴ Existen 3 números

25. ¿Cuántos números de 4 cifras son cubos perfectos?

Resolución:

Sea N, un número de 4 cifras y k^3.

Se cumple: $1000 \le k^3 < 10\,000 \Rightarrow 10 \le k < 21,5$

Los valores de k: $\underbrace{\{10; 11; ...; 21\}}_{12 \text{ números}}$

∴ Existen 12 números

26. Sean los números: $A = \underbrace{11...11_5}_{40 \text{ cif.}}$; $B = \underbrace{22...22_5}_{20 \text{ cif.}}$

Calcular la suma de cifras de: $\sqrt{A-B}$ (Todas las operaciones en base 5)

Resolución:

De: $A = \underbrace{11...11_5}_{40 \text{ cif.}}$

Multiplicado por 4: $4A = \underbrace{44...44_5}_{40 \text{ cif.}} = 5^{40} - 1$

El valor de A será: $A = \frac{5^{40} - 1}{4}$

De: $B = \underbrace{22...22_5}_{20 \text{ cif.}}$

Multiplicado por 2: $2B = \underbrace{44...44_5}_{20 \text{ cif.}} = 5^{20} - 1$

El valor de B será: $B = \frac{5^{20} - 1}{2}$

Hallamos A − B:

$A - B = \frac{5^{40} - 1}{4} - \frac{5^{20} - 1}{2} = \frac{5^{40} - 2 \times 5^{20} + 1}{4}$

Vemos que: $A - B = \left(\frac{5^{20} - 1}{2}\right)^2$

Enseguida: $\sqrt{A-B} = \frac{5^{20} - 1}{2} = \frac{\underbrace{44...44_5}_{20 \text{ cifras}}}{2} = \underbrace{22...22_5}_{20 \text{ cifras}}$

∴ Suma de cifras $2 \times 20 = 40 = 130_5$

27. Hallar "A + B", si "A" es el menor número por el que se debe multiplicar a 27 216 para que sea cuadrado perfecto y "B" el menor número por el que deba multiplicar a 27 216 para que sea cubo perfecto.

Resolución:

Descomponiendo en factores: $27\,216 = 2^4 \times 3^5 \times 7$

Hallamos A, tal que: $2^4 \times 3^5 \times 7 \times A = k^2$

El menor valor de A: $3 \times 7 = 21$

Hallamos B, tal que: $2^4 \times 3^5 \times 7 \times B = k^3$

El menor valor de B: $2^2 \times 3 \times 7^2 = 588$

∴ A + B = 609

28. Sabiendo que el cuadrado de $\overline{bc}$ es $\overline{abbc}$, la suma de las cifras de la raíz cuadrada de $\overline{abc}$ es:

Resolución:

Como el cuadrado de $\overline{bc}$ es $\overline{abbc}$, se cumple:

$\overline{abbc} = (\overline{bc})^2$

Al descomponer en bloques: $\overline{ab00} + \overline{bc} = (\overline{bc})^2$

$\Rightarrow 100 \times \overline{ab} = (\overline{bc})^2 - \overline{bc} \Rightarrow 4 \times 25 \times \overline{ab} = \overline{bc}(\overline{bc} - 1)$

Se deduce que en ambos miembros existen dos factores consecutivos:

$4 \times 25 \times \overline{ab} = 75 \times 76$

$\overline{ab} = 3 \times 19$

$\Rightarrow \overline{ab} = 3 \times 19 = 57;\ \overline{bc} = 76$

El número $\overline{abc}$ es: $576 \Rightarrow \sqrt{\overline{abc}} = 24$

∴ La suma de sus cifras: 2 + 4 = 6

29. Sabiendo que el CA de un cuadrado perfecto de dos cifras es otro cuadrado perfecto, si la raíz cúbica de éste es exacta. Hallar la suma de las cifras del número original.

Resolución:

Sea $\overline{ab}$ un cuadrado perfecto; N es cuadrado y cubo perfecto a la vez. Por dato: $CA(\overline{ab}) = N$

Por definición: $100 - \overline{ab} = N$ $(N < 100)$

El cuadrado y cubo perfecto menor que 100: $N = 64$

Reemplazando: $100 - \overline{ab} = 64 \Rightarrow \overline{ab} = 36$

$\therefore$ Suma de cifras: $3 + 6 = 9$

30. Si el número por el que se debe multiplicar al numeral $\overline{abc5}$ para que resulte un cuadrado y cubo perfecto es 2025. Hallar: $a + b + c$

Resolución:

Si el producto es cuadrado y cubo perfecto a la vez entonces el resultado tiene raíz sexta exacta.

Se tiene: $\overline{abc5} \times 2025 = k^2$

Descomponiendo en factores: $\overline{abc5} \times 5^2 \times 3^4 = k^6$

Los factores contenidos en $\overline{abc5}$ son:

$5^4 \times 3^2 \Rightarrow \overline{abc5} = 625 \times 9 = 5625$

Luego: $a = 5$; $b = 6$; $c = 2$ $\quad \therefore a + b + c = 13$

31. Si: $2 + 6 + \ldots + (4n - 2) = \overline{68xy0}$; hallar: $x + y + n$

Resolución:

Tenemos: $2 + 6 + 10 + \ldots + (4n - 2) = \overline{68xy0}$

$\left(\dfrac{2 + (4n - 2)}{2}\right)n = \overline{68xy0} \Rightarrow 2 \times n^2 = \overline{68xy0}$ ...(1)

Se cumple: $68\,000 \leq 2n^2 < 69\,000$

$34\,000 \leq n^2 < 34\,50$

$184{,}3 \leq n < 185{,}7 \Rightarrow n = 185$

Reemplazando en (1): $2 \times 185^2 = \overline{68xy0}$

$68\,450 = \overline{68xy0} \Rightarrow x = 4;\ y = 5$

$\therefore$ El valor de: $x + y + n = 194$

32. Dado el cuadrado perfecto: $N = 44 \ldots 488 \ldots 89$

Si la suma de las cifras de la raíz cuadrado de N es 91, ¿cuántas cifras tiene N, si la mitad son 4 y la mitad menos uno son 8?

Resolución:

Si analizamos los siguientes cuadrados especiales:

$$67^2 = 4489$$
$$667^2 = 444\,889$$
$$6667^2 = 44\,448\,889$$

Se deduce que en la raíz, la cantidad de cifras 6 es una unidad menor que la cantidad de cifras 4 y dicha raíz termina en cifra 7.

Si N es: $N = \underbrace{44\ldots4}_{\text{"n" cifras}}\ \underbrace{88\ldots89}_{\text{"n - 1" cifras}}$

Su raíz cuadrada será: $\underbrace{66\ldots66}_{(n-1)\text{ cifras}}7$

La suma de sus cifras: $6(n - 1) + 7 = 91 \Rightarrow n = 15$

$\therefore$ La cantidad de cifras de N: $15 \times 2 = 30$

33. Si el numeral $\overline{aabb}_5$ es un cuadrado perfecto, hallar $3a + 2b$.

Resolución:

Por dato: $\overline{aabb}_5 = k^2$

Al descomponer polinómicamente: $150a + 6b = k^2$

Al factorizar: $6(25a + b) = k^2$ ...(1)

Se deduce que el factor 6 y otro que sea cuadrado perfecto está contenido en: $(25a + b)$

Es decir: $25a + b = \overset{\circ}{6}$

Respecto al módulo 6: $(\overset{\circ}{6} + 1)a + b = \overset{\circ}{6}$

Al reducir: $a + b = \overset{\circ}{6}$

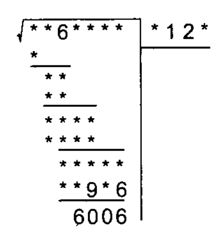
Valores posibles: $a + b = 6$

a	b
1	5
2	4
3	3
4	2
5	1

Al reemplazarlos en la expresión (1), vemos que solo cumple: $a = 2$; $b = 4$

$\therefore 3a + 2b = 14$

34. Hallar la suma de las cifras del radicando de la siguiente operación:



Se sabe que las cifras del radicando y las de la raíz son significativas y diferentes entre sí.

Resolución:

Vemos que la primera cifra del radicando es el cuadrado de la primera cifra de la raíz, esta puede ser:

$$1^2 = 1 \text{ o } 2^2 = 4 \text{ o } 3^2 = 9$$

Pero, como las cifras de la raíz son diferentes entre sí, esta solo puede ser 3.

Al reemplazar: $\sqrt{9*6*****}$ | 3 1 2 a

9

$**6$

Resultado de la 2.ª cifra $\Rightarrow$ 61

$*5**$

Resultado de la 3.ª cifra $\Rightarrow$ 1244

$*****$

Resultado de la 4.ª cifra $\Rightarrow$ $**9*6$

6006

i) 2.ª cifra de la raíz: $61 \times 1 = 61$

ii) 3.ª cifra de la raíz: $622 \times 2 = 1244$

iii) 4.ª cifra de la raíz: $624a \times a = **9*6$

Vemos que a puede ser 4 ó 6

- Si: $a = 4$
  $6244 \times 4 = 24\,976$, sí cumple
- Si: $a = 6$
  $6246 \times 6 = 37\,476$, no cumple
  $\Rightarrow a = 4$

Hallamos el radicando sabiendo que la raíz es 3124 y el residuo 6006.

Radicando: $3124^2 + 6006 = 9\,765\,382$

$\therefore$ La suma de las cifras del radicando es: 40

35. Sergio quiere plantar sus árboles igualmente espaciados en un terreno cuadrado de 234 m de lado. Sin embargo, se da cuenta que si la separación entre árbol fuese 1,2 m le faltarían 3000 árboles. ¿Qué distancia debe existir entre árbol y árbol de manera que le sobran 2655 árboles?

Resolución:

Teniendo en cuenta de que el número de árboles a lo largo (o a lo ancho) es una unidad más que el número de espacios entre árbol y árbol, hallamos el número de árboles que se necesitan, si la separación es de 1,2 m.

$$\left(\frac{234}{1,2}+1\right)^2 = 38\,416$$

El número de árboles con los que se cuentan es: $38\,416 - 3000 = 35\,416$

Sea d la distancia de separación entre árbol y árbol de manera que ahora le sobran 2655 árboles se cumple:

$$\left(\frac{234}{d}+1\right)^2 + 2655 = 35\,416 \Rightarrow \left(\frac{234}{d}+1\right)^2 = 32\,761$$

$$\Rightarrow \frac{234}{d} + 1 = 181 \Rightarrow \frac{234}{d} = 180 \Rightarrow d = 1,3$$

$\therefore$ La separación será de 1,3 m

36. ¿Cuántos cuadrados perfectos de 6 cifras en base 6 son múltiplos de 6?

Resolución:

Sea N el número de 6 cifras en base 6:

$100\,000_6 \leq N < 1\,000\,000_6 \Rightarrow 6^5 \leq N < 6^6$

$\Rightarrow 7776 \leq N < 46\,656$ ...(1)

Como N es cuadrado perfecto y múltiplo de 6, se cumple: $N = 6^2 \times k^2$

En (1): $7776 \leq 36k^2 < 46\,656 \Rightarrow 216 \leq k^2 < 1296$

Luego: $14,69 \leq k < 36$

Valores externos de k: $k = \underbrace{\{15; 16; 17; ...; 35\}}_{21\text{ números}}$

$\therefore$ Existen 21 números

37. Hallar la raíz cuadrada de 432, con un error, por exceso, menor que 2/9.

Resolución:

Para que el residuo sea menor de $\frac{2}{9}$:

$$\sqrt{432} = \frac{2}{9} \times \sqrt{\frac{81}{4} \times 432}$$

$$\sqrt{432} = \frac{2}{9} \times \sqrt{8748} \quad ...(1)$$

La raíz cuadrada por exceso: $\sqrt{8748} \approx 94$

En (1): $\sqrt{432} = \frac{2}{9} \times 94 = 20\frac{8}{9}$

$\therefore$ La raíz cuadrada es $20\frac{8}{9}$.

38. Hallar la raíz cuadrada de $\frac{51}{73}$ con un error, por defecto, menor que $\frac{1}{11}$.

Resolución:

Para que el residuo tenga un error menor que $\frac{1}{11}$

$$\sqrt{\frac{51}{73}} = \frac{1}{11} \times \sqrt{121 \times \frac{51}{73}} \Rightarrow \sqrt{\frac{51}{73}} = \frac{1}{11}\sqrt{\frac{6171}{73}}$$

$$\sqrt{\frac{51}{73}} = \frac{1}{11}\sqrt{84\frac{39}{73}} \quad ...(1)$$

La raíz cuadrada por defecto: $\sqrt{84\frac{39}{73}} \approx 9$

En (1): $\sqrt{\frac{51}{73}} = \frac{1}{11} \times 9 = \frac{9}{11}$

$\therefore$ La raíz es $\frac{9}{11}$.

39. Calcular la suma de las cifras de la raíz cúbica del número: $N = \underbrace{88...88}_{8\text{ cifras}}\,6\,\underbrace{00...00}_{8\text{ cifras}}\,2\,\underbrace{88...88}_{9\text{ cifras}}$, si está escrito en el sistema nonario.

Resolución:

Se tiene: $N = \underbrace{88...88}_{8\text{ cifras}}\,6\,\underbrace{00...00}_{8\text{ cifras}}\,2\,\underbrace{88...88_9}_{9\text{ cifras}}$

Descomponiendo en bloques:

$N = \underbrace{88...88_9}_{8\text{ cifras}} \times 10_9^{19} + 6 \times 10_9^{18} + 2 \times 10_9^9 + \underbrace{88...88_9}_{9\text{ cifras}}$

En el sistema decimal:

$N = (9^8 - 1) \times 9^{19} + 6 \times 9^{18} + 2 \times 9^9 + 9^9 - 1$

$N = 9^{27} - 9^{19} + 6 \times 9^{18} + 3 - 9^9 - 1$

$N = 9^{27} - 9 - 9^{18} + 6 - 9^{18} + 3 - 9^9 - 1$

$N = 9^{27} - 3 - 9^{18} + 3 - 9^9 - 1$

Reduciendo: $N = (9^9 - 1)^3$

La raíz cúbica de N: $9^9 - 1 = \underbrace{88...88_9}_{9\text{ cifras}}$

$\therefore$ Suma de cifras $8 \times 9 = 72$

40. Encontrar el menor número entero tal que al aumentarle sus $\frac{5}{7}$ partes dé como resultado un número cuadrado y cubo perfecto. Dar como respuesta la suma de sus cifras.

Resolución:

Sea N el menor número entero

Por dato: $N + \frac{5}{7}N = k^6$ (cuadrado y cubo perfecto)

$$\Rightarrow \frac{12}{7}N = k^6 \Rightarrow 2^2 \times \frac{3}{7} \times N = k^6$$

Los factores que contiene N:

$$N = 7 \times 2^4 \times 3^5 \Rightarrow N = 27\,216$$

$\therefore \Sigma$ cifras $= 2 + 7 + 2 + 1 + 6 = 18$

41. César dispone sus canicas formando un cuadrado y observa que le sobra 36 y si pone dos filas más a cada lado del cuadrado le faltan 136 canicas para completar el cuadrado. ¿Cuántas canicas tiene César?

Resolución:

Sea N el número de canicas y si pone "q" filas inicialmente: $N = q^2 + 36$ ...(1)

Con dos filas más: $N = (q + 2)^2 - 136$ ...(2)

Igualando (1) y (2): $q^2 + 36 = (q + 2)^2 - 136$

$\Rightarrow q^2 + 36 = q^2 + 4q + 4 - 136$

$\Rightarrow 168 = 4q \Rightarrow q = 42$

En (1): $N = 42^2 + 36 = 1800$

$\therefore$ El número de canicas: 1800

42. ¿Cuántos números de 5 cifras múltiplos del sistema senario son cubos perfectos?

Resolución:

Sea N el número de 5 cifras múltiplos de 12 y cubo perfecto en base 6.

$N = 12 \times n = 2^2 \times 3 \times n = k^3$

Los factores de n:

$n = 2 \times 3^2 \times m^3 \Rightarrow N = 2^3 \times 3^3 \times m^3$

Si el número tiene 5 cifras:

$10\,000_6 \leq 2^3 \times 3^3 \times m^3 < 100\,000_6$

$\Rightarrow 6^4 \leq 2^3 \times 3^3 \times m^3 < 6^5 \Rightarrow 6 \leq m^3 < 36$

Valores de m: 2; 3

$\therefore$ Existen 2 números

43. Un terreno cuadrado está sembrado con árboles equidistantes entre sí, se sabe que en el interior hay 476 árboles más que en el perímetro. ¿Cuántos árboles hay en total?

Resolución:

Sea "q" el número de árboles en cada lado

Número de árboles en el perímetro: $4q - 4$

Número de árboles en el interior: $(q - 2)^2$

Por condición: $(q - 2)^2 - (4q - 4) = 476$

$\Rightarrow q^2 - 4q + 4 - 4q + 4 = 476 \Rightarrow q^2 - 8q = 468$

Descomponiendo en factores:

$q(q - 8) = 18 \times 26 \Rightarrow q = 26$

$\therefore$ El número de árboles: $26^2 = 676$

44. Encontrar el menor número entero primo entre sí con 175 y que tiene 18 divisores cuadrados perfectos. Dar como respuesta la suma de sus cifras.

Resolución:

Sean N el menor número entero PESI con 175 ($175 = 5^2 \times 7$)

Por dato: $N \neq \overset{\circ}{5}$, $N \neq \overset{\circ}{7}$ y N tiene 18 divisores cuadrados perfectos.

Luego: $N = 2^4 \times 3^4 \times 11^2$

2^4	3^4	11^2
2^4	3^4	11^2
2^2	3^2	11^0
2^0	3^0	
3 ×	3 ×	2 = 18 divisores k^2

$N = 2^4 \times 3^4 \times 11^2 = 156\,816$

$\therefore \Sigma$ cifras = 27

45. Entre dos cuadrados perfectos consecutivos hay 218 números enteros. Hallar la suma de las cifras del menor número.

Resolución:

Del enunciado: $q^2; \underbrace{\ldots}_{248 \text{ números}}; (q + 1)^2$

Se cumple:

$q^2 + 249 = (q + 1)^2$

$q^2 + 249 = q^2 + 2q + 1 \Rightarrow q = 124$

Los números serán: $124^2 = 15\,376$; $125^2 = 15\,625$

$\therefore \Sigma$ cifras: $1 + 5 + 3 + 7 + 6 = 22$

46. ¿Cuántos cuadrados perfectos que terminan en cifra 9 existen, de modo que, al expresar en base 7 tengan tres cifras?

Resolución:

$N = k^2 = \ldots 9$

Se cumple: $k = \ldots 3$ o $k = \ldots 7$

Para que en base 7 tenga 3 cifras

$100_7 \leq N < 1000_7$

$\Rightarrow 49 \leq k^2 < 343 \Rightarrow 7 \leq k < 18{,}5$

$\Rightarrow k = 7; 13; 17$

$N = k^2 = 49, 169, 289$

$\therefore$ Existen tres números.

47. Si $\overline{abab1}$ y $\overline{4mnmn}$ son cuadrados perfectos, hallar $a + b + m + n$.

Resolución:

Del problema:

I. $\overline{abab1} = k^2$, descomponiendo:

$1000\overline{ab} + 10\overline{ab} + 1 = k^2$

$1010\overline{ab} = k^2 - 1 = (k + 1)(k - 1)$

Para $k = 201$: $\overline{ab} = 40$

II. $\overline{4mnmn} = p^2$

$\Rightarrow 40\,000 + 101\overline{mn} = p^2$

$\Rightarrow 101\overline{mn} = p^2 - 40\,000 = (p + 200)(p - 200)$

Para $p = 204$: $\overline{mn} = 16$

$\therefore a + b + m + n = 4 + 0 + 1 + 6 = 11$

48. Si el cuadrado de un número de dos dígitos se le resta el cuadrado del número formado por dos dígitos en orden invertido, el resultado es divisible por:

Resolución:

Número de dos dígitos: $\overline{ab}$

Número de dos dígitos en orden invertido: $\overline{ba}$

$\Rightarrow (\overline{ab})^2 - (\overline{ba})^2 = (\overline{ab} + \overline{ba})(\overline{ab} - \overline{ba})$

$= (10a+b + 10b + a)(10a + b - 10b - a)$

$= (11a + 11b)(9a - 9b)$

$= 11(a + b) \times 9\underbrace{(a - b)}_{\text{diferencia de los dígitos}} = \overset{\circ}{\overline{(a - b)}}$

49. Si $\overline{ab(b + 1)(b + 1)64} = (\overline{6c2})^2$, hallar la cantidad de divisores cuadrados perfectos que tiene $\overline{acbacb}$.

Resolución:

Se observa: $(\overline{6c2})^2 = \overline{6c2} \times \overline{6c2} = \ldots 64$

reconstruyendo:

$$\begin{array}{r} 6\ \ c\ \ 2\ \times \\ 6\ \ c\ \ 2\ \ \ \\ \hline *\ \ *\ (2c)\ 4\ \ \ \\ *\ \ *\ \ *\ (2c)\ \ \ \ \ \ \ \ \\ *\ \ *\ \ *\ \ *\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \\ \hline *\ \ *\ \ *\ \ *\ \ 6\ \ 4\ \ \ \end{array}$$

Se observa: $2c + 2c = \ldots 6 \Rightarrow 4c = \ldots 6$

donde: $c = 4$ o 9

$c = 4$: $642^2 = 412\,164$ No cumple

$c = 9$: $692^2 = 478\,864$ Sí cumple

Se obtiene: $a = 4$; $b = 7$; $c = 9$

$\Rightarrow \overline{acbacb} = 497\,497 = 7^2 \times 11 \times 13 \times 71$

cantidad de divisores $k^2 = 2$ $\therefore$ Solo 1 y 7^2

50. ¿Cuántos números de 6 cifras de la forma $\overline{abcdef}$ son cubos perfectos y cumple que: $a + c + e = b + d + f = 18$?

Resolución:

Dado $N = \overline{abcdef} = k^3$

I. $N = \overset{\circ}{3} + a + b + c + d + e + f$

$N = \overset{\circ}{3} + \underbrace{(a + c + e)}_{18} + \underbrace{(b + d + f)}_{18} = \overset{\circ}{3}$

Luego: $N = \overset{\circ}{3} \Rightarrow N = (\overset{\circ}{3^3}) = \overset{\circ}{27}$

II. $N = \overset{\circ}{11} + (b + d + f) - (a + c + e)$

$= \overset{\circ}{11} + 18 - 18 = \overset{\circ}{11}$

Luego: $N = \overset{\circ}{11} \Rightarrow N = (\overset{\circ}{11^3}) = \overset{\circ}{1331}$

Donde: $N = \overset{\circ}{27}$; $N = \overset{\circ}{1331}$

$\Rightarrow N = 27 \times 1331 \times k^3$

también: $100\,000 < \underbrace{N}_{27 \times 1331 \times k^3} < 1\,000\,000$

$\Rightarrow 1{,}4 < k < 3{,}0 \Rightarrow k = 2$ o 3

$k = 2$: $N = 287\,496$ cumple

$k = 3$: $N = 970\,299$ cumple

$\therefore$ Existen 2 números

51. ¿Cuántos cuadrados perfectos de 4 dígitos hay en base 8?

Resolución:

Sea $N = k^2 = \overline{abcd}_8$

$\Rightarrow \underbrace{1000_8}_{512} < \underbrace{\overline{abcd}_8}_{k^2} < \underbrace{10\,000_8}_{4096}$

$\Rightarrow 22{,}6 < k < 64 \Rightarrow k = 23; 24; 25; \ldots; 62; 63$

$\therefore$ Existen: $63 - 22$: 41 números

52. Si $(n + 5)$ es cuadrado perfecto de un entero mayor que 3 y n es impar, entonces: $(n + 1)(n^2 - 16)^2\sqrt{n + 5}$, es múltiplo de:

Resolución:

Del enunciado: $n + 5 = k^2 \Rightarrow n = k^2 - 5$

Luego: $A = (n + 1)\underbrace{(n^2 - 16)^2}_{(n + 4)^2(n - 4)^2}\sqrt{n + 5}$

Reemplazando el valor de n:

$A = (k^2 - 4)(k^2 - 1)^2(k^2 - 9)^2$

$A = \underbrace{(k + 2)(k - 2)(k + 1)^2(k - 1)^2(k + 3)^2(k - 3)^2 - k}_{7 \text{ números consecutivos}}$

$\Rightarrow A = (\overset{\circ}{7!})$ $\therefore$ $A = \overset{\circ}{5040}$

53. Si $\overline{aabb}_5$ es un cuadrado perfecto, hallar $a + b$.

Resolución:

$\overline{aabb}_5 = a \times 5^3 + a \times 5^2 + 5b + b$

$= 150a + 6b = 6(25a + b)$

Para que sea k^2: $6 \times \text{entero}^2$

$\Rightarrow \underbrace{25}_{\overset{\circ}{6}+1}a + b = \overset{\circ}{6} \Rightarrow a + b = \overset{\circ}{6}$

$\therefore$ Solo $a + b = 6$

54. Hallar la suma de las cifras de un número cuadrado perfecto de la forma $\overline{abcd}$, tal que $\overline{ab} - \overline{cd} = 16$.

Resolución:

$\overline{abcd} = k^2 \Rightarrow 100\overline{ab} + \overline{cd} = k^2$

Del dato: $\overline{ab} = 16 + \overline{cd}$

$\Rightarrow 1600 + 101\overline{cd} = k^2$

$\Rightarrow 101\overline{cd} = k^2 - 1600 = (k + 40)(k - 40)$

Igualando $k = 61$

Luego $\overline{cd} = k - 40 = 61 - 40 = 21$

$\Rightarrow \overline{cd} = 21 \wedge \overline{ab} = 37$

$\therefore$ Se pide: $3 + 7 + 2 + 1 = 13$

55. ¿Cuántos números menores que 10 000 existen tales que terminan en 36 y sean cuadrados perfectos?

Resolución:

Sea: $\overline{ab36} = k^2 \Rightarrow 100\overline{ab} = k^2 - 36$

Donde $100\overline{ab} = (k + 6)(k - 6)$ donde $(k - 6)$ es par

Se obtiene solución para

$k = 6$: $\overline{ab} = 0 \Rightarrow k^2 = 36$

$k = 44$: $\overline{ab} = 19 \Rightarrow k^2 = 1936$

$k = 56$: $\overline{ab} = 31 \Rightarrow k^2 = 3136$

$k = 94$: $\overline{ab} = 88 \Rightarrow k^2 = 8836$

$\therefore$ Existen 4 números.

56. Al extraer la raíz cuarta y la raíz cuadrada a N los restos fueron 250 y 121, respectivamente. Hallar N y dar como respuesta la diferencia de la mayor cifra con la menor cifra de N.

Resolución:

$N = k^4 + 250 = q^2 + 121 \Rightarrow 250 - 121 = q^2 - k^4$

$\Rightarrow 129 = (q - k^2)(q + k^2) \Rightarrow 3 \times 43$ o 1×129

- $3 \times 43 = (q - k^2)(q + k^2)$ $\left.\right\}$ $q = 23$; $k^2 = 20$

- $1 \times 129 = (q - k^2)(q + k^2)$ $\left.\right\}$ $q = 65$; $k^2 = 64$

Hallando N: $N = 65^2 + 121 = 4346$

$\therefore$ Se pide: $6 - 3 = 3$

57. Si el número $\overline{aacc}$ es un cuadrado perfecto, hallar la suma de los dígitos de dicho número.

Resolución:

Por condición

$k^2 = \overline{aacc}$ la suma de cifras es $2(a + c)$.

Descomponiendo por bloques

$k^2 = \overline{aa} \times 10^2 + \overline{cc} \Rightarrow k^2 = 11 \times a \times 10^2 + 11$

$k^2 = 11 \times \underbrace{(\overline{a0c})}_{\overset{\circ}{11}}$

Entonces: $\overline{a0c} = \overset{\circ}{11}$ (+ − +)

Por el criterio de divisibilidad por 11

$\Rightarrow a + c = \overset{\circ}{11} \quad \Rightarrow a + c = 11$

$\therefore$ La suma de cifras es: $2(11) = 22$

58. ¿Cuántos $N \in \mathbb{N}$ cumplen que el número 5 aproxima a $\sqrt{N}$ con un error menor que.

Resolución:

(Recta: 4,5 — 1/2 — 5 — 1/2 — 5,5)

Donde: $4{,}5 < k < 5{,}5$

$(4{,}5)^2 < k^2 < (5{,}5)^2 \Rightarrow 20{,}25 < k^2 < 30{,}25$

$\Rightarrow k^2 = 21; 22; ...; 29; 30 \quad \therefore$ 10 números

59. El número $\overline{390cd5}$ tiene 9 divisores, hallar $\sqrt{\overline{dc} - 1}$

Resolución:

$\overline{390cd5}$ posee una cantidad impar de divisores.

$\Rightarrow \underbrace{\overline{390cd5}}_{\text{producto de 2 números consecutivos.}} = k^2 = ...25 \Rightarrow d = 2$

$62 \times 63 = 3906 \Rightarrow c = 6$

$\therefore$ Luego: $\sqrt{\overline{dc} - 1} = \sqrt{26 - 1} = 5$

60. ¿Cuántos números de 5 cifras cuadrados perfectos son de la forma $\overset{\circ}{7} + 2$?

Resolución:

$N = \overline{abcde} = k^2 = \overset{\circ}{7} + 2$

$10\,000 \le N = k^2 < 100\,000$

$\Rightarrow 100 \le k < 316 \qquad ...(1)$

- Como $k^2 = \overset{\circ}{7} + 2 = \overset{\circ}{7} + 9$

  $\Rightarrow (k^2 - 9) = (k^2 - 3^2) = \overset{\circ}{7}$

  $\Rightarrow (k + 3)(k - 3) = \overset{\circ}{7}$

  Si $k + 3 = \overset{\circ}{7} \Rightarrow k = \overset{\circ}{7} + 4$

  Si $k - 3 = \overset{\circ}{7} \Rightarrow k = \overset{\circ}{7} + 3$

- Sea: $k = \overset{\circ}{7} + 4$ de (1):

  $k = \underbrace{102; 109; 116, ..., 312}_{31 \text{ números}}$

- Sea: $k = \overset{\circ}{7} + 3$ de (1)

  $k = \underbrace{101; 108; 115, ...; 311}_{31 \text{ números}}$

$\therefore$ Total de valores: $31 + 31 = 62$

61. Sea c(N) la cifra de las centenas del número entero N, por ejemplo c(23) = 0, c(2536) = 5. Hallar la cifra de las centenas del número:

$N = 987\,654\,421 \times (98\,765\,111)^2 + (9\,875\,555\,123)^3$

Resolución:

Según condición del problema

$C(\overline{...pqr}) = p$ (cifra de las centenas) Por dato:

$N = (987\,654\,421)(98\,765\,111)^2 + (9\,875\,555\,123)^3$

Como interesa la cifra de las centenas N, lo representamos en función del módulo 1000.

$N = (\overset{\circ}{1000} + 421)(\overset{\circ}{1000} + 111)2 + (\overset{\circ}{1000} + 123)^3$

$N = (\overset{\circ}{1000} + 421)(\overset{\circ}{1000} + 321) + (\overset{\circ}{1000} + 867)$

$N = (\overset{\circ}{1000} + 141) + (\overset{\circ}{1000} + 867)$

$N = \overset{\circ}{1000} + 008 \Rightarrow N = ...\underset{\uparrow}{0}08$

cifra de las centenas

$\therefore c(N) = 0$

62. ¿Cuántos números impares existen, tales que al calcular su raíz cuadrada aproximadamente con un error menor que 0,2 se obtiene 31,2 y al calcular su raíz cuadrada con un error menor que 0,25 se obtiene 30,9?

Resolución:

$31{,}2 - 0{,}2 < \sqrt{N} < 31{,}2 + 0{,}2$

$961 < N < 985{,}96 \qquad ...(1)$

También: $30{,}9 - 0{,}25 < \sqrt{N} < 30{,}9 + 0{,}25$

$939{,}43 < N < 970{,}32 \qquad ...(2)$

De (1) y (2): N es impar, N = 963, 965, 967, 969

$\therefore$ Existen 4 números

63. Si a un número entero se le aumenta 525 su raíz cuadrada aumenta en 3 unidades y el residuo se hace máximo. Si el residuo original fue "r" ¿Cuántos números cumplen con dicha condición?

Resolución:

Sea. $N = k^2 + r$

$N + 525 = (k + 3)^2 + r_{máx.}$

$\Rightarrow \underbrace{N}_{} + 525 = (k + 4)^2 - 1$

$k^2 + r \Rightarrow 510 + r = 8k = \overset{\circ}{8} \Rightarrow r = \overset{\circ}{8} + 2 = 8n + 2$

$\Rightarrow 510 + (8n + 2) = 8k \Rightarrow k = n + 64$

Además: $\underbrace{\text{resto}}_{8n+2} \le \underbrace{2\text{ raíz}}_{2(n+64)}$

$8n + 2 \le 2(n + 64) \Rightarrow n \le 21$

Cada valor de n origina un número: 0; 1; 2; ...; 21

$\therefore$ Existen 22 números.

64. Si a un entero se le adiciona 2791, su raíz cúbica, aumenta en una unidad, manteniendo el residuo inalterado. Hallar la raíz cúbica del número.

Resolución:

$\left.\begin{aligned} N &= k^3 + R \\ N + 2791 &= (k + 1)^3 + R \end{aligned}\right\}$ Restando

$\Rightarrow 2791 = (k+1)^3 - k^3 \quad \Rightarrow 2791 = 3k(k+1) + 1$

$\therefore$ Se obtiene: $k = 30$

65. Hallar el valor de: $E = \left(\dfrac{3,\widehat{17}}{0,06\hat{5}}\right)^{1/2}$ con un error por defecto menor que 0,875

Resolución:

$3,\widehat{17} = 3 + \dfrac{17}{99} = \dfrac{314}{99} \quad 0,06\hat{5} = \dfrac{65-6}{900} = \dfrac{59}{900}$

$0,875 = \dfrac{875}{1000} = \dfrac{7}{8}$

$E = \sqrt{\dfrac{314/99}{59/900}} = \sqrt{\dfrac{31400}{649}}$

Calculando E con aprox. 7/8

$\therefore E = \dfrac{7}{8}\underbrace{\sqrt{\dfrac{64}{49}\times\dfrac{31400}{649}}}_{7,9}\times\dfrac{7}{8}(7) = \dfrac{49}{8}$

66. Hallar los números enteros tales que al extraerles su raíz cuadrada se obtiene 101/13 y 103/13 como raíces por defecto y por exceso, respectivamente. Dar como respuesta la suma de los números.

Resolución:

Sea N un entero, del modo que: $N = \left(\dfrac{101}{13}\right)^2 + R$

Donde: $1 \le R < 2\left(\dfrac{101}{13}\right)$

$\Rightarrow \left(\dfrac{101}{13}\right)^2 + 1 \le \underbrace{\left(\dfrac{101}{13}\right)^2 + R}_{N} < \left(\dfrac{101}{13}\right)^2 + 2\left(\dfrac{101}{13}\right)$

$\Rightarrow 61,3 \le N < 75,8 \qquad ...(1)$

También: $N = \left(\dfrac{103}{13}\right)^2 - R'$

$2\left(\dfrac{103}{13}\right) > R' \ge 1 \Rightarrow -2\left(\dfrac{103}{13}\right) < -R' \le -1$

$\left(\dfrac{103}{13}\right)^2 - 2\left(\dfrac{103}{13}\right) < \underbrace{\left(\dfrac{103}{13}\right)^2 - R'}_{N} \le \left(\dfrac{103}{13}\right)^2 - 1$

$46,9 < N \le 61,7...$

De (1) y (2) no cumplen valores de N.

67. ¿Cuántos cuadrados perfectos que terminan en 6 hay entre 3600 y 10 000?

Resolución:

$N = k^2 = ...6 = \overset{\circ}{10} + 6$

$\Rightarrow k = \begin{cases}\overset{\circ}{10} + 4\\ \overset{\circ}{10} + 6\end{cases}$

$\Rightarrow 3600 < k^2 < 10\,000 \Rightarrow 60 < k < 100$

$k = \overset{\circ}{10} + 4 = 64; 74; 84; 94$

$k = \overset{\circ}{10} + 6 = \underbrace{66; 76; 86; 96}$

$\therefore$ Existen 8 números

68. Si: $\overline{104ab6} = k^4$, calcular: $a + b + k$

Resolución:

Agrupando de derecha a izquierda en grupos de 4 cifras

$\underbrace{\overline{104ab6}}_{2\text{ grupos}} \Rightarrow$ k posee 2 cifras $k = \overline{mn}$

Donde $10 \ge m^4 \Rightarrow$ solo $m = 1$

$\Rightarrow \overline{104ab6} = (\overline{1n})^4$ debe ser par

$\Rightarrow 18^4 = 104\,976$

$\therefore a + b + k = 9 + 7 + 18 = 34$

También: $104\,000 < k^4 < 105\,000$

$\Rightarrow 17,9 < k < 18,0 \Rightarrow k = 18$

69. Si $\sqrt[3]{\overline{6(a-1)(a-4)a}} = \overline{ca}$, hallar el valor de a^c.

Resolución:

$\sqrt[3]{\overline{6(a-1)(a-4)a}} = \overline{ca} \Rightarrow \overline{6(a-1)(a-4)a} = (\overline{ca})^3$

$\quad \hookrightarrow a - 4 \ge 0 \Rightarrow a \ge 4$

Luego: $\underbrace{6304}_{a=4} \le (\overline{ca})^3 \le \underbrace{6859}_{a=9}$

Sacando raíz cúbica: $18,5 \le \overline{ca} \le 19$

Solo $c = 1$, $a = 9 \Rightarrow 9^1 = 9 \quad \therefore a^c = 9$

70. Si al extraer la raíz cuadrada de $\overline{85ab}$ se obtiene 36 de residuo, hallar la suma de las cifras de $\dfrac{8+a}{5+b}$.

Resolución:

$\overline{85ab} = \underset{\text{raíz cuadrada}}{k}^2 + \underset{\text{residuo}}{36}$

$\Rightarrow 8500 \le k^2 + 36 < 8600$

$92 \le k^2 < 92,5$

Luego $k = 92$: $\overline{85ab} = 8500$

donde $a = 0$, $b = 0$:

$E = \dfrac{8+0}{5+0} = 1,6 \quad \therefore$ Suma de cifras: $1 + 6 = 7$

71. Dado el siguiente esquema de la raíz cuadrada, donde cada * representa una cifra:

```
√* 4 6 * 9 | * 8 *
 *
 * 4 6
 * 2 *
   * * * 9
   * * * *
       2 3
```

Hallar la suma de las cifras desconocidas del radicando

Resolución:

```
              a
√* 4 6 * 9 | * 8 *
 *  ≠9          └ Puede ser a = 1 ó 2,
 * 4 6  deja resto   su cuadrado es de una cifra
 * 2 *
   * * * 9
   * * * *
       2 3
```

$\Rightarrow *2* = (\overline{2\underset{\text{primera cifra}}{\ \ }})8 \times 8$

Si a = 1: $28 \times 8 = 224$ cumple ✓

Si a = 2: $48 \times 8 = 384$ no ✗

- Reemplazando y reconstruyendo:

```
√3 4 6 * 9 | 1 8 *
 1         | 2 8×8
 2 4 6     | 3 6 * × *
 2 2 4        └ Puede ser 4 o 6
   2 2 * 9
   * * * *  ← Acaba en 6: 36* × * ≈ 22...
       2 3               solo 6: 3 × 6 ≈ 22
```

- Se completa:

```
√3 4 6 1 9 | 1 8 6
 1         | 2 8×8
 2 4 6     | 3 6 6×6
 2 2 4
   2 2 1 9
   2 1 9 6
       2 3
```

Suma de cifras desc. del radicando: 3 + 1 = 4

72. El número $\overline{abcdefg}$ tiene cifras diferentes, su raíz cuarta y su raíz quinta son exactas y difieren en:

Resolución:

Sea N = $\overline{abcdefg}$

- $\underset{\text{exacta}}{\sqrt[4]{N}} = k \Rightarrow N = k^4$ Potencia cuarta perfecta
- $\underset{\text{exacta}}{\sqrt[5]{N}} = q \Rightarrow N = q^5$ Polémica quinta perfecta

Como: $N = k^4$ y $q^5 \Rightarrow N = a^{20}$ a la vez k^4 y q^5

Si a = 2: $N = 2^{20} = 1\ 048\ 576$

Para otro valor de "a", se obtienen potencias de más de 7 cifras.

$\therefore$ Se pide: $\underbrace{\sqrt[4]{2^{20}}}_{2^5} - \underbrace{\sqrt[5]{2^{20}}}_{2^4} = 16$

73. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Ei resto máximo en una raíz cúbica inexacta ya sea por defecto o por exceso es un múltiplo de 2.

II. El resto máximo de una raíz cúbica inexacta es múltiplo de 6.

III. Si a un número se le suma una cantidad de modo que al extraer su raíz cuadrada, su residuo por exceso es mínimo, entonces su residuo por defecto es máximo.

Resolución:

I. Resto máx $\sqrt[3]{\ } = (k+1)^3 - k^3 - 1 = 3k^2 + 3k$

Resto máximo = $3k(k+1)$

Producto de números consecutivos es siempre $\overset{\circ}{2}$

Resto máximo $\sqrt[3]{\ } = \overset{\circ}{2}$

II. De lo anterior:

Resto máximo $\sqrt[3]{\ } = \underbrace{3k(k+1)}_{\overset{\circ}{2}} = \overset{\circ}{6}$

III. Si $N = \underbrace{(k+1)^3}_{\substack{\text{raíz}\\ \text{por exceso}}} - \underbrace{1}_{\substack{\text{residuo}\\ \text{mínimo}}}$

$\Rightarrow N = (k^3 + 3k^2 + 3K + 1) - 1$

$= \underbrace{k^3}_{\substack{\text{raíz}\\ \text{por defecto}}} + \underbrace{3k(k+1)}_{\substack{\text{raíz}\\ \text{por exceso}}}$

$\therefore$ VVV

74. Si cada (*) representa a una cifra. Halle la suma de las cifras de la raíz.

```
√* * * * 2 | * 5 *
 *         |
 1 * *     |
 * * *
   * * * *
   2 * * *
         3
```

Resolución:

```
          a
√* * * * 2 | * 5 *
 *            └ Puede ser a = 1 o 2,
≠9 deja resto   porque su cuadrado
 1 * *          es una cifra
   └→ 1** > (2a)5 × 5
```

Solo a = 1: $\overline{1**} > 125$

Reemplazando:

```
√2 * * * 2 | 1 5 *
 1         | 2 5×5
 1 * *     | 3 0 * × *
 1 2 5
   * * * 2
   2 * * *  ← Debe ser 9
         3
```

$\Rightarrow 2{*}{*}9 = 307 \times 7 = 2149$

Raíz: 157 $\therefore$ Suma de cifras : 13

75. Al extraer la raíz cuarta de un número se obtiene como resto máximo 9854. Si a dicho número se le extrae su raíz cúbica se tiene

```
∛* * * * * * | * *
 x *         |
 * y * * *   |
   * z * *
   * * w *
```

Resolución:

Sean k^4 y $(k+1)^4$ dos potencias cuartas

$\Rightarrow$ el número anterior a $(k+1)^4$ tendrá raíz cuarta igual a k y resto máximo:

$N = k^4 + r_{\text{máx.}} = \underbrace{(k+1)^4 - 1}_{\text{anterior a}(k+1)^4}$

$\Rightarrow k^4 + r_{\text{máx}} = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 - 1$

Resto máximo $\sqrt[4]{\ } = 4k^3 + 6k^2 + 4k = 9854$

$4k^3 + 6k^2 + 4k = 2 \times 13 \times 379$

$\Rightarrow k(2k^2 + 3k + 2) = 13 \times 379$

Se identifica: k = 13

$\Rightarrow$ El número es $(13+1)^4 - 1$

N = 38 415, se extrae $\sqrt[3]{\ }$

$$\begin{array}{l|l} \sqrt[3]{38415} & 33 \\ \underline{27} & x = 2 \\ 11415 & y = 1 \\ \underline{\ \ 8937} & z = 9 \\ \ \ 2478 & w = 7 \end{array}$$

$\therefore\ x + y + z + w = 19$

76. La diferencia de dos cuadrados perfectos de 4 cifras cada uno es 5320 y la diferencia entre los complementos aritméticos de sus raíces cuadradas es 38. ¿Cuál es la suma de cifras del menor de los cuadrados?

Resolución:

$N_1 = \overline{abcd} = (\overline{mn})^2$

$N_2 = \overline{efgh} = (\overline{pq})^2$

$N_1 - N_2 = (\overline{mn})^2 - (\overline{pq})^2 = 5320$

$\Rightarrow\ (\overline{mn} + \overline{pq})(\overline{mn} - \overline{pq}) = 5320$ ...(1)

También: $CA(\underbrace{\sqrt{N_2}}_{\overline{pq}}) - CA(\underbrace{\sqrt{N_1}}_{\overline{mn}}) = 38$

$(100 - \overline{pq}) - (100 - \overline{mn}) = 38$

$\Rightarrow\ \overline{mn} - \overline{pq} = 38$ ...(2)

En (1): $(\overline{mn} + \overline{pq}) \times 38 = 5320$

Luego: $\overline{mn} + \overline{pq} = 140$ $\quad \overline{mn} = 89$

$\overline{mn} - \overline{pq} = 38$ $\quad \overline{pq} = 51$

Los números cuadrados perfectos:

$\overline{abcd} = 89^2 = 7921$

$\overline{efgh} = 51^2 = 2601$ (menor)

$\therefore$ Suma de cifras del menor: $2 + 6 + 0 + 1 = 9$

77. Si $\overline{(x + y)zz(x - 2)5}$ es un número de 5 cifras que es igual al cubo de $\overline{xy}$, hallar $x + y + z$

Resolución:

Si $\overline{(x + y)zz(x - 2)5} = \overline{xy}^3$

Se deduce que $y = 5$ y como $(x + y)$ es una sola cifra ≤ 9, se deduce que $x \leq 4$ y como la cifra de decenas $(x - 2)$ debe ser 2 o 7.

x sería 4 o 9, luego: $x = 4$

El número sería: $\overline{9zz25} = 45^3 = 91\,125 \Rightarrow z = 1$

$\therefore\ x + y + z = 5 + 4 + 1 = 10$

78. Hallar el número de 5 cifras de la forma $\overline{abcde}$ sabiendo que es un cubo perfecto y que:

$$a + c + e = 19 \text{ y } b + d = 8$$

Resolución:

Dato: $\overline{abcde} = k^3$

Se deduce que $\overline{abcde}$ es $\overset{\circ}{3}$ porque la suma de sus cifras:

$$a + b + c + d + e = 19 + 8 = 27 = \overset{\circ}{3}$$

Luego $\overline{abcde}$ también debe ser $\overset{\circ}{3} = \overset{\circ}{27}$ ...(α)

Asimismo: $\overline{abcde}$ es $\overset{\circ}{11}$ porque:

$(a + c + e) - (b + d) = 19 - 8 = 11 = \overset{\circ}{11}$

$\overline{abcde}$ también debe ser $\overset{\circ}{11} = 1331$ ...(β)

De (α) y (β):

$\overline{abcde} = 3^3 \times 11^3 \times n^3$, siendo n entero

$\overline{abcde} = 27 \times 1331 \times n^3 = 35\,937 \times n^3$, n debe ser 1

$\therefore\ \overline{abcde} = 35\,937$

79. Hallar el número entero positivo N sabiendo que es cubo perfecto y que dividido entre 43 da un cociente primo absoluto y un residuo igual a 1.

Resolución:

Sea: $N = k^3$ (k es entero positivo)

Por dato: $k^3 = 43p + 1$ (p es número primo)

o $k^3 - 1 = 43p$

Factorizando la diferencia de cubos

$k^3 - 1 = (k - 1)(k^2 + k + 1)$

$\therefore\ (k - 1)(k^2 + k + 1) = 43p$

Analizando las posibilidades:

I. $k - 1 = 43 \Rightarrow k = 44$

$\Rightarrow k^2 + k + 1 = 1981 = \overset{\circ}{7} \neq p$ (No)

II. $k - 1 = p \Rightarrow k^2 + k + 1 = 43$

$\Rightarrow k(k + 1) = 42$ y $k = 6$ y $p = 5$

$N = 6^3 = 216$

III. $k - 1 = 1 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow k^2 + k + 1 = 3 \neq 43p$ (No)

IV. $k^2 + k + 1 = 1 \Rightarrow k = 0$ (No)

$\therefore\ N = 216$

80. Hallar los cinco menores múltiplos de 15 consecutivos que sumados dan un cubo perfecto y señalar el menor de dichos números.

Resolución:

Sean los números múltiplos de 15.

15k, 15k + 15, 15k + 30, ...

15k, 15(k + 1), 15(k + 2), ...

La suma de todos estos es:

$S = 15k + 15(k + 1) + 15(k + 2) + \ldots$

Pero piden solo cinco sumandos, entonces:

$S = 15k \times 5 + 15(1 + 2 + 3 + 4)$

$S = 15[5k + 10]$

$S = 3 \times 5^2\underbrace{(k + 2)}_{3^2 \times 5} = r^3$ (dato)

$3^2 \times 5 \leftarrow$ para que S sea un cubo perfecto

Luego: $k + 2 = 45 \Rightarrow k = 43$

$\therefore$ El menor número que cumple: $15(43) = 645$

81. Hallar un cubo perfecto múltiplo de 5 de la forma $\overline{abcde}$ donde: $2c + e - b = 19$, $d - a = 3 \wedge \overline{bc} = \overset{\circ}{7}$

Resolución:

Si $\overline{abcde} = k^3 = \overset{\circ}{5} \Rightarrow e$ ↗ $0 \Rightarrow d = 0$ no!!

↘ 5 ok $\Rightarrow d =$ ↗ 2 no!! ; ↘ 7 ok

Luego: $d = 7$, $e = 5$, $a = 4$

Dato: $2c + e - b = 19$

$2c - b = 14$ ...(1)

Dato: $\overline{bc} = \overset{\circ}{7}$ ...(2)

De (1) y (2): $b = 2$; $c = 8$

Luego el número $\overline{abcde} = 42\ 875$

82. Cuántos cubos perfectos hay en la siguiente sucesión: $24 \times 1; 24 \times 2 ; 24 \times 3 ; 24 \times 4; \ldots; 24 \times 500$

Resolución:

$t_n = 24n$ donde $n = 1; 2; ...; 500$

$t_n = 2^3 \times 3 \times n = k^3 \Rightarrow n = 3^2 \times m^3$

Donde: $3^2 \times m^3 < 500 \Rightarrow m \leq 3 \Rightarrow m = 1; 2; 3$

$\therefore$ Existen 3 cubos perfectos.

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2006 - II)

Determinar la suma de todos aquellos números naturales tales que su raíz cuadrada, con una aproximación menor de $\frac{3}{5}$, es 4,8.

A) 230 B) 259 C) 282
D) 289 E) 312

Resolución:

Trabajando con los datos del problema:

$$8 \times \frac{3}{5} < \sqrt{N} < 9 \times \frac{3}{5} \Rightarrow 23{,}04 < N < 29{,}16$$

Entonces: N puede tomar los siguientes valores:

24; 25; 26; 27; 28; 29

Por exceso:

$$7 \times \frac{3}{5} < \sqrt{N} < 8 \times \frac{3}{5} \Rightarrow 17{,}64 < N < 23{,}04$$

$N = 18; 19; 20; 21; 22; 23$

Finalmente, sumando estos valores (números naturales):

$18 + 19 + 20 + 21 + 22 + 23 = 282$

Clave: C

PROBLEMA 2 (UNI 2007 - I)

Halle el valor de $a + b + c + d$, si al extraer la raíz cuadrada de $\overline{14abc64}$ se obtiene $\overline{abcd}$.

A) 17 B) 18 C) 19
D) 20 E) 21

Resolución:

Por dato:

$(\overline{abcd})^2 = \overline{14abcd64}$

$(\overline{abcd})^2 = 14\ 000\ 064 + (\overline{abcd})(100)$

$(\overline{abcd})^2 - (\overline{abcd})(100) = 14\ 000\ 064$

$(\overline{abcd})\,[(\overline{abcd}) - 100] = 14\ 000\ 064$

$(\overline{abcd})\,[(\overline{abcd}) - 100] = 2^6 \times 3 \times 13 \times 71 \times 79$

$(\overline{abcd})\,[(\overline{abcd}) - 100] = 2^4 \times 3 \times 79)(2^2 \times 13 \times 71)$

$(\overline{abcd})\,[(\overline{abcd}) - 100] = (3792)(3692)$

Luego: $\overline{abcd} = 3792$

$\therefore\ a + b + c + d = 3 + 7 + 9 + 2 = 21$

Clave: E

PROBLEMA 3 (UNI 2007 - II)

¿Cuántos números de tres cifras tienen la raíz cuadrada y la raíz cúbica con el mismo residuo no nulo?

A) 52 B) 53 C) 54
D) 55 E) 56

Resolución:

N: n.° de 3 cifras

Del enunciado se deduce:

$N = k^6 + r$, de donde k solo puede ser 3

$N = 3^6 + r$

$N = 27^2 + r = 9^3 + r$

Acotando: $27^2 < 27^2 + r < 28^2 \wedge 9^3 < 9^3 + r < 10^3$

$0 < r < 55 \wedge 0 < r < 271$

$\Rightarrow r = \{1; 2; 3; ...; 54\}$

$\therefore$ Existen 54 números

Clave: C

PROBLEMA 4 (UNI 2008 - I)

Se da un número positivo que no tiene raíz cúbica exacta. Si a este número se le disminuye en 721, entonces su raíz cúbica disminuye en una unidad, pero el residuo no se altera. Determine la suma de las cifras de la diferencia entre el número y el residuo.

A) 16 B) 17 C) 18
D) 19 E) 20

Resolución:

Sea N un número positivo. Al no tener raíz cúbica exacta, tenemos:

$\sqrt[3]{N}\ \underline{|\ k}$
r

$N = k^3 + r$ ...(I)

Luego, se le disminuye en 721

$\sqrt[3]{N - 721}\ \underline{|\ k - 1}$
r (mismo residuo)

$N - 721 = (k - 1)^3 + r$

$N = (k - 1)^3 + r + 721$ ...(II)

Igualamos las expresiones I y II:

$k^3 + r = (k - 1)^3 + r + 721 \Rightarrow k = 16$

Como nos piden la suma de cifras de $(N - r)$:

$N - r = (k^3 + r) - r = k^3$

$k^3 = 16^3 = 4096$

∴ La suma de cifras es 19

Clave: D

PROBLEMA 5 (UNI 2010 - I)

Determine el valor de a + b − c, si se tiene que:
$(\overline{ab})^3 = \overline{1c8ab}$

A) −1 B) −2 C) 1 D) 2 E) 3

Resolución:

Como: $\overline{1c8ab} = (\overline{ab})^3$

Los valores que puede tomar b: b = {1; 4; 5; 6; 9}

No tomamos al cero, pues se tendría un numeral de tres ceros.

Luego se deduce que: $20^3 < \overline{1c8ab} < 30^3 \Rightarrow a = 2$

Entonces:

$\overline{1c82b} = (\overline{2b})^3 \Rightarrow \overline{1c800} = (\overline{2b})^3 - \overline{2b}$

$\overline{1c800} = \overline{2b}(\overline{2b} - 1)(\overline{2b} + 1) = \left\langle \begin{matrix} \overset{\circ}{8} \\ \overset{\circ}{25} \end{matrix} \right.$

De donde la única posibilidad es que:

$b = 4 \Rightarrow c = 3$

$\therefore\ a + b - c = 3$

Clave: E

PROBLEMA 6 (UNI 2011 - I)

¿Cuántos números enteros menores que 100 existen que son cubos perfectos y que al ser multiplicados por 3 se convierten en cuadrados perfectos?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Resolución:

Si N = cubo perfecto: $K^3 < 100$

$K = \{1; 2; 3; 4\}$ en $\mathbb{N}^{(+)} = \{1; 2; 3; \ldots\}$

Además: $\underbrace{3N} = 3q^3 = \{3; 24; \textcircled{81}; 192\}$

cuadrado perfecto ⟶ 81

$N = 3^3 = 27$

∴ Existe una sola solución en $\mathbb{N}^{(+)}$

Clave: A

PROBLEMA 7 (UNI 2011 - II)

Sea: $2 \times \overline{ab} + 6 \times \overline{ab} + 12 \times \overline{ab} + 20 \times \overline{ab} + \ldots + 72 \times \overline{ab}$ un número natural cuya cantidad de divisores es impar. ¿Cuántos valores puede tomar $\overline{ab}$?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución:

$N = \overline{ab}(1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \ldots + 8 \times 9)$

$\overline{ab}\left(\dfrac{8 \times 9 \times 10}{3}\right) = 240 \times \overline{ab}$

$N = 2^4 \times 3 \times 5 \times \overline{ab} = k^2$ (tiene cantidad impar de divisores)

$\overline{ab} = 3 \times 5 \times Q^2 \Rightarrow \overline{ab} = 15Q^2 \begin{cases} 15(1)^2 = 15 \\ 15(2)^2 = 60 \end{cases}$

∴ Existen 2 valores.

Clave: B

PROBLEMA 8 (UNI 2013 - II)

Las raíces cúbicas inexactas de dos enteros positivos son dos números consecutivos y sus residuos, en cada caso, son los máximos posibles. Halle la suma de estos números si la diferencia de sus residuos es 54.

A) 1416 B) 1524 C) 1727
D) 1836 E) 1976

Resolución:

Sean A y B los números:

$\sqrt[3]{A}\ \underline{|\ k}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{B}\ \underline{|\ k+1}$

$r_{máx} = 3(k)(k + 1)$ $\qquad$ $r_{máx} = 3(k + 1)(k + 2)$

Dato: $3(k + 1)(k + 2) - 3(k)(k + 1) = 54 \Rightarrow k = 8$

Luego: $A = (8 + 1)^3 - 1 \wedge B = (9 + 1)^3 - 1$

$A = 728 \wedge B = 999$

Piden: $A + B = 1727$

Clave: C

PROBLEMA 9 (UNI 2014 - II)

Sea

```
 √17abcd9 | ****
  1       |
 -7a      |
  **      |
  -8bc    |
   ***    |
   -26d9  |
    **6*  |
    ---e  |
```

Donde a, b, c, d y e corresponden a un solo dígito y * puede tomar diferentes valores de un dígito. Determine el valor de:

$$E = e + d - c + b - a$$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Resolución:

```
Dato: √ 1 7 a b c d 9 | [1][3][3][1]
        1             | 2 [3]×[3] = 6 9
      - 7 a           | 2 6 [3]×[3] = 7 8 9
        [6][9]        | 2 6 6 [1]×[1] = 2 6 6 1
        - 8 b c       |
          7 8 9       |
          - 2 6 d 9   |
            2 6 6 1   |
            - - - e   |
```

Se observa:

$8 + 69 = 77 = \overline{7a} \Rightarrow a = 7$

$26 + 789 = 815 = \overline{8bc} \Rightarrow b = 1$ y $c = 5$

$e + 2661 = \overline{26d9} \Rightarrow e = 8$ y $d = 6$

Piden: $E = e + d - c + b - a$

$E = 8 + 6 - 5 + 1 - 7 \quad \therefore\ E = 3$

Clave: B

PROBLEMA 10 (UNI 2015 - I)

Se tiene la siguiente igualdad: $(\overline{aaa1_9})^{1/3} = \overline{1(a+2)}_9$

Entonces podemos decir que el conjunto

$\{a \in \{1, 2, 3, \ldots 8\} / (\overline{aaa1_9})^{1/2} \text{ existe}\}$

A) No posee elementos

B) Posee un solo elemento

C) Posee dos elementos

D) Posee tres elementos

E) Posee cuatro elementos

Resolución:

Dato: $[\overline{aaa1_9}]^{1/3} = \overline{1(a+2)}_9$

$\overline{aaa1}_9 = [\overline{1(a+2)_9}]^3$

$(\overset{\circ}{9} + 1) = (\overset{\circ}{9} + a + 2)^3 \Rightarrow a = \begin{cases} 2 \\ 5 \end{cases}$

Si

$a = 2 \Rightarrow 2221_9 = 1639 \Rightarrow$ No es cubo perfecto

$a = 5 \Rightarrow 5551_9 = 4096 = 16^3 \Rightarrow a = 5$

$\Rightarrow \{a \in [1; 2; 3; \ldots; 8] / (\overline{aaa1_9})^{1/2} \text{ existe}\}$

$\therefore$ Posee solo un elemento, para a = 5

Clave: B

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Al extraer la raíz cuadrada de un número obtuvimos 23 de resto y al extraer la raíz cuadrada de su cuádruple obtuvimos 19 de resto. Hallar la suma de cifras del número.

A) 15 B) 16 C) 17
D) 14 E) N. A.

2. La raíz cuadrada por defecto con una aproximación menor que 0,1 de una fracción irreductible es 1,4. Sabiendo que la suma de sus términos es 71. ¿Cuántas fracciones cumplen esta condición?

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) Más de 3

3. Obtener un número de cuatro cifras significativas de la forma $\overline{abab}$ que disminuido en una unidad sea cuadrado perfecto. Dar como respuesta $a^2 + b$.

A) 32 B) 54 C) 20
D) 27 E) 66

4. Hallar un número de 3 cifras, cuadrado perfecto, tal que si le sumamos 387, obtenemos otro número de 3 cifras también cuadrado perfecto. Hallar la suma de las cifras del número de 3 cifras inicial.

A) 8 B) 10 C) 12
D) 18 E) 19

5. ¿Cuál es el menor número $\overset{\circ}{11}$ y PESI con 27 que tiene 18 divisores cuadrados perfectos? Dar la suma de sus cifras.

A) 4 B) 8 C) 9
D) 11 E) 12

6. Hallar un número de cinco cifras, cuadrado perfecto, de la forma: $\overline{(b+1)(b)(b+3)(b+1)(b+2)}$. Dar como respuesta la suma de las cifras de su raíz cuadrada.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 12

7. En una raíz cúbica inexacta, se sabe que la suma de los residuos por defecto y por exceso es 547. Determinar la diferencia del radicando menos el residuo por defecto.

A) 3567 B) 2587 C) 1847
D) 2197 E) 2357

8. El residuo máximo de una raíz cúbica es $\overline{ab0}$. Hallar:

$$\sqrt{\frac{\overline{ab0}}{5}}$$

si es un número entero.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

9. Si: $\overline{34ab} = (\overline{cd})^2$, hallar $\sqrt{\overline{ab}}$

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

10. Al extraer la raíz cúbica de un número se obtuvo como residuo, su residuo máximo, si este residuo fue 1026. ¿Cuál será el residuo por defecto cuando se extrae la raíz cuadrada de dicho número?

A) 132 B) 134 C) 136
D) 138 E) N. A.

11. En una raíz cuadrada inexacta que tiene un residuo máximo se aprecia que la diferencia de los dos mayores valores de los términos de esta operación es 784. Determinar la suma de las cifras del radicando.

A) 10 B) 9 C) 11
D) 12 E) 13

12. ¿Cuántos números de 5 cifras cubos perfectos existen cuya raíz sea un número de dos cifras iguales?

A) 2 B) 4 C) 6
D) 3 E) 5

13. ¿Cuántos números de 4 cifras $\overline{abcd}$ existen tales que: $\overline{abcd} = \overline{xy}^2$ y $a + b + c + d = \overline{yx}$?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

14. Hallar $a^2 + b^2$, si:

$(\overline{ab})^2 = \overline{ba(a+b)}$

$(\overline{ba})^2 = \overline{(b-2)(a-1)(b+1)4}$

A) 34 B) 50 C) 25
D) 52 E) 53

15. Sabiendo que el número de la forma $\overline{a5bc5}$ es cubo perfecto, además: $a + b = 7$. Hallar la diferencia entre la mayor y la menor cifra de su raíz cúbica.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 2 E) 6

16. Hallar un número senario de 4 dígitos que sea cuadrado perfecto tal que el número formado por sus 2 primeras cifras excede al número formado por sus 2 últimas cifras en 1. Dar la suma de cifras de dicha representación.

A) 8 B) 11 C) 9
D) 12 E) N. A.

17. Encontrar un cubo perfecto de 4 cifras cuya primera cifra excede en 1 a la segunda y cuya cifra de segundo orden excede en 2 a la cifra de primer orden. Dar la suma de cifras centrales.

A) 6 B) 12 C) 9
D) 10 E) N. A.

18. Hallar $\overline{ab}$, si el número $\overline{(a-2)(b-2)ba}$ es un k^2.

A) 52 B) 56 C) 36
D) 44 E) 58

19. Encontrar un cuadrado perfecto de la forma $\overline{abbc}$ donde $a + b = c - b$. Dar la suma de sus cifras

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14.

20. Al extraer la raíz cuadrada de un número obtuvimos 17 de resto y al extraer la raíz cuadrada de su cuádruple obtuvimos 27 de resto. Dar el resto de dividir dicho número entre 11.

A) 5 B) 7 C) 9
D) 4 E) N. A.

21. Hallar "c.k", si "c" es el menor número por el que se debe multiplicar a 8640 para que sea cuadrado perfecto y "k" el menor número por el que se debe multiplicar a 8640 para que sea cubo perfecto.

A) 1500 B) 1125 C) 750
D) 375 E) 75

22. Hallar el menor entero "n", tal que: $(\overline{pqrs} + \overline{srqp})^n = k^2$.
Sabiendo que: $\overline{abbc} - \overline{cbba} = \overline{pqrs}$

A) 121 B) 1221 C) 403
D) 891 E) 297

23. Si $(\overline{ab} + 3)^2 = \overline{(n+1)n(n+2)}$ y $(\overline{ab})^2 = \overline{nn(n+3)}$ determinar: $(a + b)$

A) 4 B) 8 C) 7
D) 5 E) 6

24. Se desea sembrar dalias en un terreno de forma cuadrada colocándolos a igual distancia uno del otro en ambos sentidos. La primera vez le faltaron 27 y la segunda vez pone uno menos en ambos sentidos y le sobra 38. ¿Cuantas dalias tenía el jardinero?

A) 1061 B) 1062 C) 1052
D) 1040 E) 1072

25. Un número entero de cuatro cifras es cuadrado perfecto. Hallar ese número, teniendo presente que las dos primeras cifras son iguales y las dos últimas también son iguales.

A) 3399 B) 4455 C) 5599
D) 8866 E) 7744

26. Hallar un cuadrado perfecto de seis cifras tal que restando la unidad de cada uno de sus cifras el número obtenido sea, también un cuadrado perfecto. Dar como respuesta la suma de sus cifras.

A) 27 B) 26 C) 25
D) 24 E) 23

27. Hallar los números de la forma $\overline{9abc1}$ que sean cuadrados perfectos. Hallar la suma de todos los valores de: $a + b + c$.

A) 36 B) 38 C) 32
D) 34 E) 37

28. Encontrar un cuadrado perfecto de 4 cifras de manera que el número formado por sus 2 primeras excede en 1 al número formado por sus 2 últimas. Dar como respuesta la suma de sus cifras.

A) 21 B) 18 C) 15
D) 19 E) 17

29. Si: $\overline{a(a+1)0(a+2)} = k^2$, hallar: $a + k$.

A) 47 B) 48 C) 49
D) 50 E) N.A.

30. Hallar "c + d", sabiendo que: $\overline{abcd}$ es un cuadrado perfecto y que: $\overline{cd} - \overline{ab} = 24$.

A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 16

31. Encontrar un número de la forma: $\overline{(a+1)(a+2)(a+3)(a+2)aa}$, sabiendo que es un cubo perfecto. Hallar la raíz cúbica de este número y dar la suma de sus cifras.

A) 14 B) 15 C) 13
D) 12 E) N. A.

32. ¿Cuántos números de la forma $\overline{9ab6}$ son cuadrados perfectos?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

33. Al dividir el número de la forma $\overline{ababab}$ del sistema quinario entre N da como cociente un número cuadrado perfecto. Si N toma el menor valor posible, calcular: $a + b$.

A) 3 B) 5 C) 4
D) 6 E) 7

34. El número $\overline{(3a)1(2a-1)0(2a)(a-1)(2a-1)}$ es cuarta potencia perfecta. Hallar la suma de cifras de su raíz cuarta.

A) 10 B) 12 C) 14
D) 11 E) 15

35. Al extraer la raíz cúbica de un número, se obtuvo como residuo máximo $\overline{a(3a)10}$. Hallar la suma de las cifras del número.

A) 31 B) 32 C) 34
D) 35 E) 36

36. ¿Cuántos números cuadrados perfectos existen entre 1000_{16} y 1000_{25}?

A) 50 B) 52 C) 56
D) 64 E) 60

37. ¿Cuántos números menores de 10 000, son cuadrados perfectos pero no cubos perfectos?

A) 96 B) 92 C) 90
D) 80 E) 64

38. ¿Cuántos números de 6 cifras existen que sean cubos perfectos y cuya raíz sea un número de dos cifras iguales?

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) Más de 5

39. ¿Cuántos términos de la siguiente serie:
$H = 12 \times 144; 12 \times 145; 12 \times 146; \ldots; 12 \times 60\,750$
son cubos perfectos?

A) 14 B) 13 C) 12
D) 11 E) Más de 14

40. Si al número N se le multiplica por 21 resulta un cuadrado perfecto y si a N se le multiplica por 735 resulta un cubo perfecto. La suma de las cifras del menor valor que puede tomar N es:

A) 24 B) 19 C) 18
D) 27 E) 15

41. Si el numeral $\overline{a57bc5}$ es un cubo perfecto. Calcular la suma de las cifras de la raíz cúbica si:
$a + b + c = 18$

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

42. ¿Cuántos números cuadrados perfectos de la forma $\overset{\circ}{5} + 1$ existen entre 249 y 9530?

A) 32 B) 33 C) 31
D) 34 E) 30

43. ¿Cuántos números cuadrados perfectos de 3 o 4 cifras son de la forma $\overset{\circ}{6} + 4$?

A) 31 B) 30 C) 29
D) 32 E) 28

44. Sabiendo que el resultado de efectuar: $\overline{abba} \times \overline{bab}$ es un cubo perfecto, hallar el valor de "a − b".

A) 3 B) 4 C) 2
D) 5 E) 1

45. Sabiendo que la cantidad de divisores del numeral $\overline{ababa}$ es un número impar y que la suma de sus cifras es 36. Hallar el valor de "a + b"

A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

46. SI el triple del numeral $\overline{ab(2a)(2b)}$ es un cuadrado perfecto. Hallar la cifra de menor orden de su raíz.

A) 1 B) 2 C) cero
D) 3 E) 4

47. Si el numeral $\overline{abab}_7$ es cuadrado perfecto, hallar el mayor valor de: "a + b":

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

48. ¿Cuántos números cuadrados perfectos existen, tales que su diferencia es 105?

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

49. Si la diferencia de los cuadrados de un número de dos cifras y el que resulta de invertir el orden de sus cifras es un cuadrado perfecto, hallar el producto de las cifras de dicho número.

A) 30 B) 28 C) 24
D) 18 E) N. A.

50. Encontrar el menor múltiplo de 363 que es cuadrado perfecto, capicúa y termina en cifra 6. Dar el número de cifras.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

51. Hallar la suma de las cifras del menor número que se debe multiplicar a 67 500 para obtener un número que sea cuadrado perfecto y cubo perfecto a la vez.

A) 0 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

52. Determinar cuántos de los siguientes numeros pueden ser cuadrados perfectos.

$N_1 = \ldots 360$ $N_4 = \ldots 425$
$N_2 = \ldots 129$ $N_5 = \ldots 425$
$N_3 = \ldots 392$ $N_6 = \ldots 800$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

53. Cuántos divisores de N son cuadrados perfectos:
$N = 2^{20} \times 3^{15} \times 5^{17}$

A) 440 B) 1650 C) 990
D) 792 E) 1188

54. Hallar la cantidad de números de 3 cifras que al restarle la suma de sus cifras se obtiene un cubo perfecto.

A) 18 B) 20 C) 22
D) 24 E) 26

55. Hallar la suma de las cifras de un número de 3 cifras cuyo doble es un cuadrado perfecto y cuya mitad sea un cubo perfecto.

A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

56. Si $\overline{abcde} = k^3$, a + c + e = 19 y b + d = 8, hallar la suma de las cifras de k.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 11

57. Entre dos cuadrados perfectos consecutivos hay 34 números pares. Hallar la suma de todos los números múltiplos de 5 comprendidos entre dichos cuadrados.

A) 15 470 B) 15 460 C) 16 465
D) 16 370 E) 17 350

58. Si $\overline{aabb} = k^2$, hallar el valor de a + b.

A) 11 B) 6 C) 11
D) 13 E) 14

59. ¿Cuántos números cubos perfectos múltiplos de 25 tienen 5 cifras?

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 8

60. ¿Cuántos números de 8 cifras en el sistema senario son cuadrados perfectos y cubos perfectos a la vez?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

61. Cuántos cubos perfectos hay en la serie:
270, 540, 810, ... 1 890 000

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

62. Hallar el menor número entero positivo múltiplo de 15, si la suma de su tercera parte y séptima parte es un cuadrado perfecto.

A) 35 B) 210 C) 420
D) 105 E) 840

63. Si: N = $\overline{23xy}$ es un cuadrado perfecto, hallar la suma de las cifras de N.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

64. Se quiere cercar un terreno de forma cuadrada cuya superficie es de 15 625 m^2, con una cerca de tres hileras de alambre. Se desea saber cuánto costará toda la obra si el metro de alambre cuesta S/.15,50 y la mano de obra total S/.4225,00

A) S/.11 975 B) S/.23 250 C) S/.26 925
D) S/.27 675 E) S/.27 475

65. ¿Cuántos enteros de tres cifras hay cuyo cuadrado dividido entre 31 da por resto 16?

A) 52 B) 27 C) 28
D) 58 E) 26

66. Encontrar los cuadrados perfectos de la forma $n^2 = \overline{aabb}$ e indicar el valor de "a + b".

A) 15 B) 13 C) 17
D) 19 E) 11

67. Hallar: a + b, si se sabe que :$\overline{ababab}$ multiplicado por 273 da un cuadrado perfecto.

A) 10 B) 4 C) 8
D) 9 E) 6

68. Hallar un número de 2 cifras cuyo cuadrado termina en 89 y su cubo en 87. Dar como respuesta la suma de sus cifras.

A) 12 B) 14 C) 10
D) 11 E) 13

69. Encontrar un número que sea cuadrado perfecto, que tenga 9 divisores y que si se le divide por 13 dé un cociente primo y un resto igual a 9. Dar como respuesta la suma de las cifras del número mayor.

A) 6 B) 1 C) 7
D) 11 E) 13

70. Encontrar un número cuadrado perfecto de seis cifras significativas de la forma $\overline{abcdef}$, tal que $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ y $\overline{ef}$ sean cuadrados perfectos. Dar como respuesta: $\overline{cd} - \overline{ab}$

A) 12 B) 24 C) 36
D) 48 E) 52

71. En un campeonato, los soldados forman de tal manera que se aprecia un rectángulo donde uno de los lados excede en 5 al otro, y para esto 26 no forman. Si en otra oportunidad conforman un cuadrado, el más grande posible y en esta ocasión no forman 50 soldados. Determinar cuántos soldados hay en el campamento.

A) Entre 900 y 1000. B) Más de 1000.
C) Entre 1000 y 1200. D) Menos de 900.
E) Más de 1200.

72. Un jardinero quiere plantar un cuadrado de dalias, con este fin, planta sus tubérculos a igual distancia unos de otros, tanto a lo largo como a lo ancho. La primera vez le sobraron (2a + 4) árboles y quiso entonces poner uno más por fila y por columna y no pudo completar el cuadrado pues le faltaron árboles. ¿Cuántos árboles tiene el lado del cuadrado que pudo hacer?

A) $\frac{3}{2}(a-1)$ B) $\frac{3}{2}(a+1)$ C) $\frac{9}{4}(a^2+1)$
D) $\frac{9}{4}(a+1)^2$ E) $\frac{9}{4}(a-1)^2$

73. Si 143 262 se puede expresar como la suma de los **n** primeros números naturales más la suma de los cubos de dichos números, hallar la suma de las cifras de **n**.

A) 6 B) 7 C) 9
D) 10 E) 11

74. Un número cubo perfecto de la forma $\overline{abcbad}$ tiene 16 divisores si d + a = c + b, hallar b × c.

A) 10 B) 12 C) 15
D) 18 E) 24

75. Sabiendo que: $(\overline{abcdef})^2 = \overline{...abcdef}$, calcular: a + b + c + d + e + f.

A) 21 B) 23 C) 25
D) 26 E) 24

76. Al dividir el número N = $\overline{abcabc}$ entre un número primo se obtiene un cuadrado perfecto ¿Cuántos valores puede tomar $\overline{abc}$?

A) 2 B) 7 C) 6
D) 5 E) 4

77. Un número cubo perfecto en el sistema senario tiene como cifra de primer orden a "x" ¿Cuántos valores diferentes puede tomar "x"?

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

78. Halle la mayor cifra de un número tal que al extraerle la raíz cúbica por exceso se obtuvo un residuo máximo de la forma $\overline{(a-3)(a+2)(a+4)}$

A) 2 B) 3 C) 1 D) 5 E) 6

79. Considerando el número N = 5 000 + m, cuya raíz cúbica por exceso es 18, ¿cuántos valores positivos puede tomar m, de tal manera que el número N sea divisible entre su raíz cúbica por defecto?

A) 53 B) 54 C) 55
D) 49 E) 60

80. Calcule el número de divisores de ab, si $(\overline{ac})^2 = \overline{(a-2)bb(a-1)}$

A) 3 B) 4 C) 10
D) 15 E) 12

CLAVES

1. D	11. D	21. D	31. A	41. E	51. B	61. C	71. A
2. B	12. D	22. B	32. A	42. B	52. B	62. D	72. B
3. E	13. B	23. E	33. B	43. B	53. D	63. E	73. C
4. E	14. E	24. B	34. A	44. A	54. B	64. E	74. C
5. A	15. A	25. E	35. D	45. E	55. C	65. D	75. D
6. D	16. B	26. C	36. E	46. B	56. B	66. E	76. C
7. D	17. D	27. B	37. A	47. A	57. D	67. A	77. E
8. C	18. A	28. D	38. D	48. C	58. C	68. D	78. D
9. E	19. A	29. D	39. A	49. A	59. D	69. E	79. D
10. B	20. B	30. A	40. C	50. C	60. D	70. D	80. B

Números racionales

09 capítulo

Julius Wilhelm Richard Dedekind nació el 6 de octubre de 1831 y murió el 12 de febrero de 1916. Fue un matemático alemán. Era el más joven de los cuatro hijos de Julius Levin Ulrich Dedekind. Vivió con Julia, su hermana soltera, hasta que falleció en 1914; él mismo también quedó soltero. En 1848 entró en el Colegium Carolinum de su ciudad natal y en 1850, con sólidos conocimientos de matemáticas, en la Universidad de Gotinga.

Dedekind aprendió matemáticas en los departamentos de Matemáticas y Física de aquella universidad. Su tesis doctoral, supervisada por Gauss, se titulaba *«Über die Theowrie der Eulerschen Integrale»* (Sobre la teoría de las integrales eulerianas), y aunque en ella no se reflejaba el talento que mostró en sus trabajos posteriores, Gauss supo apreciar el don de Dedekind para las matemáticas. Dedekind recibió su doctorado en 1852, siendo el último alumno de Gauss, y trabajó a continuación en una tesis de habilitación, que era necesaria en Alemania para obtener la *venia docendi* (habilitación de enseñanza docente en universidades alemanas).

Durante los siguientes años, estudió la teoría de los números. Sus cortes zanjan definitivamente el problema de la fundamentación del análisis al definir el conjunto de los números reales a partir de los racionales.

Fuente: Wikipedia

DEFINICIÓN

Un número racional, es aquél número que se expresa como el cociente de dos números enteros.

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} / a \wedge b \in \mathbb{Z};\ b \neq 0\right\}$$

NÚMERO FRACCIONARIO

Es aquél número que indica una o más partes de la unidad, dividida en partes iguales.

Los términos de una fracción son el numerador (las partes que se toman de la unidad) y el denominador (número de partes iguales en la que ha sido dividido la unidad).

f: $\frac{a}{b}$ a → numerador, b → denominador

CLASIFICACIÓN DE LAS FRACCIONES

Sea la fracción: f: $\frac{a}{b}$

Por la naturaleza del denominador

Según los valores que puede tomar "b", las fracciones pueden ser: fracción decimal o fracción común.

I. **Fracción decimal.** La fracción f es decimal, cuando el denominador es una potencia de 10.

Es decir: $b = 10^n$; $n \in \mathbb{Z}^+$

Ejemplo:

$$\frac{17}{10}; \frac{39}{100}; \frac{441}{1000}$$

II. **Fracción común.** La fracción f es común, cuando el denominador no es una potencia de 10.

Es decir: $b \neq 10^n$; $n \in \mathbb{Z}^+$

Ejemplo:

$$\frac{13}{15}; \frac{27}{16}; \frac{45}{46}$$

Por la relación de sus términos

Dependiendo de cómo es "a" con respecto a "b", las fracciones pueden ser: propia, impropia o iguales a la unidad.

I. **Fracción propia.** La fracción f es propia, cuando el numerador es menor que el denominador, $(a < b)$.

Toda fracción propia es menor que la unidad.

Ejemplo:

$$\frac{9}{14}; \frac{27}{100}$$

II. **Fracción Impropia.** La fracción f es impropia, cuando el numerador es mayor que el denominador. $(a > b)$

Toda fracción impropia es mayor que la unidad.

Ejemplo:

$$\frac{15}{8}; \frac{121}{100}$$

III. **Fracciones iguales a la unidad.** La fracción f es igual a la unidad, cuando ambos términos son iguales. $(a = b)$

Ejemplo:

$$\frac{12}{12}; \frac{10}{10}$$

Por grupos de fracciones

Según los grupos de fracciones, éstas pueden ser: fracciones homogéneas o heterogéneas.

i. **Fracciones homogéneas.** Un grupo de fracciones f serán homogéneas, cuando todas tienen el mismo denominador.

Ejemplo:

$$\frac{13}{18}; \frac{21}{18}; \frac{42}{18}$$

II. **Fracciones heterogéneas.** Un grupo de fracciones f serán heterogéneas, cuando todas tienen diferente denominador.

Ejemplo:

$$\frac{17}{24}; \frac{9}{5}; \frac{18}{13}$$

CORRECTA LECTURA DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Para leer correctamente un número racional se debe tener en cuenta lo siguiente:

i. Si en el denominador de una fracción común, aparecen los números: 2; 3; 4; ...; 9, se leerá la cantidad del numerador y a continuación la palabra: medios, tercios, cuartos; ...; novenos, respectivamente.

Ejemplo:

$\frac{5}{4}$: cinco cuartos; $\frac{25}{9}$: veinticinco novenos

ii. Si en el denominador de la fracción aparecen los números: 10; 100; 1000; ...; se leerá la cantidad del numerador seguido de la palabra: décimo; centésimo, milésimo ..., respectivamente.

Ejemplo:

$\frac{29}{10}$: 29 décimos; $\frac{121}{1000}$: 121 milésimos

iii. Si en el denominador de la fracción común aparecen los números diferentes de las potencias y mayores que 10, se leerá la cantidad del numerador, seguido de la cantidad del denominador terminado en la palabra "...avos".

Ejemplo:

$\frac{13}{18}$: Trece dieciocho avos

$\frac{27}{49}$: Veintisiete cuarenta y nueve avos.

DEFINICIÓN DE FRACCIONES

Fracciones iguales

Se dice que dos fracciones son iguales, cuando sus términos correspondientes son también iguales.

Ejemplo:

Si: $\frac{a}{b} = \frac{45}{28} \Rightarrow a = 45;\ b = 28$

Fracciones equivalentes

Las fracciones equivalentes (< >), son aquellas que a pesar de escribirse de una manera diferente, representan una misma parte de la unidad.

Ejemplo:

$$0{,}75 = \frac{3}{4} <> \frac{15}{20} <> \frac{24}{32} <> \frac{39}{52} <> \ldots$$

Observación

Para obtener fracciones equivalentes a una fracción dada, ésta debe ser simplificada al máximo y enseguida se multiplica a sus dos términos por una misma cantidad.

Ejemplo:

Hallar la forma general de las fracciones equivalentes a la fracción $\frac{527}{744}$.

Resolución:

Simplificamos la fracción: $\frac{527}{744} = \frac{17 \times 31}{24 \times 31} \Rightarrow \frac{17}{24}$

Multiplicamos a ambos términos por una misma cantidad:

$$\frac{17}{24} <> \frac{34}{48} <> \frac{51}{72} <> \frac{68}{96} <> \ldots$$

En general, si: $\frac{a}{b} <> \frac{17}{24} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{17n}{24n} \Rightarrow \begin{cases} a = 17n \\ b = 24n \end{cases}$

Fracciones irreductibles

Una fracción es irreductible o irreducible cuando sus términos sean primos entre sí.

Ejemplo:

Las siguientes fracciones son irreductibles

$\frac{14}{15}$ > números PESÍ $\frac{8}{5}$ > números PESÍ

OPERACIONES CON FRACCIONES

Adición y sustracción

Se presentan tres casos:

I. **Cuando las fracciones tienen un mismo denominador.** Se suman algebraicamente los numeradores y al resultado se le pone por denominador, el mismo denominador común.

Ejemplo:

Efectuar: $\frac{24}{48} + \frac{13}{48} - \frac{11}{48} + \frac{10}{48}$

Resolución:

$\frac{24 + 13 - 11 + 10}{48} = \frac{36}{48} = \frac{3}{4}$

II. **Cuando las fracciones tienen distintos denominadores.** Se reducen las fracciones a común denominador y se procede como en el caso anterior.

Ejemplo:

Efectuar: $\frac{5}{24} + \frac{17}{40} - \frac{7}{15}$

Resolución:

MCM(24; 40; 15) = 120

Dando común denominador:

$\frac{25}{120} + \frac{51}{120} - \frac{56}{120} = \frac{25 + 51 - 56}{120} = \frac{20}{120} \Rightarrow \frac{1}{6}$

III. **Cuando las fracciones van acompañadas por números enteros.** Se suman primero las fracciones, luego los enteros, añadiendo a estos enteros la suma de las fracciones.

Ejemplo:

Efectuar: $14 + \frac{5}{9} - 6 - \frac{8}{15}$

Resolución:

Sumando las fracciones: $\frac{5}{9} - \frac{8}{15} = \frac{25 - 24}{45} = \frac{1}{45}$

Sumando los enteros: $14 - 6 = 8$

Luego: $8 + \frac{1}{45} = \frac{360 + 1}{45} = \frac{361}{45}$

Multiplicación

Se presentan dos casos:

I. **Multiplicación de una fracción por otra fracción.** Se multiplican los numeradores correspondientes y se divide entre el producto de los denominadores correspondientes.

Ejemplos:

1. Efectuar: $\frac{12}{25} \times \frac{35}{8}$

   Resolución:

   $\frac{12 \times 35}{25 \times 8} = \frac{21}{10}$

2. Efectuar: $8\frac{5}{9} \times 2\frac{5}{6}$

   Resolución:

   Convirtiendo las fracciones mixtas a fracción común.

   $8\frac{5}{9} = \frac{8 \times 9 + 5}{9} = \frac{77}{9} \wedge 2\frac{5}{6} = \frac{2 \times 6 + 5}{6} = \frac{17}{6}$

   Se tiene: $\frac{77}{9} \times \frac{17}{6} = \frac{1309}{54}$

II. **Multiplicación de una fracción por un entero o viceversa.** Se multiplica el numerador de la fracción por el entero, manteniéndose el mismo denominador.

Ejemplo:

Efectuar: $\frac{36}{49}\times 5$

Resolución:

$$\frac{36\times 5}{49}=\frac{180}{49}$$

División

Se presentan dos casos:

I. **División de una fracción entre otra fracción.** Se multiplican los extremos y se divide entre el producto de medios.

Ejemplo:

Efectuar: $\frac{8}{9}$ entre $\frac{12}{7}$

Resolución:

Tenemos: $\dfrac{\frac{8}{9}}{\frac{12}{7}}=\frac{8\times 7}{9\times 12}=\frac{14}{27}$

Otra forma: Se multiplica la fracción dividendo por la inversa de la fracción divisor.

Ejemplo:

Efectuar: $\frac{15}{8}$ entre $\frac{35}{24}$

Resolución:

Tenemos: $\frac{15}{8}\times\frac{24}{35}=\frac{9}{7}$

II. **Dividir una fracción entre un entero o viceversa.**

Ejemplos:

1. Efectuar: $\frac{12}{35}$ entre 8

   Resolución:

   Se tiene: $\frac{12}{35}\times\frac{1}{8}=\frac{3}{70}$

2. Efectuar: 12 entre $\frac{16}{5}$

   Resolución:

   Se tiene: $12\times\frac{5}{16}=\frac{15}{4}$

CONVERSIÓN DE FRACCIONES

Se presentan dos casos:

1.^er Caso: Convertir una fracción común a fracción decimal

Regla: Se divide el numerador entre el denominador, hasta que la división sea exacta o hasta que se repita una cifra o un grupo de cifras.

Ejemplo:

Convertir a fracción decimal las siguientes fracciones:

$$\frac{3}{4};\ \frac{7}{11}\ \text{y}\ \frac{5}{6}$$

Resolución:

En cada caso, dividimos el numerador entre el denominador, se obtiene:

$\frac{3}{4}=0{,}75$ (fracción decimal exacta)

$\frac{7}{11}=0{,}636363...=0{,}\widehat{63}$ (fracción decimal periódico puro)

$\frac{5}{6}=0{,}83333...=0{,}8\widehat{3}$ (fracción decimal periódico mixto)

2.° Caso: Convertir una fracción decimal a fracción común (Fracción generatriz)

I. **Convertir una fracción decimal exacta a fracción común.**

Regla:

Se escribe como numerador la parte entera seguida de la parte decimal y como denominador, la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga la parte decimal.

Ejemplo:

- $4{,}36=\frac{436}{100}\xrightarrow{\text{simplificando}}\frac{109}{25}$ (fracción generatriz)
- $0{,}488=\frac{488}{1000}\xrightarrow{\text{simplificando}}\frac{61}{125}$ (fracción generatriz)

Observación

Cuando la expresión decimal está escrita en base "n", se procede como en base 10, solo que cada término queda escrito en base "n".

- $2{,}43_8=\frac{243_8}{100_8}\xrightarrow{\text{En base 10}}\frac{163}{64}$
- $0{,}423_6=\frac{423_6}{1000_6}\xrightarrow{\text{En base 10}}\frac{159}{216}$

II. **Convertir una fracción decimal periódico puro a fracción común.**

Regla:

Si la fracción decimal periódico puro es de la forma $0{,}\widehat{ab...c}$, se escribe como numerador la parte periódica y como denominador el número formado por la cifra 9, tantos 9 como cifras tenga la parte periódica.

Ejemplos:

- $0{,}\widehat{740}=\frac{740}{999}\Rightarrow\frac{20\times 37}{27\times 37}=\frac{20}{27}$ (f. generatriz)

En base "n", por cada cifra periódica se utiliza un "n − 1".

- $0,\widehat{423}_8=\frac{423_8}{777_8}\xrightarrow{\text{A base 10}}\frac{275}{511}$ (f. generatriz)

Si la fracción decimal periódico puro es de la forma $ab,\widehat{cd...e}$, se escribe como numerador la parte entera seguido de la parte periódica menos la parte entera y como denominador el número formado por la cifra 9, tantos 9 como cifras tenga la parte periódica.

Ejemplos:

- $8,\widehat{27}=\frac{827-8}{99}=\frac{819}{99}\Rightarrow\frac{91}{11}$ (f. generatriz)
- $4,\widehat{32}_8=\frac{432_8-4_8}{77_8}=\frac{426_8}{77_8}\Rightarrow\frac{278}{63}$

III. Convertir una fracción decimal periódico mixto a fracción común.

Regla: Se escribe como numerador la parte no periódica, seguido de la parte periódica menos la parte no periódica y como denominador, por cada cifra periódica un 9 y por cada cifra no periódica (de la parte decimal) un cero.

Ejemplos:

- $0,45\widehat{90}=\frac{4590-45}{9900}=\frac{4545}{9900}\Rightarrow\frac{101}{220}$ (f. generatriz)
- $2,5\widehat{36}=\frac{2536-25}{990}=\frac{2511}{990}\Rightarrow\frac{279}{110}$ (f. generatriz)
- $0,2\widehat{54}_8=\frac{254_8-2_8}{770_8}=\frac{252_8}{770_8}\Rightarrow\frac{85}{252}$ (f. generatriz)
- $2,1\widehat{36}_9=\frac{2136_9-21_9}{880_9}=\frac{2115_9}{880_9}\Rightarrow\frac{1553}{720}$ (f. generatriz)

REGLA GENERAL PARA DETERMINAR EL TIPO DE FRACCIÓN DECIMAL QUE ORIGINA UNA FRACCIÓN COMÚN

Primera regla

Si el denominador de la fracción común e irreductible contiene solamente a los factores 2 y/o 5, dará origen a una fracción decimal exacta. (f.d.e.). La cantidad de cifras decimales estará dado por el mayor exponente de los factores 2 y/o 5.

Ejemplos:

- $\frac{5}{8}=0,625$ Denominador: $8=2^3$
  Factor primo 2 origina f.d.e.
  Exponente 3, indica 3 cifras decimales.
- $\frac{12}{25}=0,48$ Denominador: $25=5^2$
  Factor primo 5, origina f.d.e.
  Exponente 2, indica 2 cifras decimales.
- $\frac{27}{40}=0,675$ Denominador: $40=2^3\times5$
  Factor primo 2 y/o 5 origina f.d.e.
  Mayor exponente de los factores 2 y/o 5: 3, son 3 cifras decimales.

Segunda regla

Si el denominador de la fracción común e irreductible no contiene a los factores 2 y/o 5 se originará una fracción decimal periódico puro (f.d.p.p.).

La cantidad de cifras periódicas estará dado por la cantidad de cifras, del menor número formado por cifras 9, que contiene como factor al denominador de la fracción común.

Debemos tener en cuenta la descomposición canónica de los números formados por cifras 9.

$$9=3^2$$
$$99=3^2\times11$$
$$999=3^3\times37$$
$$9999=3^2\times11\times101$$
$$99999=3^2\times41\times271$$
$$999999=3^3\times7\times11\times13\times37$$

Ejemplos:

- $\frac{7}{11}=0,\widehat{63}$ Denominador: 11, no contiene los factores 2 y/o 5.
  Cantidad de cifras 9: El factor 11 está contenido en el 99, luego se originan 2 cifras decimales.
- $\frac{35}{41}=0,\widehat{85365}$ Denominador: 41, no contienen los factores 2 y/o 5.
  El factor 41 está contenido en el número 99999, luego se originarán 5 cifras decimales.
- $\frac{221}{287}=\frac{221}{41\times7}=0,\underbrace{\widehat{770...7}}_{\text{30 cifras}}$

- Denominador: $287=41\times7$ no contiene los factores 2 y/o 5.
- El factor 41 origina 5 cifras decimales y el 7 origina 6 cifras. Luego, la cantidad de cifras periódicas es: MCM(5; 6) = 30 cifras.

Tercera regla

Si el denominador de la fracción común e irreductible contiene a los factores 2 y/o 5 y a otros factores distintos de ellos, se originará una fracción decimal periódica mixta. La cantidad de cifras no periódicas estará dado

por la primera regla y la cantidad de cifras periódicas por la segunda regla.

Ejemplo:

$\frac{79}{140} = 0,56\overparen{428571}$

- Denominador $140 = 2^2 \times 5 \times 7$.
- Los factores $2^2 \times 5$ originará 2 cifras no periódicas (primera regla) y el factor 7 originará 6 cifras periódicas.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. ¿Cuántas fracciones propias, cuyos términos son enteros consecutivos, son menores que 51/67?

Resolución:

Sea f la fracción: $f = \frac{n}{n+1}$

Por condición: $\frac{n}{n+1} < \frac{51}{67} \Rightarrow 67n < 51n + 51$

$16n < 51 \Rightarrow n < 3,18$

Valores de "n": {1; 2; 3} $\therefore$ Existen 3 fracciones

2. Si a la fracción irreductible f se le resta su inversa, se obtiene 32/63. Calcular la suma de los términos de dicha fracción.

Resolución:

Sea la fracción: $f = \frac{a}{b}$

Por dato: $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{32}{63} \Rightarrow \frac{a^2 - b^2}{a \times b} = \frac{32}{63} = \frac{32}{9 \times 7}$

$\Rightarrow a = 9; b = 7 \Rightarrow f = \frac{9}{7}$ $\quad \therefore a + b = 16$

3. Encontrar la fracción equivalente a 4/5, sabiendo que el producto de sus términos es el menor número que tiene 18 divisores.

Resolución:

Tenemos que: $\frac{a}{b} <> \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{4n}{5n} \begin{cases} a = 4n \\ b = 5n \end{cases}$

Además: $P = a \times b = 20n^2 = 2^2 \times 5 \times n^2$ ...(1)

Pero: $D_P = 18 = 2 \times 3 \times 3$ ...(2)

De (1), el menor valor de P:

$P = 5 \times 2^2 \times 3^2 \Rightarrow n = 3$ $\quad \therefore$ La fracción: $\frac{a}{b} = \frac{12}{15}$

4. Hallar una fracción equivalente a 17/48, tal que la suma de sus términos sea múltiplo de 12, múltiplo de 18, su numerador múltiplo de 5, además posea los menores términos.

Resolución:

Por dato: $\frac{a}{b} <> \frac{17}{48} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{17n}{48n} \begin{cases} a = 17n \\ b = 48n \end{cases}$

Además: $\underbrace{a + b} = \overset{\circ}{12}$ y $\overset{\circ}{18} \Rightarrow MCM(12; 18) = \overset{\circ}{36}$

$65n = \overset{\circ}{36} \Rightarrow n = \overset{\circ}{36}$ ...(1)

También: $a = \overset{\circ}{5}$

$17n = \overset{\circ}{5} \Rightarrow n = \overset{\circ}{5}$ ...(2)

De (1) y (2): $n = MCM(36; 5) = \overset{\circ}{180}$

Para que tenga los menores términos: $n = 180$

$\therefore$ La fracción: $\frac{17 \times 180}{48 \times 180} = \frac{3060}{8640}$

5. ¿Para cuántos valores de N, menores que 100, se hace reducible la fracción: $\frac{N^2 + 82N}{N + 1}$

Resolución:

De: $\frac{N^2 + 82N}{N + 1} = N + \frac{81N}{N + 1}$

Basta que: $\frac{81N}{N + 1}$ sea reducible $\Rightarrow N + 1 = \overset{\circ}{3}$

Luego: $N = \overset{\circ}{3} - 1 < 100 \Rightarrow N = \underbrace{\{2; 5; 8; ...; 98\}}_{33 \text{ números}}$

$\therefore$ Existen 33 valores para N.

6. ¿Cuántas fracciones propias e irreductibles de denominador 240 existen?

Resolución:

Sea la fracción: $f = \frac{n}{240} \begin{cases} \text{Propia: } n < 240 \\ \text{irreductible: } n \text{ y } 240 \text{ PESÍ} \end{cases}$

Hallamos la cantidad de números menores y PESÍ con 240. Usamos la función de Euler:

$240 = 2^4 \times 3 \times 5$

$\phi_{240} = 240\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)$

$\phi_{240} = 240 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = 64$

$\therefore$ Existen 64 fracciones.

7. ¿Cuántas fracciones propias de la forma $\overline{abc} / \overline{cba}$ existen tal que al ser transformada en irreductibles son de la forma $\overline{ac} / \overline{ca}$?

Resolución:

Por dato: $\frac{\overline{abc}}{\overline{cba}} <> \frac{\overline{ac}}{\overline{ca}}$

Se deduce que: $\overline{abc} = \overline{ac} \times 11 = \overline{a(a + c)c}$

Además: $\overline{ac}$ y $\overline{ca}$ PESÍ, se observa que:

$b = a + c \leq 9$

	b	a	c
Cumplen:	8	7	1
	8	5	3
	7	4	3
	7	5	2
	5	3	2
	4	3	1

$\therefore$ Existen 7 fracciones.

8. Encontrar la fracción, cuyo valor no cambia, cuando se suman al mismo tiempo 35 al numerador y 42 al denominador, sabiendo además que los 2 términos de dicha fracción tiene por MCM a 570. Dar como respuesta la suma de las cifras del numerador hallado.

Resolución:

Sea la fracción original: $\frac{a}{b}$

Por dato: MCM(a; b) = 570 ...(1)

Si: MCD(a; b) = k $\Rightarrow$ $a = kC_1$; $b = kC_2$

En (1): $kC_1C_2 = 570$ ...(2)

Por dato: $\frac{a+35}{b+42} = \frac{a}{b}$

Reemplazando: $\frac{kC_1+35}{kC_2+42} = \frac{kC_1}{kC_2}$

Efectuando:

$$kC_1C_2 + 35C_2 = kC_1C_2 + 42C_1 \Rightarrow \frac{C_1}{C_2} = \frac{5}{6} \begin{cases} C_1 = 5 \\ C_2 = 6 \end{cases}$$

En (2): $k \times 5 \times 6 = 570 \Rightarrow k = 19$

Luego: $\frac{a}{b} = \frac{19 \times 5}{19 \times 6} = \frac{95}{114}$

$\therefore$ El numerador es 95

9. Dos poblaciones A y B tienen en la actualidad 3 302 400 y 103 200 habitantes respectivamente. Se sabe que la disminución anual de A, es de 1/8 de sus habitantes. ¿Dentro de cuánto tiempo las dos poblaciones tendrán el mismo número de habitantes, si B tiene un aumento anual de 3/4 de sus habitantes?

Resolución:

De las poblaciones tenemos:

- De A: 3 302 400 $\Rightarrow$ Decrecimiento anual: $\frac{1}{8}$

  Nueva población anual: $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

- De B: 103 200 $\Rightarrow$ Crecimiento anual: $\frac{3}{4}$

  Nueva población anual: $1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

En "t" años se cumplirá:

$$3\,302\,400\left(\frac{7}{8}\right)^t = 103\,200\left(\frac{7}{4}\right)^t$$

Simplificando: $32\left(\frac{7}{8}\right)^t = \left(\frac{7}{4}\right)^t$

También: $32\left(\frac{7^t}{2^{3t}}\right) = \frac{7^t}{2^{2t}} \Rightarrow 32 = 2^t = 2^5 \Rightarrow t = 5$

$\therefore$ Dentro de 5 años

10. Un comerciante vende 1/4 de su mercadería, perdiendo 1/5 de lo que costó; luego vende 1/3 de lo que le quedaba perdiendo 1/20 de su costo. ¿Cuánto debe ganar en el resto para recuperar su capital?

Resolución:

Sea S/. 600 el costo total de la mercadería.

1.ª venta:

Costo: $\frac{1}{4}(600) = S/.150$ — Pérdida: $\frac{1}{5}(150) = S/.30$

2.ª venta:

Costo: $\frac{1}{3}(450) = S/.150$ — Pérdida: $\frac{1}{20}(150) = S/.7,5$

3.ª venta:

Costo: S/.300 — Debe ganar: $30 + 7,5 = S/.\ 37,5$

Esta ganancia representa: $\frac{37,5}{300} <> \frac{1}{8}$ del costo

$\therefore$ Ganará 1/8 del costo.

11. Después de haber perdido sucesivamente los 3/8 de su hacienda, 1/9 del resto y 5/12 del nuevo resto, una persona hereda $45 600 y de ésta manera, la pérdida se reduce a la mitad de la cantidad inicial. ¿Cuál era su fortuna inicial?

Resolución:

Sea T la cantidad inicial, considerando lo que siempre queda:

$$\frac{7}{12}\left[\frac{8}{9}\left(\frac{5}{8}\times T\right)\right] + 45\,600 = \frac{T}{2}$$

$$\frac{35}{108}(T) + 45\,600 = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 259\,200$$

$\therefore$ La fortuna inicial: $259 200

12. Tengo algunos dólares ahorrados, pero en una compra gasto la octava parte de mis ahorros más $100; en una segunda compra invierto las 2/3 partes de mi saldo menos $200; y por último, efectúo una compra en la que gasto la cuarta parte de lo que me quedaba más $200, quedándome finalmente con solamente $100. ¿Cuánto era mi ahorro inicial?

Resolución:

Sea T la cantidad inicial.

Considerando lo que siempre queda:

$$\frac{3}{4}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{7}{8}T - 100\right) + 200\right] - 200 = 100 \Rightarrow T = 800$$

$\therefore$ El total es: $800

13. Un padre reparte dinero a sus hijos de la manera siguiente: al hijo mayor le da S/.1000 más 1/5 del resto; al segundo S/.2000 más 1/5 del resto; al tercero S/.3000 más 1/5 del resto y así sucesivamente. Hallar la cantidad que repartió el padre y el número de hijos, sabiendo que todas las partes son iguales.

Resolución:

Sea T la cantidad inicial, determinamos lo que cada uno recibe:

1.^{er} hijo: $1000 + \frac{1}{5}(T - 1000) = \frac{1}{5}T + 800$

2.° hijo: $2000 + \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}T - 2800\right) = \frac{4}{25}T + 1440$

Por condición: $\frac{T}{5} + 800 = \frac{4}{25}T + 1440$

Resolviendo: T = 16 000

Lo que cada hijo recibe: $\frac{16\,000}{5} + 800 = 4000$

Número de hijos: $\frac{16\,000}{4000} = 4$

∴ Cantidad total: S/.16 000 y 4 hijos

14. Una liebre seguida por un galgo le lleva 35 saltos de ventaja. El galgo da 5 saltos, mientras la liebre da 8; pero, 6 saltos del galgo, equivalen a 11 saltos de la liebre. ¿Cuántos saltos dará el galgo para dar alcance a la liebre?

Resolución:

Sea:
L: longitud del salto de la liebre
G: longitud del salto del galgo

- En un mismo tiempo: ,
  Galgo: 5 saltos → avanza: 5G ...(1)
  Liebre: 8 saltos → avanza: 8L
- De las longitudes:
  $6G <> 11L \Rightarrow 1G = \frac{11}{6}L$

En (1): El galgo avanza = $5\left(\frac{11}{6}L\right) = \frac{55}{6}L$

Lo que el galgo descuenta en 5 saltos:

$\frac{55}{6}L - 8L = \frac{7}{6}L$

Luego: **Galgo** — **Liebre**
5 saltos — descuenta $\frac{7}{6}L$
x saltos — descuenta 35L

$x = 5 \times 35 = \frac{6}{7} = 150$ saltos

∴ El galgo debe dar 150 saltos.

15. A puede hacer un trabajo en 4 días, B le ayudó por 2 días y ambos se retiran del trabajo; C, quien puede realizar solo el trabajo en 10 días, laboró 4 días y completó la tarea. ¿Cuánto tiempo emplearía B, en realizar por si mismo, la totalidad del trabajo?

Resolución:

Del enunciado:

A y B	C			
2 días	4 días	< >	$\frac{6}{10}$	$\frac{4}{10}$

A y B en 2 días hicieron: $\frac{6}{10}$

Se cumple: $2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{b}\right) = \frac{6}{10} \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{3}{10} - \frac{1}{4}$

$\Rightarrow b = 20$ ∴ B, lo haría en 20 días.

16. Un recipiente tiene 4 L de leche y 2 L de agua. Otro recipiente tiene 3 L de leche y 5 L de agua. Simultáneamente se extraen 2 L del primero y 3 L dei segundo para ser intercambiados. ¿Cuánto de leche hay luego de ello en el primer recipiente?

Resolución:

Del enunciado:

	Leche (L)	Agua (L)	Total
1.^{er} recipiente.	4	2	6
2.° recipiente	3	5	8

- Del 1.^{er} recipiente: se extraen 2 L <> $\frac{1}{3}$

Se extraen: Leche $\frac{1}{3}(4) = \frac{4}{3}$ L; Agua $\frac{1}{3}(2) = \frac{2}{3}$ L

Queda: Leche $4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$ L; Agua $2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ L

- Del 2.° recipiente: se extraen 3 L <> $\frac{3}{8}$

Se extraen: Leche $\frac{3}{8}(3) = \frac{9}{8}$ L; Agua $\frac{3}{8}(5) = \frac{15}{8}$ L

Queda: Leche $3 - \frac{9}{8} = \frac{15}{8}$ L; Agua $5 - \frac{15}{8} = \frac{25}{8}$ L

Al hacer el intercambio simultáneamente, la cantidad de leche en el primer recipiente será: $\frac{8}{3} + \frac{9}{8} = \frac{91}{24}$ L

∴ En el primer recipiente queda $\frac{91}{24}$ L. de leche.

17. Habiendo perdido un jugador la mitad de su dinero, volvió al juego y perdió la mitad de lo que le quedaba, repitió la mitad de lo que le quedaba, repitió lo mismo por dos veces más, después de lo cual le quedaron $600. ¿Cuánto tenía al inicio del juego?

Resolución:

Sea T, la cantidad inicial.
Considerando lo que siempre queda, al término de 4 veces:

$T\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 600 \Rightarrow T\left(\frac{1}{16}\right) = 600 \Rightarrow T = \$9600$

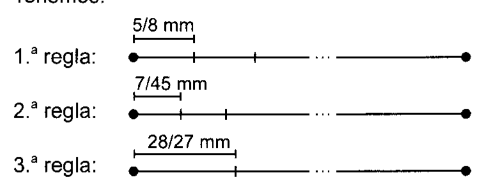
∴ Al inicio tenía $9600

18. Se tienen tres reglas de 200 mm cada una, si las divisiones que tienen respectivamente son cada 5/18 mm, 7/45 mm y 28/27 mm. ¿A qué distancia

del origen, coincidirán las divisiones por primera vez en las tres reglas?

Resolución:

Tenemos:



Sea L, la longitud en que coinciden las 3 divisiones.

Se cumple: $L = \overset{\circ}{\frac{5}{18}}$; $L = \overset{\circ}{\frac{7}{45}}$; $L = \overset{\circ}{\frac{28}{27}}$

$\Rightarrow L = \text{MCM}\left(\frac{5}{18}; \frac{7}{45}; \frac{28}{27}\right) = \frac{\text{MCM}(5;7;28)}{\text{MCD}(18;45;27)}$

$L = \frac{140}{9}$

$\therefore$ Coincidirán por primera vez: $\frac{140}{9}$ mm

19. Sabiendo que: $A = \{r/r = \frac{1}{2^n}; n \in \mathbb{Z}; n \geq 0\}$

Donde A, es el conjunto de los radios de una sucesión de círculos. Determinar la suma de las áreas de tales círculos.

Resolución:

El conjunto de los radios: $A = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; ...\right\}$

El área de cada círculo: Área $= \left\{\pi; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{16}; \frac{\pi}{64}; ...\right\}$

La suma de las áreas:

$S = \pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{64} + ... \Rightarrow S = \frac{\pi}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\pi\mu^2$

$\therefore$ El área total: $\frac{4}{3}\pi\mu^2$

20. Para $x_1 = 30$; $x_2 = 42$; $x_3 = 56$; etc., encontrar el número entero positivo "m", tal que:

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + ... + \frac{1}{x_m} = 0,15$

Resolución:

Reemplazando:

$\frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + ... + \frac{1}{x_m} = \frac{15}{100} <> \frac{3}{20}$

Equivalentemente:

$\frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7} + \frac{1}{7 \times 8} + ... + \frac{1}{(m+4)(m+5)} = \frac{3}{20}$

También:

$\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + ... + \left(\frac{1}{m+4} - \frac{1}{m+5}\right) = \frac{3}{20}$

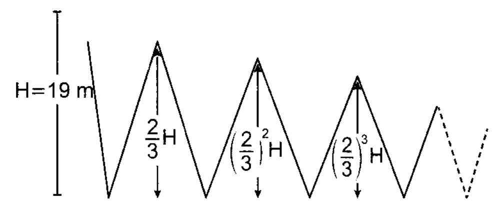
$\frac{1}{5} - \frac{1}{m+5} = \frac{3}{20} \Rightarrow \frac{m}{5(m+5)} = \frac{3}{20} \Rightarrow m = 15$

$\therefore m = 15$

21. El rebote de una pelota alcanza 2/3 de la altura, desde donde se le deja caer. Determinar el espacio total recorrido hasta detenerse, si se le deja caer desde 19 m de altura.

Resolución:

Del enunciado:



Espacio total recorrido:

$T = H + 2\left(\frac{2}{3}H + \frac{4}{9}H + \frac{8}{27}H + ...\right)$

$T = H + 2H\left(\frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}}\right) \Rightarrow T = H + 2H\left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}\right)$

$\Rightarrow T = H + 4H = 5H = 95$ m.

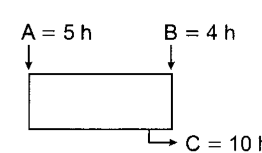
$\downarrow$ 19

$\therefore$ Distancia total recorrida: 95 m.

22. Un tanque puede ser llenado por una bomba en 5 horas y por una segunda bomba en 4 horas. Una llave en el fondo lo puede descargar en 10 horas. ¿En qué tiempo se llenará el tanque, si las dos bombas y la llave funcionan simultáneamente?

Resolución:

Tenemos:



La cantidad del tanque llenado en 1 h:

$\frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{7}{20}$ del tanque

$\therefore$ Tiempo total: $\frac{20}{7}$ h.

23. Un depósito de combustible tiene dos válvulas de descarga, la primera ubicada en el fondo y la segunda a media altura. La primera vacía todo el depósito en 8 horas y la segunda vacía su parte correspondiente en 6 horas. Si estando lleno el depósito, se abren las dos llaves. ¿Qué tiempo demorará en quedar vacía?

Resolución

A y B	A: 6 h (la mitad)
B	B: 8 h (todo)

1.ª mitad: A = 6 h; B = 4 h

Vacían en 1 h: $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12} \Rightarrow \frac{12}{5}=2{,}4$ h

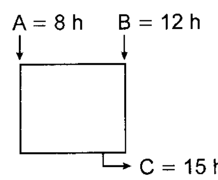
2.ª mitad: B = 4 h

$\therefore$ Tiempo total: $4+2{,}4=6{,}4$ h

24. Un grifo puede llenar un estanque en 8 horas y otro en 12 horas, mientras que un desagüe lo vacía en 15 horas. Cuando el estanque está lleno hasta 1/3 de su altura, se abren los 2 grifos y el desagüe durante una hora. ¿Qué fracción del estanque quedará al final sin llenar?

Resolución:

Se tiene:



Las tres llaves llenarán en 1 h: $\frac{1}{8}+\frac{1}{12}-\frac{1}{15}=\frac{17}{120}$

Faltaría llenar: $1-\frac{17}{120}-\frac{1}{3}=\frac{63}{120} \Rightarrow \frac{21}{40}$

$\therefore$ Falta llenar $\frac{21}{40}$

25. Un tanque de agua puede ser desaguado mediante tres llaves: una colocada en el fondo, una segunda colocada a 1/3 de altura sobre él y una tercera colocada a 2/3 de altura. La primera desagua el tanque en 9 h, mientras que la segunda y tercera desaguan el líquido que está sobre ellas en 12 h y 4 h, respectivamente. Si estando lleno el tanque, se abren las 3 llaves, ¿en qué tiempo sería desaguado totalmente?

Resolución:

Tenemos:

h/3	A; B; C	A = 4 h (1/3 del tanque)
h/3	B; C	B = 12 h (2/3 del tanque)
h/3	C	

C = 9 h (todo)

Primer tercio (A; B y C):

A = 4 h; B = 6 h; C = 3 h $\Rightarrow \frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{3}{4}$

$\Rightarrow \frac{4}{3}$ h = 1 hora, 20 minutos

Segundo tercio (B y C):

B = 6 h; C = 3 h $\Rightarrow \frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2} \Rightarrow$ 2 horas

Tercer tercio (C): C = 3 h

$\therefore$ Tiempo total: 6 horas, 20 minutos.

26. Sabiendo que:
$0{,}555\ldots_7 = 0{,}919191\ldots_n \wedge \overline{(n-4)(n-4)}_{(n)} = \overline{ab}$
hallar el valor de: "a + b".

Resolución:

Hallamos "n": $0{,}\hat{5}_7 = 0{,}\widehat{91}_n$

A fracción común: $\frac{5}{6} = \frac{91_n}{\overline{(n-1)(n-1)}_n}$

A base 10: $\frac{5}{6}=\frac{9n+1}{n^2-1} \Rightarrow n = 11$

Reemplazando: $77_{11} = \overline{ab} \Rightarrow 84 = \overline{ab}$

$\therefore a+b=12$

27. La fracción decimal $0{,}2\widehat{14}$ tiene como fracción generatriz, de términos en base "n" a 12/33. Hallar el valor de "n".

Resolución:

Del enunciado: $\frac{12_n}{33_n} = 0{,}2\widehat{14}_n$

A fracción común: $\frac{12_n}{33_n} = \frac{214_n - 2_n}{\overline{(n-1)(n-1)0}_n}$

A base 10: $\frac{n+2}{3(n+1)} = \frac{2n^2+n+2}{n^3-n} \Rightarrow n = 6$

$\therefore n = 6$

28. Hallar las tres cifras del período que genera la fracción 5/73.

Resolución:

Como 73 no es $\overset{\circ}{2}$ ni $\overset{\circ}{5}$, se genera una fracción decimal periódica pura: $\frac{5}{73} = 0{,}\widehat{ab\ldots cde}$

A fracción común:

$\frac{5}{73} = \frac{\overline{ab...cde}}{99...999} \Rightarrow 5(99...999) = 73(\overline{ab...cde})$

Considerando las tres últimas cifras:

$\ldots 995 = 73(\ldots\overline{cde}) \Rightarrow \overline{cde} = 315$

$\therefore$ Las tres últimas cifras: 315.

29. Efectuar: $N = \frac{0{,}\hat{1}+0{,}\hat{2}+0{,}\hat{3}+\ldots+0{,}\hat{8}}{0{,}2\hat{1}+0{,}3\hat{2}+0{,}4\hat{3}+\ldots+0{,}9\hat{8}}$

Resolución:

Convirtiendo cada término a fracción común:

$$N = \frac{\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{3}{9}+\ldots+\frac{8}{9}}{\frac{19}{90}+\frac{29}{90}+\frac{39}{90}+\ldots+\frac{89}{90}} = \frac{\frac{36}{9}}{\frac{432}{90}} = \frac{36\times 90}{9\times 432}$$

$\therefore N = 5/6$

30. Hallar la última cifra del desarrollo decimal de:

$$A = \frac{4000\times 2^{17}}{5^{313}\times 8}$$

Resolución:

Descomponiendo en factores primos:

$$A = \frac{2^5\times 5^3\times 2^{17}}{5^{313}\times 2^3}$$

Reduciendo: $A = \dfrac{2^{19}}{5^{310}}$

A fracción decimal: $A = \dfrac{2^{19}\times 2^{310}}{5^{310}\times 2^{310}} = \dfrac{2^{329}}{10^{310}}$

La última cifra de 2^{329}, será la última cifra del desarrollo decimal de A: $2^{329} = \ldots 2$

$\therefore$ La última cifra es 2.

31. Hallar el número entero que dividido por 37 origina el decimal: $0,\widehat{\left(\frac{a+1}{2}\right)(a+1)a}$

Resolución:

Por dato: $\dfrac{N}{37} = 0,\widehat{\left(\frac{a+1}{2}\right)(a+1)a}$

A fracción común:

$$\frac{N}{37} = \frac{\overline{\left(\frac{a+1}{2}\right)(a+1)a}}{999} \Rightarrow 27N = \overline{\left(\frac{a+1}{2}\right)(a+1)a} \ldots(1)$$

$$\Rightarrow \overline{\left(\frac{a+1}{2}\right)(a+1)a} = \overset{\circ}{9} \Rightarrow a = 3$$

En (1): $243 = 27N \quad \therefore N = 9$

32. Si se cumple: $\dfrac{29}{\overline{ab}} = 0,\widehat{bcd}$; hallar: $a + b + c + d$.

Resolución:

A fracción común: $\dfrac{29}{\overline{ab}} = \dfrac{\overline{bcd}}{999}$

Vemos que $\overline{ab}$ es factor de 999 y mayor que 29.

Pero: $999 = 27 \times 37 \Rightarrow \overline{ab} = 37$

Reemplazando: $\dfrac{29}{37} = \dfrac{\overline{bcd}}{999}$

$\Rightarrow \overline{bcd} = 27 \times 29 = 783 \quad \therefore a + b + c + d = 21$

33. ¿Cuántas fracciones periódicas puras de dos cifras de período existen entre 1/5 y 1/3?

Resolución:

Del enunciado: $\dfrac{1}{5} < 0,\widehat{ab} < \dfrac{1}{3}$

Luego: $\dfrac{1}{5} < \dfrac{\overline{ab}}{99} < \dfrac{1}{3} \Rightarrow 19,8 < \overline{ab} < 33$

$\Rightarrow \overline{ab} = \{\underbrace{20; 21; 23; 24 \ldots; 32}_{12\text{ números}}\}$; 22 no cumple

$\therefore$ Existen 12 fracciones.

34. Efectuar: $N = \dfrac{1}{7} + \dfrac{2}{7^2} + \dfrac{1}{7^3} + \dfrac{2}{7^4} + \dfrac{1}{7^5} + \dfrac{2}{7^6} + \ldots$

Resolución:

Tenemos: $N = \dfrac{1}{7} + \dfrac{2}{7^2} + \dfrac{1}{7^3} + \dfrac{2}{7^4} + \ldots$

Multiplicando por 49: $49N = 7 + 2 + \underbrace{\dfrac{1}{7} + \dfrac{2}{7^2} + \ldots}_{N}$

$\Rightarrow 49N - N = 9 \Rightarrow N = \dfrac{9}{48} <> \dfrac{3}{16} \quad \therefore N = \dfrac{3}{16}$

35. Sea: $M = \dfrac{1}{10} + \dfrac{22}{200} + \dfrac{333}{3000} + \ldots$ ("n" sumandos)

Hallar la parte entera de 81M.

Resolución:

De: $M = \dfrac{1}{10} + \dfrac{22}{200} + \dfrac{333}{3000} + \ldots$ ("n" sumandos)

Simplificando:

$M = \dfrac{1}{10} + \dfrac{11}{100} + \dfrac{111}{1000} + \ldots$ ("n" sumandos)

Multiplicando por 9:

$9M = \dfrac{9}{10} + \dfrac{99}{100} + \dfrac{999}{1000} + \ldots$ ("n" sumandos)

Equivalentemente:

$9M = \dfrac{(10-1)}{10} + \dfrac{(10^2-1)}{100} + \dfrac{(10^3-1)}{1000} + \ldots$ ("n" sumandos)

$9M = \left(1 - \dfrac{1}{10}\right) + \left(1 - \dfrac{1}{10^2}\right) + \left(1 - \dfrac{1}{10^3}\right) + \ldots$ ("n" sumandos)

$$9M = n - \underbrace{\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots\right)}_{\frac{1}{9}} = n - \frac{1}{9}$$

Multiplicando por 9: $81M = 9n - 1$

$\therefore$ La parte entera es: $9n - 1$.

36. Hallar la suma de las cifras del período de la siguiente fracción propia:

$$f = \frac{\overbrace{5252\ldots52}^{1990\text{ cifras}}}{\underbrace{148148\ldots148}_{1992\text{ cifras}}}$$

Resolución:

Reduciendo la fracción original:

$$\frac{\overbrace{5252\ldots52}^{1990\text{ cifras}}}{\underbrace{148148\ldots148}_{1992\text{ cifras}}} = \frac{52 \times \overbrace{10101\ldots01}^{1989\text{ cifras}}}{148 \times \underbrace{1001\ldots1001}_{1990\text{ cifras}}}$$

Pero: $999 = 37 \times 27$

Luego:

$$\frac{13 \times 27 \times \overbrace{10101\ldots01}^{1989\text{ cifras}}}{37 \times 27 \times \underbrace{1001\ldots1001}_{1990\text{ cifras}}} = \frac{\overbrace{3545454\ldots5451}^{1991\text{ cifras}}}{\underbrace{999\ldots999}_{1992\text{ cifras}}}$$

$$= 0,\underbrace{\widehat{035454\ldots5451}}_{1992\text{ cifras}}$$

Suma de cifras: $3 + (5 + 4)(994) + 5 + 1 = 8955$

$\therefore$ La suma de cifras del período = 8955.

37. ¿Cuántas fracciones equivalentes a $0,1\widehat{36}$ existen, tales que su numerador sea un número de dos cifras y su denominador un número de tres cifras?

Resolución:

Tenemos: $0,1\overset{\frown}{36} = \frac{136-1}{990} = \frac{135}{990} <> \frac{3}{22}$

Luego: $\frac{a}{b} <> \frac{3}{22} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3n}{22n}$

Por dato:

- Numerador de 2 cifras: $10 \le 3n < 100$
  $10 \le 3n < 100 \Rightarrow n = \{4; 5; ...; 33\}$ ...(1)
- Denominador de 3 cifras:
  $100 \le 22n < 1000 \Rightarrow n = \{5; 6; 7; ...; 45\}$ ...(2)

De (1) y (2): $\underbrace{\{5; 6; 7; ...; 33\}}_{29 \text{ números}}$

∴ Existen 29 fracciones.

38. Sabiendo que: $\frac{a}{\overline{bc}} = 0,\overset{\frown}{18}$; además, a; b y c son los mayores posibles y a ≠ b, hallar: a + b + c.

Resolución:

Tenemos: $\frac{a}{\overline{bc}} = 0,\overset{\frown}{18} = \frac{18}{99} <> \frac{2}{11}$

Para que tenga los mayores valores:

$$\frac{a}{\overline{bc}} = \frac{2\times 4}{11\times 4} = \frac{8}{44} \begin{cases} a = 8 \\ b = 4 \\ c = 4 \end{cases}$$

∴ a + b + c = 16

39. Si se cumple que: $\frac{\overline{ab}}{\overline{cb}} = 0,\overset{\frown}{bad}$; hallar: a + b + c + d.

Resolución:

Tenemos: $\frac{\overline{ab}}{\overline{cb}} = \frac{\overline{bad}}{\underbrace{999}_{(27)(37)}}$

Luego: $\overline{ab} \times 27 \times 37 = \overline{cb} \times \overline{bad}$

Se deduce que: b = 7; d = 9

Reemplazando: $\overline{a7} \times 27 \times 37 = \overline{c7} \times \overline{7a9}$

Vemos que: $\overline{7a9} = \overset{\circ}{9} \Rightarrow a = 2$

Nuevamente: $27 \times 27 \times 37 = \overline{c7} \times 729 \Rightarrow c = 3$

∴ a + b + c + d = 21

40. Hallar el valor de "b", sabiendo que se cumple:

$\frac{a}{11} + \frac{b}{9} = 0,\overset{\frown}{(a+1)(a+b)}$.

Resolución:

Efectuando: $\frac{9\times a + 11\times b}{99} = \frac{\overline{(a+1)(a+b)}}{99}$

Descomponiendo: 9a + 11b = 11a + b + 10

Buscamos valores: $\underset{\substack{\downarrow \\ 2}}{5b} = a + \underset{\substack{\downarrow \\ 5}}{5}$

∴ El valor de "b": 2

41. Se tiene que: $\frac{a}{b} = 0,\hat{a} \wedge \frac{a+2}{b+2} = 0,\overset{\frown}{ef}$

Además: a + 2 = e + f. Hallar: a/b.

Resolución:

De: $\frac{a}{b} = 0,\hat{a} = \frac{a}{9} \Rightarrow b = 9$

Además: $\frac{a+2}{11} = \frac{\overline{ef}}{99} \Rightarrow \overline{ef} = 9(a+2)$ ...(1)

Pero: a + 2 = e + f ...(2)

(2) en (1): $\overline{ef} = 9(e+f)$

Por descomposición: 10e + f = 9e + 9f ⇒ e = 8f

f = 1; e = 8 ⇒ a = 7 ∴ $\frac{a}{b} = \frac{7}{9} = 0,\hat{7}$

42. Si: $\frac{m}{n} - \frac{n}{m} = 1,287878...$, hallar "m + n", sabiendo que m/n es una fracción impropia irreductible.

Resolución:

Se tiene: $\frac{m^2 - n^2}{m\times n} = 1,2\overset{\frown}{87} = \frac{1275}{990} <> \frac{85}{66}$

Luego: $\frac{m^2 - n^2}{m\times n} = \frac{85}{11\times 6} \Rightarrow m = 11; n = 6$

∴ m + n = 17

43. ¿Cuántas fracciones propias pueden generar una fracción decimal periódica pura de dos cifras en el período?

Resolución:

Por dato: $\frac{a}{b} = 0,\overset{\frown}{xy}$

Convirtiendo a fracción común: $\frac{a}{b} = \frac{\overline{xy}}{99}$

Hallamos la cantidad de fracciones propias e irreductibles.

- Si: b = 11 ⇒ a = 1; 2; ...; 10 ⇒ (10 fracciones)
- Si: b = 33 ⇒ a < 33 y PESÍ con 33
  $\Rightarrow \phi_{33} = 33\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{11}\right)$ ⇒ (20 fracciones)
- Si: b = 99 ⇒ a < 99 y PESÍ con 99
  $\Rightarrow \phi_{99} = 99\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{11}\right)$ ⇒ (60 fracciones)

∴ Existen 90 fracciones.

44. Hallar una fracción propia e irreductible de denominador 55, tal que al ser convertido a fracción decimal se obtengan cifras consecutivas crecientes.

Resolución:

La fracción $\frac{n}{55}$, origina una fracción decimal mixta, con una cifra no periódica y dos cifras periódicas.

Por dato: $\frac{n}{55} = 0,a\overset{\frown}{(a+1)(a+2)}$

A fracción común: $\frac{n}{55} = \frac{\overline{a(a+1)(a+2)} - a}{990}$

$\Rightarrow 18 \times n = \overline{a(a+1)2}$ ...(1)

$\Rightarrow \overline{a(a+1)2} = \overset{\circ}{9} \Rightarrow a = 3$

Reemplazando en (1): 18 × n = 342 ⇒ n = 19

∴ La fracción es $\frac{19}{55}$

45. Si se cumple: $\dfrac{0,\widehat{ab}+0,\widehat{bc}+0,\widehat{ca}}{0,\widehat{abc}} = 4,\hat{1}$; hallar el máximo valor de: $a \times b \times c$.

Resolución:

Los términos a fracción común:

$$\dfrac{\dfrac{\overline{ab}}{99}+\dfrac{\overline{bc}}{99}+\dfrac{\overline{ca}}{99}}{\dfrac{\overline{abc}}{999}} = \dfrac{37}{9}$$

Efectuando:

$27(\underbrace{\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}}) = 11(\overline{abc})$

$11(a+b+c) \Rightarrow \overline{abc} = 27(a+b+c)$ ...(α)

Vemos que: $\overline{abc} = \overset{\circ}{9} \Rightarrow a+b+c = \overset{\circ}{9}$ ...(β)

De (α) y (β): $\overline{abc} = 27 \times 18 = 486$

$\therefore\ a \times b \times c = 192$

46. Al dividir un numeral menor que 297 por 27; 81 y 2 se obtiene un entero, un decimal periódico puro y un decimal exacto, respectivamente. ¿Qué decimal se obtiene al dividirlo por 32 076?

Resolución:

Sea N, el número natural: $N < 297$

Por datos:

$\dfrac{N}{27}$ = N.° entero $\Rightarrow N = \overset{\circ}{27}$

$\dfrac{N}{81}$ = N.° dec. p. puro $\Rightarrow N \neq \overset{\circ}{81}$ } $N = 27k$ ...(impar)

$\dfrac{N}{2}$ = N.° dec. exacto $\Rightarrow N \neq \overset{\circ}{2}$

Pero: $32\,076 = 2^2 \times 3^6 \times 11$

Luego: $\dfrac{27 \times k}{4 \times 3^6 \times 11} \xrightarrow{\text{simplif.}} f = \dfrac{k}{4 \times 27 \times 11}$

Si f es irreductible: 27 origina 3 cifras periódicas
11 origina 2 cifras periódicas
4 origina 2 cifras no periódicas

$\Rightarrow$ MCM(3; 2) = 6 cifras periódicas

$\therefore$ "f" tiene la forma: $0,ab\widehat{cdefgh}$

47. Dada la fracción: $\dfrac{47}{270270270...(155\ \text{cifras})}$; calcular la suma de cifras del período.

Resolución:

Fracción común: $\dfrac{47}{\underbrace{270270...27027}_{155\ \text{cifras}}}$

Como el denominador no es $\overset{\circ}{2}$ ni $\overset{\circ}{5}$, origina una fracción decimal periódica pura. Hallamos la parte periódica:

$$\dfrac{47 \times 37}{(270270...27027) \times 37} = \dfrac{1739}{\underbrace{99...999}_{156\ \text{cifras}}} = 0,\widehat{0...01739}$$

$\therefore$ Suma de cifras: $1 + 7 + 3 + 9 = 20$

48. Hallar "x + y + z", sabiendo que:

$$\dfrac{x}{7}+\dfrac{y}{11}+\dfrac{z}{13} = 0,\widehat{946053}$$

Resolución:

Se cumple: $x < 7$; $y < 11$; $z < 13$

Efectuando, tenemos:

$$\dfrac{143x+91y+77z}{7 \times 11 \times 13} = \dfrac{946\,053}{999\,999}$$

Simplificando: $143x + 91y + 77z = 947$ ...(1)

Con respecto al módulo 7: $3x = \overset{\circ}{7} + 2 \Rightarrow x = 3$

En (1): $(143 \times 3) + 91y + 77z = 947$

Reduciendo: $13y + 11z = 74$ ...(2)

Con respecto al módulo 11:

$2y = \overset{\circ}{11} + 8 \Rightarrow y = 4$

En (2): $13 \times 4 + 11z = 74 \Rightarrow z = 2$

$\therefore\ x + y + z = 9$

49. Representar $0,113_6$ en el sistema octanario. Dar como respuesta la suma de las cifras de la parte periódica en dicha base.

Resolución:

Inicialmente: $0,113_6 = \dfrac{113_6}{1000_6}$

Fracción común, en el sistema decimal:

$\dfrac{5}{24} = 0,208\hat{3}$

Luego: 0,208333...a base 8.

Método práctico:

0	208333... × 8
1	666664... × 8
5	333333... × 8
2	666666... × 8
5	333333... × 8
2	666666... × 8
⋮	

Luego: $\dfrac{5}{24} = 0,1\widehat{52}_8$

Suma de cifras de la parte periódica: $5 + 2 = 7$

$\therefore$ La suma pedida es 7.

50. Se sabe que: $0,36 = 0,\widehat{a_1a_2a_3...a_k}_{(9)}$, calcular el valor de: $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k + k$

Resolución:

Convertimos 0,36 a base 9.

Método práctico:

0	36 × 9
3	24 × 9
2	16 × 9
1	44 × 9
3	96 × 9
8	64 × 9
5	76 × 9
6	84 × 9
7	56 × 9
5	04 × 9
0	36 × 9
3	24 × 9

Luego: $0,36 = 0,\widehat{3213856750}_9$

$\therefore\ a_1 + a_2 + \ldots + a_9 + 9 = 49$

51. Hallar una fracción propia $\frac{A}{B}$, tal que origine en la parte decimal una cifra no periódica y 6 cifras en el período; además: A + B = 1209.

Resolución:

Por dato: $\frac{A}{B} = 0,\underbrace{_\,_\,_\,_}_{6\text{cif.}}$

Para el decimal pedido, B debe contener los factores:

- Una cifra no periódica: $2 \vee 5 \vee 10$ ...(1)
- Seis cifras periódicas: $7 \vee 13$ ...(2)

Además, B podría contener los factores:

$11 \vee 27 \vee 37$ ...(3)

Pero: A + B = 1209

Para que sea irreductible, de (1), (2) y (3):

$B = 7 \times 10 \times 11 = 770 \Rightarrow A = 1209 - 770 = 439$

$\therefore\ f = \frac{439}{770}$

52. Sea: $\frac{2}{x} = 0,\widehat{abcdef}$; $\wedge$ $\frac{5}{x} = 0,\widehat{defabc}$

hallar: "x", si: $\overline{def} - \overline{abc} = 429$

Resolución:

Tenemos: $\frac{5}{x} = \frac{\overline{defabc}}{999999}$ ...(1)

$\frac{2}{x} = \frac{\overline{abcdef}}{999999}$ ...(2)

(1) − (2): $\frac{3}{x} = \frac{\overline{defabc} - \overline{abcdef}}{999999}$

Al descomponer: $\frac{3}{x} = \frac{999(\overline{def} - \overline{abc})}{999999}$

Reemplazando: $\frac{3}{x} = \frac{999 \times 429}{999 \times 1001} \Rightarrow x = 7$

$\therefore$ El valor de x = 7.

53. Hallar una fracción equivalente a 377/493, tal que la suma de sus términos sea múltiplo de 42 y la diferencia de dichos términos esté comprendido entre 30 y 80. ¿Cuál es la suma de las cifras del numerador?

Resolución:

Sea $\frac{a}{b}$ la fracción, tal que:

$\frac{a}{b} <> \frac{377}{493} = \frac{13 \times 29}{17 \times 29} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{13n}{17n}$

Por datos: $a + b = \overset{\circ}{42}$

$13n + 17n = \overset{\circ}{42} \Rightarrow 30n = \overset{\circ}{42} \Rightarrow n = \overset{\circ}{7}$ ...(1)

Además: $30 < b - a < 80$

$\Rightarrow 30 < 17n - 13n < 80 \Rightarrow 30 < 4n < 80$

$\Rightarrow 7,5 < n < 20$ ...(2)

De (1) y (2): n = 14

La fracción buscada: $\frac{13 \times 14}{17 \times 14} = \frac{182}{238}$

$\therefore\ \Sigma$ cifras del numerador: 1 + 8 + 2 = 11

54. Dos velas de la misma longitud están hechas de diferentes materiales, de tal manera que una se consume completamente en 3 horas y la otra en 4 horas. ¿A qué hora fueron encendidas simultáneamente las velas, si a las 9 p.m. la longitud de una era el doble de la otra?

Resolución:

Hallamos la parte de cada vela que se consume en cada hora:

De la primera: $\frac{1}{3}$ De la segunda: $\frac{1}{4}$

Lo que se consume a "t" horas:

De la primera: $\frac{t}{3}$ De la segunda: $\frac{t}{4}$

Lo que falta consumirse de cada vela:

De la primera: $1 - \frac{t}{3}$ De la segunda: $1 - \frac{t}{4}$

Por dato:

$1 - \frac{t}{4} = 2\left(1 - \frac{t}{3}\right) \Rightarrow 1 - \frac{t}{4} = 2 - \frac{2t}{3} \Rightarrow \frac{5t}{12} = 1$

$\Rightarrow t = \frac{12}{5} = 2$ h, 24 min

Se encendieron simultáneamente:

9 − 2 h, 24 min = 6 h, 36 min

$\therefore$ Se encendieron a las 06: 36 p.m.

55. Una tela pierde al lavarse 1/20 de su longitud y 1/16 de su anchura. ¿Cuántos metros deben comprarse para obtener después de lavarse 136,80 m^2, si inicialmente el ancho es 6/5 de metro?

Resolución:

Hallamos las longitudes que quedan después de lavar la tela.

Ancho: $\left(1 - \frac{1}{16}\right) \times \frac{6}{5} = \frac{15}{16} \times \frac{6}{5} = \frac{9}{8}$m

Largo: $\left(1 - \frac{1}{20}\right) \times L = \frac{19}{20} \times L$

Área: $\frac{19}{20} \times L \times \frac{9}{8} = 136,80 \Rightarrow L = 128$ m

$\therefore$ Se compran 128 m de tela.

56. Iván lleva al tragamonedas $1400 y cuando va perdiendo los 3/4 de lo que no pierde, apuesta las 2/5 partes de lo que le quedaba, triplicando su apuesta, retirándose luego del juego. Gana o pierde y cuánto.

Resolución:

Sea: No pierde: x, pierde: $\frac{3}{4}x$

Luego: $x + \frac{3}{4}x = 1400 \Rightarrow \frac{7}{4}x = 1400 \Rightarrow x = \$800$

Apostó: $\frac{2}{5} \times 800 = \$320$ (le quedó 800 − 320 = $480)

Recibió: $320 \times 3 = \$960$

Al final tiene: 480 + 960 = \$1440

$\therefore$ Ganó \$40

57. Una piscina tiene "n" tuberías de alimentación; la primera la puede llenar en 2 h, la segunda en 6 h, la tercera en 12 h, la cuarta en 20 h y así sucesivamente. Si todas juntas la llenan en 1 hora y 5 minutos, ¿cuántas son las tuberías?

Resolución:

Hallamos la parte de la piscina que llena cada tubería en 1 h y el total de llenado:

1.ª: $\frac{1}{2}=\frac{1}{1\times 2}=1-\frac{1}{2}$

2.ª: $\frac{1}{6}=\frac{1}{2\times 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

3.ª: $\frac{1}{12}=\frac{1}{3\times 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

$\vdots$

n.ª: $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

Total: $\overline{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{n}{n+1}$

Luego: En 1 h se llena $\frac{n}{n+1}$ piscina.

En $\underbrace{1\text{ h, }5\text{ min}}_{1+\frac{1}{12}=\frac{13}{12}\text{h}}$ se llena 1 piscina.

Se cumple: $\frac{12}{13}=\frac{n}{n+1}\Rightarrow n=12$

$\therefore$ Son 12 tuberías.

58. De un depósito lleno de vino se retira 1/7 de su contenido y se le reemplaza por agua, luego se vuelve a retirar 1/7 de esta mezcla y se vuelve a reemplazar por agua. La cantidad de vino que aún queda en el depósito excede en 30 litros a los 2/3 de la capacidad del depósito. Hallar esta capacidad.

Resolución:

Sea C la capacidad del depósito, que también es la cantidad inicial de vino.

Hallamos la cantidad de vino que queda al final:

$\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)C=\frac{6}{7}\times\frac{6}{7}\times C=\frac{36}{49}C$

Por dato: $\begin{pmatrix}\text{Cantidad}\\ \text{de vino}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\text{ de la capacidad}\\ \text{del depósito}\end{pmatrix}=30$

$\frac{36}{49}C-\frac{2}{3}C=30\Rightarrow\frac{10C}{147}=30\Rightarrow C=441$

$\therefore$ Capacidad del depósito: 441 L

59. Hallar el valor de:

$$H=\frac{3}{5}+\frac{2}{5^2}+\frac{4}{5^3}+\frac{2}{5^4}+\frac{4}{5^5}+\ldots$$

Resolución:

Vemos que: $H-\frac{3}{5}=\frac{2}{5^2}+\frac{4}{5^3}+\frac{2}{5^4}+\frac{4}{5^5}+\ldots$

Multiplicamos a todos los términos por 5^2:

$5^2\left(H-\frac{3}{5}\right)=2+\frac{4}{5}+\frac{2}{5^2}+\frac{4}{5^3}+\ldots$

Reemplazando:

$25\left(H-\frac{3}{5}\right)=2+\frac{4}{5}+H-\frac{3}{5}\Rightarrow 25H-15=2+\frac{1}{5}+H$

$\Rightarrow 24H=\frac{86}{5}\quad\therefore H=\frac{43}{60}$

60. Calcular N, si: $N=1+2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots$

Resolución:

Consideramos las siguientes sub sumas:

$S_1=1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$

$S_2=\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1$

$S_3=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\ldots=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

$S_4=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\ldots\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

y así sucesivamente, se cumple:

$N=2+1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots$

$N=3+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=3+1=4\quad\therefore N=4$

61. Hallar el numerador de una fracción propia e irreductible, cuyo denominador es 101, si se sabe que las cifras periódicas es un número capicúa y sus dos primeras cifras son consecutivas y decrecientes.

Resolución:

Como 101 es factor de 9999, entonces se origina una fracción decimal periódica pura con 4 cifras en el período.

Por dato tenemos: $\frac{n}{101}=0,\widehat{(a+1)aa(a+1)}$

A fracción común: $\frac{n}{101}=\frac{\overline{(a+1)aa(a+1)}}{\underbrace{9999}_{101\times 99}}$

Luego: $\overline{(a+1)aa(a+1)}=99n$ ...(1)

Entonces: $\overline{(a+1)aa(a+1)}=\overset{\circ}{99}$

Mediante divisibilidad por 99, se cumple:

$\overline{(a+1)a}+\overline{a(a+1)}=\overset{\circ}{99}\Rightarrow a=4$

Reemplazando en (1): $5445 = 99n \Rightarrow n = 55$

$\therefore$ El numerador es 55.

62. Hallar el valor de: $a + b + c + d$, si se cumple que:

$$\frac{13}{\underbrace{aaa...a}_{\overline{abcd}\text{ cifras}}} = 0,\underbrace{\overbrace{bbb...bcd7}}_{\overline{abcd}\text{ cifras}}$$

Resolución:

Sabemos que el número: $\underbrace{\overline{aaa...aa}}_{\overline{abcd}\text{ cifras}}$

Su equivalente es: $a \times \underbrace{(111...11)}_{\overline{abcd}\text{ cifras}}$

Multiplicando y dividiendo por 9: $\frac{a}{9}\underbrace{(999...99)}_{\overline{abcd}\text{ cifras}}$

Reemplazando: $\dfrac{13}{\frac{a}{9}\underbrace{(999...99)}_{\overline{abcd}\text{ cifras}}} = \dfrac{\overline{bbb...bcd7}}{\underbrace{(999...99)}_{\overline{abcd}\text{ cifras}}}$

Luego:

$9 \times 13 = \underbrace{\overline{bbb...bcd7}}_{\overline{abcd}\text{ cifras}} \times a \Rightarrow 117 = \underbrace{\overline{bbb...bcd7}}_{\overline{abcd}\text{ cifras}} \times a$

Vemos que cumple: $a = 1$

Luego: $\overline{bbb...bcd7} = 117 = 00...0117$

$\Rightarrow b = 0; c = 1; d = 1 \quad \therefore a + b + c + d = 3$

63. Hallar la suma de los términos de:

$$H = \frac{\overbrace{77...77}^{n\text{ cifras}}\overbrace{88...88}^{n\text{ cifras}}}{\underbrace{66...66}_{n\text{ cifras}}\underbrace{55...55}_{n\text{ cifras}}} - 1$$

Resolución:

Expresando abreviadamente los términos de la fracción:

$$\overbrace{77...77}^{n\text{ cifras}}\overbrace{88...88}^{n\text{ cifras}} = \overbrace{77...77}^{n\text{ cifras}}\overbrace{00...00}^{n\text{ cifras}} + \overbrace{88...88}^{n\text{ cifras}}$$

$$\overbrace{77...77}^{n\text{ cifras}}\overbrace{88...88}^{n\text{ cifras}} = \overbrace{77...77}^{n\text{ cifras}} \times 10^n + \overbrace{88...88}^{n\text{ cifras}}$$

$$\overbrace{77...77}^{n\text{ cifras}}\overbrace{88...88}^{n\text{ cifras}} = 7\overbrace{(11...11)}^{n\text{ cifras}} \times 10^n + 8\overbrace{(11...11)}^{n\text{ cifras}}$$

Factorizando: $\overbrace{(11...11)}^{n\text{ cifras}}(7 \times 10^n + 8)$

Análogamente, deducimos que:

$$\underbrace{66...66}_{n\text{ cifras}}\underbrace{55...55}_{n\text{ cifras}} = \overbrace{(11...11)}^{n\text{ cifras}}(6 \times 10^n + 5)$$

Reemplazando: $H = \dfrac{\overbrace{(11...11)}^{n\text{ cifras}}(7 \times 10^n + 8)}{\underbrace{(11...11)}_{n\text{ cifras}}(6 \times 10^n + 5)} - 1$

Dando común denominador:

$$H = \frac{7 \times 10^n + 8 - 6 \times 10^n - 5}{6 \times 10^n + 5} = \frac{10^n + 3}{6 \times 10^n + 5}$$

La suma de sus términos:

$10^n + 3 + 6(10^n) + 5 = 7(10^n) + 8 \quad \therefore 7(10^n) + 8$

64. Un número convertido a los sistemas senario y nonario viene representado por $0,\overline{abc}$ y $0,\overline{cb(a-1)}$, respectivamente. Hallar el número en el sistema decimal.

Resolución:

Se cumple que: $0,\overline{abc}_6 = 0,\overline{cb(a-1)}_9$

A fracción común: $\dfrac{\overline{abc}_6}{1000_6} = \dfrac{\overline{cb(a-1)}_9}{1000_9}$

Al sistema decimal:

$$\frac{36a + 6b + c}{216} = \frac{81c + 9b + a - 1}{729}$$

Efectuando:

$972a + 162b + 27c = 648c + 72b + 8a - 8$

Reduciendo: $8 + 964a + 90b = 621c$

Se verifica para: $a = 1; b = 3$ y $c = 2$

El número será: $0,132_6 = \dfrac{132_6}{1000_6}$

$\therefore$ En el sistema decimal: $\dfrac{56}{216} <> \dfrac{7}{27} = 0,\widehat{259}$

65. Calcular la suma de las 4 últimas cifras del período decimal originado por la fracción: $f = \dfrac{15}{1940}$.

Resolución:

Reduciendo la fracción: $\dfrac{15}{1940} <> \dfrac{3}{388}$

Analizamos el denominador de la fracción irreductible: $388 = 2^2 \times 97$. Vemos que se origina una fracción decimal periódica mixta con 2 cifras no periódicas y "n" cifras periódicas. Se cumple:

$$\frac{3}{388} = 0,ab\underbrace{\overbrace{cd...efgh}}_{n\text{ cifras}}$$

A fracción común: $\dfrac{3}{388} = \dfrac{\overline{abcd...efgh} - \overline{ab}}{\underbrace{99...99}_{n\text{ cifras}}00}$

Se deduce que: $\overline{ab} = 00$ y descomponemos en factores.

$$\frac{3}{4 \times 97} = \frac{\overline{cd...efgh}}{\underbrace{(99...99)}_{n\text{ cifras}} \times 25 \times 4}$$

Pero: $\underbrace{99...99}_{n\text{ cifras}} = 97(...5567)$

Reemplazando y simplificando:

$$\frac{3}{4 \times 97} = \frac{\overline{cd...efgh}}{97(...5567) \times 25 \times 4}$$

Luego: $\overline{cd...efgh} = 3(...5567) \times 25$

Enseguida: $\overline{cd...efgh} = ...7525$

$\therefore$ La suma pedida: $7 + 5 + 2 + 5 = 19$

66. Hallar la suma de las cifras de la parte periódica y no periódica de la fracción propia e irreductible

de denominador 2200, tal que la parte no periódica sea 20 veces la parte periódica.

Resolución:

Analizamos los factores del denominador:

$2200 = 2^3 \times 5^2 \times 11$.

Vemos que el factor $2^3 \times 5^2$ origina 3 cifras no periódicas y el factor 11 origina dos cifras periódicas.

Luego, la fracción propia será: $\frac{n}{2200} = 0,abc\widehat{de}$.

(Pero: $\overline{abc} = 20 \times \overline{de}$)

A fracción común: $\frac{n}{2200} = \frac{\overline{abcde} - \overline{abc}}{99\,000}$

Luego: $\overline{abcde} - \overline{abc} = 45n$

Descomponiendo en bloques:

$\underbrace{\overline{abc00}}_{100\times\overline{abc}} + \overline{de} - abc = 45 \times n$

Reduciendo:

$99(\overline{abc}) + \overline{de} = 45n \Rightarrow 99(20 \times \overline{de}) + \overline{de} = 45n$

$1981(\overline{de}) = \overset{\circ}{45} \Rightarrow \overline{de} = \overset{\circ}{45}$

Se verifica para $\overline{de} = 45$; $\overline{abc} = 20 \times 45 = 900$

∴ Sumamos las cifras de ambas partes:

$9 + 0 + 0 + 4 + 5 = 18$

67. Determine la cantidad de cifras no periódicas de la fracción: $f = \frac{25\,600}{64! - 32!}$

Resolución:

Para saber la cantidad de cifras no periódicas originada por una fracción irreductible lo da el mayor exponente de los factores 2 y/o 5.

Hallando los exponentes de los factores 2 y/o 5 de cada factorial (ver números primos)

$64! = 2^{63} \times 5^{14} \times P_1$

P_1: producto de los demás números primos.

$32! = 2^{31} \times 5^{7} \times P_2$

P_2: producto de los demás números primos.

Reemplazando:

$$f = \frac{25\,600}{2^{63}\times 5^{14}\times P_1 - 2^{31}\times 5^{7}\times P_2} = \frac{2^{10}\times 5^2}{2^{31}\times 5^{7}(2^{32}\times 5^{7}\times P_1 - P_2)}$$

Reduciendo: $f = \frac{1}{2^{21}\times 5^{5}(2^{32}\times 5^{7}\times P_1 - P_2)}$

∴ El factor $2^{21} \times 5^5$ origina 21 cifras no periódicas.

68. Hallar el menor número racional mayor que $\frac{5}{12}$ tal que al sumar p veces ($p \in \mathbb{Z}^+$) el denominador al numerador y p veces el numerador al denominador, se obtiene el racional 2.

Resolución:

Sea: $f = \frac{a}{b} > \frac{5}{12}$ tal que, $\frac{a + pb}{b + pa} = 2$

$\Rightarrow a + pb = 2b + 2pa$

$\Rightarrow \frac{a}{b} + p = 2 + 2p\frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a}{b}(1 - 2p) = 2 - p$

$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2-p}{1-2p} \Rightarrow \frac{2-p}{1-2p} > \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{19-2p}{12(1-2p)} > 0$

$\Rightarrow p < \frac{1}{2} \vee p > \frac{19}{2} \Rightarrow p = 10; 11; \ldots$

Si: $p = 10 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{8}{19} \vee p = 11 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{9}{21}$

∴ El menor es: $\frac{a}{b} = \frac{8}{19}$

69. ¿Cuántas fracciones propias e irreductibles existen tal que están comprendidas entre $\frac{21}{33}$ y $\frac{41}{43}$ y que la suma de sus términos sea 100?

Resolución:

Sea: $f = \frac{a}{b}$, $(a; b) = 1$; $a + b = 100$

$\frac{21}{33} < \frac{a}{b} < \frac{41}{43} \Rightarrow \frac{21+33}{33} < \frac{a+b}{b} < \frac{41+43}{43}$

$\Rightarrow \frac{54}{33} < \frac{a+b}{b} < \frac{84}{43}$

i) $\frac{54}{33} < \frac{a+b}{b} \Rightarrow 54b < 3300 \Rightarrow b < 61,1$

ii) $\frac{100}{b} < \frac{84}{43} \Rightarrow b > 51,1 \Rightarrow 51,1 < b < 61,1$

$b = 52; \underline{53}; 54; 55; 56; \underline{57}; 58; \underline{59}; 60; \underline{61}$.

∴ Existen 4 fracciones propias e irreductibles.

70. Sean a y b la suma de todos los decimales distintos de la forma $f = 0,\hat{n}$ y $g = 0,(n+1)\hat{n}$ respectivamente, desde $n = 2$ hasta $n = 7$; calcular $a \times b^{-1}$.

Resolución:

$a = 0,\hat{2} + 0,\hat{3} + 0,\hat{4} + \ldots + 0,\hat{7}$

$\Rightarrow \frac{2+3+4+5+6+7}{9} = 3$

$b = 0,3\hat{2} + 0,4\hat{3} + \ldots + 0,8\hat{7} =$

$\Rightarrow \frac{29 + 39 + \ldots + 79}{90} = \frac{324}{90}$

$a \times b^{-1} = 3\left(\frac{90}{324}\right) = \frac{5}{6} = 0,8\hat{3}$

71. Hallar una fracción decimal, tal que al llevarlo a las bases 5 y 7 se tiene $0,\widehat{mn}_{(5)} = 0,\widehat{(2m)n}_{(7)}$

Resolución:

$0,\widehat{mn}_{(5)} = 0,\widehat{(2m)n}_{(7)} \Rightarrow \frac{\overline{mn}_{(5)}}{44_{(5)}} = \frac{\overline{(2m)n}_{(7)}}{66_{(7)}}$

$\frac{5m+n}{24} = \frac{14m+n}{48} \Rightarrow 240m + 48n = 336m + 24n$

$\Rightarrow 24n = 96m \Rightarrow n = 4m$; si $m = 1$

Como: $m, n < 5 \Rightarrow n = 4$

∴ $0,\widehat{14}_{(5)} = 0,\widehat{24}_{(7)} = \frac{3}{8}$

72. ¿Cuántas fracciones propias e irreductibles de denominador 275 existen, tal que en su desarrollo

decimal la parte no periódica excede en 12 a la parte periódica?

Resolución:

Sea $f = \frac{n}{275} = \frac{n}{5^2 \times 11} = 0,ab\widehat{cd}$; $\overline{ab} - \overline{cd} = 12$

$g = \frac{\overline{abcd} - \overline{ab}}{9900} = \frac{1000a + 100b + 10c + d - 10a - b}{2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 11}$

$g = \frac{100(10a + b) + \overline{cd} - \overline{ab}}{2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 11} = \frac{100\overline{ab} + \overline{cd} - \overline{ab}}{2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 11}$

$g = \frac{99\overline{ab} + \overline{cd}}{2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 11} = \frac{99\overline{ab} + \overline{ab} - 12}{2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 11}$

$g = \frac{100\overline{ab} - 12}{2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 11} = \frac{4(25\overline{ab} - 3)}{2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 11}$

$g = \frac{25\overline{ab} - 3}{3^2 \times 5^2 \times 11} \Rightarrow 25\overline{ab} - 3 = \overset{\circ}{9}$

$\Rightarrow (27 - 2)\overline{ab} - (9 - 6) = \overset{\circ}{9} \Rightarrow -2\overline{ab} + 6 = \overset{\circ}{9}$

$\Rightarrow 2\overline{ab} - 6 = \overset{\circ}{9} \Rightarrow 2(\overline{ab} - 3) = \overset{\circ}{9} \Leftrightarrow \overline{ab} - 3 = \overset{\circ}{9}$

$\Rightarrow \overline{ab} = \overset{\circ}{9} + 3$; pero $12 < \overline{ab} < 100$

$\Rightarrow 12 < 9k + 3 < 100 \Rightarrow 9 < 9k < 97$

$\Rightarrow 1 < k < 10,7 \Rightarrow k = 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$

$\therefore$ 9 fracciones propias e irreductibles.

73. Hallar dos fracciones que tienen denominadores 13 y por numeradores dos números consecutivos que comprendan entre ellos a la fracción decimal $0,1\widehat{545}$. Dar como respuestas la mayor fracción.

Resolución:

Sean las fracciones: $f = \frac{a}{13} \wedge g = \frac{a+1}{13}$, además:

$0,1\widehat{545} = \frac{1545 - 15}{9900} = \frac{17}{110} \Rightarrow \frac{a}{13} < \frac{17}{110} < \frac{a+1}{13}$

i. $a < \frac{17 \times 13}{110} \Rightarrow a < 2,0\widehat{09}$

ii. $\frac{221}{110} < a + 1 \Rightarrow a > 1,0\widehat{09}$

$\Rightarrow 1,009 < a < 2,009 \Rightarrow \frac{2}{13}; \frac{3}{13}$

$\therefore$ El mayor es $\frac{3}{13}$

74. La suma y el producto de dos fracciones irreductibles son dos fracciones homogéneas cuyos numeradores son 37 y 7 respectivamente. Si todos los términos de las dos primeras fracciones suman 15. Hallar el producto de estos términos.

Resolución:

Sean las fracciones irreductibles: $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$; tal que:

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} = \frac{37}{x}$ ...(1)

$\frac{ac}{bd} = \frac{7}{x} \Rightarrow a = 7; c = 1$

En (1): $7d + b = 37 \Rightarrow d = 5; b = 2$

luego: $a + b + c + d = 15$

$\therefore a \times b \times c \times d = 70$

75. Determine la cantidad de fracciones irreductibles comprendidas entre $\frac{12}{19}$ y $\frac{13}{16}$, tal que la diferencia de sus términos es 40.

Resolución:

$\frac{12}{19} < f < \frac{13}{16}$

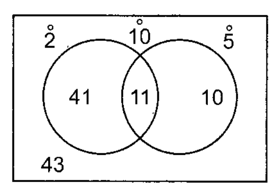
Sea $f = \frac{a}{b}$, tal que: $b - a = 40$

$\frac{12}{19} < \frac{a}{a+40} < \frac{13}{16} \Rightarrow \frac{12}{19} < \frac{a}{a+40} \wedge \frac{a}{a+40} < \frac{13}{16}$

Luego: $68,5 < a < 173,3$

a: 69; 70; 71; ...; 173. Retirando los valores que contengan al factor 2 y al 5.

70; 72; ...; 172 ⇒ 52 números } 73
70; 75; ...; 170 ⇒ 21 números }
70; 80; ...; 170 ⇒ 11 números } 62 números



$\therefore$ Quedan 43 números.

76. Hallar la cantidad de fracciones irreductibles impropias de la forma $\frac{a}{50}$; $a > 0$ menores que 2,1 que dan origen a números decimales exactos con la primera cifra decimal no nula.

Resolución:

$1 < \frac{a}{50} < 2,1 \Rightarrow 50 < a < 105$

$\frac{a}{50} = \frac{a}{2 \times 5^2}$; (El denominador debe ser 10)

$a = 55; 60; 65; ...; 95$

$\therefore$ Existen 9 números

77. Hallar la suma $0,\widehat{2046}_{(7)} + 0,1\widehat{3}_{(5)}$ en la base 6.

$S = 0,\widehat{2046}_{(7)} + 0,1\widehat{3}_{(5)} = \frac{2046_{(7)}}{666_{(7)}} + \frac{13_{(5)} - 1}{40_{(5)}}$

$S = \frac{720}{2400} + \frac{7}{20} = \frac{13}{20} = 0,65$

Luego, a base 6

0	65×6
3	90×6
5	40×6
2	40×6
2	40
⋮	

$\Rightarrow 0,65 = 0,35\widehat{2}_{(6)}$

78. Una fracción irreductible tiene la siguiente propiedad: al sumar 5 unidades a su numerador y 9 unidades a su denominador, la fracción no cambia de valor. Determine la suma de sus términos.

Resolución:

Sea la fracción irreductible:

$f = \frac{a}{b}$; a y b son PESÍ (primos entre sí)

$\frac{a+5}{b+9} = \frac{a}{b} = \frac{⑤}{⑨}$ PESÍ $\Rightarrow f = \frac{5}{9}$ $\quad \therefore a + b = 14$

79. La fracción irreductible $\frac{a}{b}$ al expresarse como un número, decimal, genera un decimal periódico puro con una cifra en el periodo el cual es "a". Determinar el número de valores de N, si la fracción irreductible $\frac{\overline{ba}}{N}$ genera 6 cifras en el período. Sabiendo que "a" es el número de divisores propios de un número primo de 3 cifras.

Resolución:

Observación: a = 1

- $\frac{1}{b} = 0,\hat{1} \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{1}{9} \Rightarrow b = 9$
- $\frac{91}{N} = _,\underbrace{\widehat{pqrstw}}_{6\text{ cifras}} \Rightarrow 999999 = 3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 15$

$\left.\begin{array}{l} 11 \times 37 \\ 11 \times 37 \times 3 \\ 11 \times 37 \times 3^2 \\ 11 \times 37 \times 3^3 \\ 11 \times 3^3 \end{array}\right\} \therefore$ Existen 5 valores

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2009 - I)

Clasifique como verdadero (V) o falso (F) cada una de las siguientes afirmaciones:

I. $\forall$ a; b números enteros, $\frac{a}{b}$ es un número racional.

II. $\forall$ a; b números enteros, $\frac{a+b}{1+a^2}$ es un número racional.

III. Si $k \in \mathbb{Z}$ y k^2 es par, entonces "k" es par.

A) FVV B) FFV C) VFV
D) VFF E) FFF

Resolución:

I. $\forall$ a; b números enteros, "a/b" es un número racional.
Esta proposición es falsa, porque si "a" es cero: $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$

II. $\forall$ a; b números enteros, $\frac{a+b}{1+a^2}$ es un número racional.
Esta proposición es verdadera ya que si "a" es entero, "$a^2 + 1$" es entero mayor o igual que 1, además a + b es entero por ser "a" y "b" enteros.

III. Si $k \in \mathbb{Z}$ y k^2 es par, entonces "k" es par.
Esta proposición es verdadera
k^2 es par $\Rightarrow k^2 = 2(2n^2) \Rightarrow k = 2n$, con $n \in \mathbb{Z}$

Clave: A

PROBLEMA 2 (UNI 2010 - II)

Dos fracciones que tienen denominadores 13 y por numeradores dos números enteros consecutivos comprenden entre ellas la fracción cuyo valor decimal es $0,15\widehat{45}$. Halle la menor de las fracciones.

A) 2/13 B) 3/13 C) 4/13
D) 5/13 E) 6/13

Resolución:

Sean las fracciones: $\frac{x}{13}$ y $\frac{x+1}{13}$

Por dato: $\frac{x}{13} < 0,15\widehat{45} < \frac{x+1}{13}$ ...(I)

Convirtiendo el número decimal:

$0,15\widehat{45} = \frac{1545-15}{9900} = \frac{1530}{9900} = \frac{153}{990} = \frac{17}{110}$ ...(II)

Reemplazando (II) en (I):

$\frac{x}{13} < \frac{17}{100} < \frac{x+1}{13} \Rightarrow \frac{x}{13} < \frac{17}{100} \wedge \frac{17}{100} < \frac{x+1}{13}$

$\Rightarrow x < 2,21 \wedge 1,21 < x$

Como: $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 2$

$\therefore$ La menor fracción es $\frac{2}{13}$

Clave: A

PROBLEMA 3 (UNI 2011 - I)

Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales y el intervalo $\langle 0; 1]$, se dan las siguientes proposiciones:

I. Todo número "a" en $\langle 0; 1] \cap \mathbb{Q}$, se puede expresar como un decimal periódico.

II. Todo número "a" en $\langle 0; 1]$, se puede expresar en el sistema binario, en la forma $a = 0, a_1a_2 \ldots a_i \ldots$; donde el número de cifras a_i iguales a 1 es Infinito.

III. Si $r \in \langle 0; 1] - \mathbb{Q}$, entonces $\frac{1}{r} \in \langle 0; 1] - \mathbb{Q}$

Indique la secuencia correcta, después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

A) VVF B) VVV C) VFV
D) VFF E) FVF

Resolución:

De los enunciados:

I. Todo número "a", en $\langle 0; 1] \cap \mathbb{Q}$ se puede expresar como un decimal periódico, es verdadero, porque:

Si: $a \in \langle 0; 1] \cap \mathbb{Q} \Rightarrow a \in \mathbb{Q}$.
Luego, se puede expresar como un decimal periódico.

Ejemplo:

$\frac{1}{2} = 0,4\hat{9}$; $\frac{1}{3} = 0,\hat{3}$; $\frac{1}{6} = 0,1\hat{6}$ (V)

II. Todo número "a" en $\langle 0; 1]$ se puede expresar en sistema binario, en la forma: $a = 0,a_1a_2 \ldots a_i \ldots$, donde el número de cifras a_i iguales a 1 es infinito, este enunciado es falso, porque:

si $a = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{100_2} = 0,01_{(2)}$

Donde la cantidad de cifras 1 es finita.

III. Si: $r \in \langle 0; 1] - \mathbb{Q}$; entonces $\frac{1}{r} \in \langle 0; 1] - \mathbb{Q}$ (Falso)

$\Rightarrow r \in \langle 0; 1] - \mathbb{Q} \Rightarrow r \in \mathbb{I}$

Ejemplo:

$\frac{1}{\sqrt{2}} \in \langle 0; 1] - \mathbb{Q}$

$\therefore$ La secuencia es: VFF

Clave: D

PROBLEMA 4 (UNI 2011 - II)

Determine la cantidad de fracciones propias e irreductibles que están comprendidas entre 9/33 y 45/47, tales que la suma de sus términos sea 90.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

Resolución:

Sea la fracción pedida: $\frac{90-a}{a}$

$\frac{3}{11} < \frac{90-a}{a} < \frac{45}{47} \Rightarrow \frac{3}{11} < \frac{90}{a} - 1 < \frac{45}{47}$

$\frac{14}{11} < \frac{90}{a} < \frac{92}{47} \Rightarrow \frac{47}{46} < \frac{a}{45} < \frac{11}{7}$

$\Rightarrow 45,98 < a < 70,71 \Rightarrow a \in \{46; 47; 48; \ldots; 70\}$

Pero como la fracción debe ser irreductible:

$a \neq \overset{\circ}{2}$; $a \neq \overset{\circ}{3}$; $a \neq \overset{\circ}{5} \Rightarrow a \in \{47; 49; 53; 59; 61; 67\}$

$\therefore$ Existen 6 valores.

Clave: D

PROBLEMA 5 (UNI 2012 - I)

Determine cuántos de los siguientes números racionales $\frac{157}{125}; \frac{786}{625}; \frac{253}{200}; \frac{2519}{2000}$ pertenecen al intervalo $\left\langle \frac{503}{400}; \sqrt[3]{2} \right]$

A) Ningún número B) Solo un número
C) Solo dos números D) Solo tres números
E) Todos los números

Resolución:

$$\frac{503}{400} < N \leq \sqrt[3]{2} \Rightarrow 1,2575 < N \leq \sqrt[3]{2}$$

Los números racionales:

$\frac{157}{125}$;	$\frac{786}{625}$;	$\frac{253}{200}$;	$\frac{2519}{2000}$
↓	↓	↓	↓
1,256	1,2576	1,265	1,2595
no cumple	si cumple	no cumple	si cumple
	$1,2576^3 < 2$	$1,265^3 > 2$	$1,2595^3 < 2$

$\therefore$ 2 números cumplen: $\frac{786}{625}$ y $\frac{2519}{2000}$

Clave: C

PROBLEMA 6 (UNI 2013 - I)

Halle la suma de los siguientes números:

$n_1 = 1,3125$; $n_2 = \frac{21}{16}$; $n_3 = 1,\widehat{36}$

$n_4 = 1 + \frac{3}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{5}{10^4}$

A) $\frac{322}{111}$ B) $\frac{647}{113}$ C) $\frac{787}{147}$
D) $\frac{933}{176}$ E) $\frac{987}{181}$

Resolución:

$n_1 = 1,3125 = 1 + \frac{3125}{10000} = 1 + \frac{5}{16} = \frac{21}{16}$

$n_2 = \frac{21}{16}$

$n_3 = 1,\widehat{36} = 1 + \frac{36}{99} = 1 + \frac{4}{11} = \frac{15}{11}$

$n_4 = 1 + \frac{3}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{5}{10^4} = 1 + \frac{3125}{10000} = \frac{21}{16}$

$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = \frac{21}{16} + \frac{21}{16} + \frac{21}{16} + \frac{15}{11}$

$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = \frac{63}{16} + \frac{15}{11} = \frac{933}{176}$

Clave: D

PROBLEMA 7 (UNI 2013 - II)

Consideremos la expresión:

$$E = 0,3\hat{a} + 0,33\hat{a} + 0,333\hat{a}$$

Determine el valor de "a" de manera que E está lo más próximo a 1,0740

A) 1 B) 2 C) 3
D) 6 E) 9

Resolución:

$E = 0,3\hat{a} + 0,33\hat{a} + 0,333\hat{a}$

$E = \frac{\overline{3a} - 3}{90} + \frac{\overline{33a} - 33}{900} + \frac{\overline{333a} - 333}{9000}$

$E = \frac{27 + a}{90} + \frac{297 + a}{900} + \frac{2997 + a}{9000} = \frac{8667 + 111a}{9000}$

E es lo más próximo a 1,074

$\Rightarrow E \leq 1,074 \vee E \geq 1,074$

$\Rightarrow a \leq 9 \vee a \geq 9 \quad \therefore a = 9$

Clave: E

PROBLEMA 8 (UNI 2014 - I)

Indique la alternativa correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F), según el orden dado:

I. $\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+...=0$

II. Cada número irracional se puede aproximar por un número racional.

III. Si $A=\langle 0;1\rangle \cap \mathbb{Q}^c$, entonces $\frac{1}{2}\in A$, donde $\mathbb{Q}^c$ indica el complemento del conjunto de los números racionales.

A) VVV B) VVF C) FVV
D) FVF E) FFF

Resolución:

I. Si: $\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+...=0$
La proposición es falsa ya que se suman infinitos términos (observe que la cantidad de términos o es par o es impar).

II. La proposición es verdadera ya que todo número irracional se puede expresar como una fracción continua simple infinita y aplicando las convergentes o reducidas se aproxima a un número racional.

III. La proposición es verdadera ya que:
$A=\langle 0;1\rangle \cap \mathbb{Q}^c \Rightarrow A=\langle 0;1\rangle \cap \Pi \Rightarrow A=\langle 0;1\rangle \Rightarrow \frac{1}{2}\in A$

$\therefore$ FVV

Clave: C

PROBLEMA 9 (UNI 2014 - II)

Indique la alternativa correcta después de determinar si cada proposición es verdadera (V) o falsa (F), según el orden dado.

I. Si $y\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$, $x\in\mathbb{Q}$, entonces $\frac{x}{y}\in\mathbb{Q}$.

II. Si a y b son irracionales, entonces $a+b$ y $a\times b$ son racionales.

III. Si $a\in\mathbb{Q}$ y b es irracional, entonces $a\times b$ es irracional.

A) VVV B) VFV C) VFF
D) FVV E) FFF

Resolución

I. Si: $y\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}\wedge x\in\mathbb{Q}$
Entonces, por propiedad de clausura $\frac{x}{y}\in\mathbb{Q}$. (V)

II. Si a y b son irracionales, entonces $a+b$ y $a\times b$ son racionales.
Si tomamos: $a=\sqrt{2}$ y $b=\sqrt{2}$, no se cumple. (F)

III. Si $a\in\mathbb{Q}$ y b es irracional, entonces $a\times b$ es irracional
Si tomamos: $a=0$; $a\times b=0$, no se cumple. (F)

$\therefore$ VFF

Clave: C

PROBLEMA 10 (UNI 2015 - I)

En la expresión siguiente:

$$0,a\widehat{b}-0,b\widehat{a}=0,4\widehat{4};\ b\neq 0$$

Entonces la suma de todos los valores posibles de $0,a\widehat{b}$ que satisfacen la ecuación anterior es:

A) $0,6\widehat{1}$ B) $1,3\widehat{3}$ C) $2,1\widehat{6}$
D) $3,1\widehat{1}$ E) $4,1\widehat{6}$

Resolución:

$$\frac{\overline{ab}-a}{90}-\frac{\overline{ba}-b}{90}=\frac{44-4}{90}$$

$8a-8b=40 \Rightarrow a-b=5$

Piden: $0,a\widehat{b}=\frac{\overline{ab}-a}{25}$

Reemplazando: $\frac{94-9}{90}+\frac{83-8}{90}+\frac{72-7}{90}+\frac{61-6}{90}$

Sumando: $\frac{280}{90}=\frac{28}{9}=3,1\widehat{1}$

Clave: D

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. ¿Cuántas fracciones propias son mayores que 2/7 sabiendo que su denominador es 50?

A) 37 B) 36 C) 42 D) 38 E) 35

2. Determinar cuántas fracciones propias irreductibles existen tales que su denominador sea 56.

A) 24 B) 25 C) 22 D) 26 E) 27

3. Determinar la suma de todas las fracciones impropias e irreductibles, menores que 5, cuyo denominador sea 40 y su numerador un cuadrado perfecto.

A) 3,5 B) 10,5 C) 11,2
D) 19,7 E) 23,75

4. Hallar la fracción equivalente a 377/493 tal que la suma de sus términos es múltiplo de 42, la diferencia de dicho término está comprendida entre 30 y 80. Calcular la suma de cifras del numerador.

A) 10 B) 11 C) 12 D) 9 E) 8

5. El denominador de una fracción excede al numerador en una unidad. Si se agrega a ambos miembros de la fracción una unidad, la nueva fracción excede a la original en 1/72. ¿Cuál es la fracción original?

A) 3/4 B) 4/5 C) 5/6
D) 6/7 E) 7/8

6. Hallar la fracción impropia que resulta duplicada, si se resta a sus 2 términos, la mitad de su numerador.

A) 7/4 B) 5/3 C) 3/2
D) 7/2 E) 9/4

7. Convierta la fracción 5/16 en una suma de fracciones, cuyos denominadores sean potencias de seis. Dar como respuesta la suma de los numeradores que se obtienen.

A) 10 B) 12 C) 9 D) 11 E) 13

8. Hallar la fracción de menores términos equivalente a 85/187, tal que la suma de sus términos sea múltiplo de 3 y 8; además la diferencia de sus términos sea múltiplo de 7. Indicar la suma de cifras del numerador.

A) 6 B) 9 C) 12 D) 14 E) 17

9. Determinar el número de fracciones equivalentes a 44/72 que tienen por denominador un número de 3 cifras que es múltiplo de 7 pero no de 5.

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

10. Hallar N, si $\frac{N}{\overline{3a5a}}$ es equivalente a 13/17.

A) 2886 B) 2860 C) 2847
D) 2873 E) 2899

11. Hallar 3 fracciones equivalentes a 2/3; 4/5 y 6/7, tales que el denominador de la primera sea igual al numerador de la segunda y que el denominador de la segunda, sea igual al numerador de la tercera. Dar como respuesta la suma de los numeradores de las fracciones que tengan los términos más sencillos.

A) 45 B) 70 C) 54 D) 27 E) 36

12. Si a los dos términos de una fracción se añade 2 y 7 respectivamente, resulta una fracción equivalente a la original, entonces la fracción inicial es:

A) 2/7 B) 7/2 C) 4/7
D) 3/5 E) N. A.

13. ¿Cuántas fracciones propias e irreductibles, tienen como denominador 1530?

A) 384 B) 383 C) 382
D) 381 E) 380

14. ¿Cuántas fracciones impropias de denominador 120 están comprendidas entre $\frac{4}{3}$ y $\frac{5}{2}$?

A) 141 B) 120 C) 139
D) 150 E)110

15. Una persona se pone a jugar cartas y en su primera partida pierde un cuarto de su dinero; en una segunda partida pierde 2/7 de lo que le queda; en una tercera partida pierde 4/9 de lo que le quedaba. ¿Cuánto tenía inicialmente si se quedó con 375 soles?

A) 1260 B) 1840 C) 1420
D) 1970 E) 1750

16. El precio de un artículo subió en junio 2/7, en julio se incrementó en 2/3 y en agosto aumentó en 3/5. ¿Cuál es el incremento que ha sufrido en los tres meses dicho artículo?

A) 12/7 B) 24/7 C) 17/7
D) 19/7 E) 11/7

17. La colilla de un cigarro es 1/4 del cigarro. Un fumador consume los 7/8 de la parte fumable y en cada pitada consume 1/64 de la parte fumable. ¿Cuántas pitadas da el fumador?

A) 64 B) 56 C) 32 D) 72 E) 48

18. Una persona ha avanzado los 3/19 de su recorrido. ¿Qué fracción de lo que le falta debe recorrer para que le falte 9/16 de lo que le faltaba?

A) 3/7 B) 3/9 C) 7/16 D) 7/9 E) 7/3

19. Silvia llega tarde al cine cuando había pasado 1/8 de la película, 6 minutos después llega Roxana y solo ve los 4/5. Si la película empezó a las 16:00 h ¿a qué hora termina?

A) 17:20 h B) 17:25 h C) 17:30 h
D) 17:35 h E) 17:40 h

20. Una señorita tiene el hábito de lavarse la cabeza diariamente, utilizando la misma cantidad de champú. Después de 20 días observa que ha consumido la cuarta parte del frasco, 25 días más tarde verifica que aún le quedan 105 cm^3. ¿Qué cantidad de champú consume diariamente en cada lavado de cabeza?

A) 1,5 cm^3 B) 2 cm^3 C) 2,5 cm^3
D) 3 cm^3 E) 3,5 cm^3

21. Un granjero ha llevado a la ciudad cierta cantidad de gallinas, vende primero 5 gallinas, al segundo cliente la mitad de las que le quedaban, al tercer cliente le vende los 3/4 de las gallinas que restaban y al último cliente 1/3 de las que aún habían. ¿Cuántas gallinas llevó a la ciudad si le quedó 12 gallinas?

A) 139 B) 161 C) 273
D) 199 E) 149

22. Si perdiera los 3/7 de mi dinero más S/.300, luego ganara 4/5 de lo que tengo más S/.100 y finalmente perdiera 1/2 del resto, entonces me quedaría con S/.2300. ¿Cuánto tengo?

A) S/.2600 B) S/.3700 C) S/.4200
D) S/.4900 E) S/.5000

23. Un alumno entra a 2 librerías en forma sucesiva con una cierta cantidad de dinero. En la primera gasta 1/3 de lo que tenía más S/.10 y en la segunda gasta 1/10 de lo que tenía más S/.10. Si regresa a su casa con S/.53, ¿cuál es la cantidad que tenía al inicio?

A) S/.100 B) S/.120 C) S/.80
D) S/.70 E) S/.160

24. Una pelota pierde en cada rebote 1/3 de la altura de la cual cae. Si después del tercer rebote se eleva 16 cm, ¿de qué altura cayó inicialmente?

A) 27 cm B) 12 cm C) 54 cm
D) 108 cm E) 81 cm

25. Un comerciante compró 1500 kg de café. Antes de ser puesto a la venta hubo una merma por desecación de 1/150 de su peso, y al venderlo se desecharon 1/149 de lo que entonces pesaba por estar en malas condiciones; se vendieron a S/.90 el kg y se obtuvo una ganancia de 1/5 del costo. ¿Cuánto pagó el comerciante por el café?

A) S/. 40 000 B) S/.111 000 C) S/.90 000
D) S/.120 000 E) N. A.

26. Un tanque de agua puede llenarse mediante 2 grifos en 4 h y 3 h, respectivamente, puede desaguarse totalmente mediante una cañería en 5 horas. Estando el tanque vacío se abre el primer grifo con el desagüe abierto; a las 4 horas se cierra el primer grifo y se abre el segundo grifo. ¿Qué tiempo deberá funcionar este último hasta llenar el tanque?

A) 6 h B) 8 h C) 9 h
D) 7,5 h E) N. A.

27. Tres brigadas de obreros pueden hacer una zanja; la primera en 9 días, la segunda en 10 días y la tercera en 12 días. Se emplea a la vez 1/4 de la primera brigada, 1/3 de la segunda y 3/5 de la tercera. ¿En cuánto tiempo se hará toda la zanja?

A) 7 días B) 8 días C) 9 días
D) 5 días E) 6 días

28. Un vaso A contiene 8 litros de vino puro y 4 litros de agua. Un segundo vaso contiene 9 litros de vino puro y 6 litros de agua. Se sacan 3 litros de las mezclas de cada vaso y se hace el intercambio respectivo. ¿Cuánto más de vino hay en uno que en el otro vaso?

A) 2,4 L B) 1,8 L C) 1,4 L
D) Igual E) N. A.

29. Se debe hacer una obra en 8 días, si A lo hace solo en 12 días y B trabajando solo lo hace en 15 días, ¿en cuántos días antes de lo establecido lo terminarán trabajando juntos?

A) 13/9 B) 24/9 C) 12/7
D) 12/9 E) 11/9

30. Dos caños llenan un tanque en 10 horas, ¿cuánto tiempo empleará uno de ellos solo, si el otro puede llenarlo en 18 horas?

A) 8 h B) 13 h C) 18 h 30'
D) 22 h 30' E) 28 h

31. Si A y B pueden hacer una obra en 3 días, B y C en cuatro días y, A y C en cinco días, ¿en cuántos días puede hacerlo A trabajando solo?

A) 10 días B) $7\frac{1}{17}$ C) 7
D) $9\frac{1}{9}$ E) 15

32. Se tiene un tonel lleno de 324 L de vino puro. Se vacía 1/3 del contenido y se completa con agua. ¿Cuántas veces más se debe repetir la misma operación para que al final quede 260 L de agua?

A) 2 B) 3 C) 1 D) 4 E) 5

33. Un caño A llena un tanque en 18 horas, otro B en 9 horas y un tercero C en 6 horas. Si los tres trabajan durante 2 horas, ¿en cuántos minutos lo vaciaría el desagüe D que tardaría 4,5 horas si estuviera lleno?

A) 180 B) 270 C) 60 D) 45 E) 75

34. Un grifo llena un estanque en 20 horas, otro en 8 horas y un desagüe puede vaciarlo en 10 horas. Si a las 8 a. m. se abren los dos grifos y recién a las 10 a. m. se abre el desagüe, ¿a qué hora se llenará el estanque?

A) 2: 30 p. m. B) 2: 40 p. m. C) 4: 40 p. m.
D) 6: 40 p. m. E) N. A.

35. A puede realizar una tarea en 8 días, B puede hacerlo en 6 días y C puede ejecutarlo en 3/4 del tiempo requerido por ambos. A y B trabajan juntos por 2 días, entonces C completa la tarea. ¿Cuántos días trabajó C?

A) $\frac{12}{7}$ B) $\frac{15}{14}$ C) $\frac{11}{5}$
D) $\frac{16}{15}$ E) N. A.

36. Si: $\frac{a}{37}+\frac{b}{25}=0,899\widehat{45}$, hallar a+b.

A) 28 B) 25 C) 23 D) 15 E) 18

37. ¿Cuál es la última cifra del período de:

$$F=\frac{13^{470}}{74797^{477283}}?$$

A) 3 B) 7 C) 9 D) 1 E) 5

38. Hallar la suma de:

$$S=\frac{1}{3\times7}+\frac{1}{7\times11}+\frac{1}{11\times15}+\frac{1}{15\times19}+...+\frac{1}{199\times203}$$

A) $\frac{50}{203}$ B) $\frac{50}{609}$ C) $\frac{1}{203}$
D) $\frac{1}{199}$ E) N. A.

39. La fracción $\frac{1}{4649}$ es la generatriz de una decimal periódica pura con siete cifras en el período. Indicar qué otras fracciones, cuyo denominador sea un número primo y cuyo numerador sea la unidad dan lugar a una fracción periódica pura con siete cifras de período.

A) Solo una fracción más
B) 2 fracciones más
C) 4 fracciones más
D) 6 fracciones más
E) Ninguna fracción más

40. La fracción 1/17 genera un número decimal periódico puro con 16 cifras en el período. Hallar las cifras de lugar 6.°; 7.° y 8.°. Dar como respuesta la suma de ellas.

A) 9 B) 11 C) 7 D) 8 E) 10

41. ¿Qué tipo de fracción decimal (sin parte entera) nos da: $\overline{ab}$ / $\overline{ba}$, si el MCM($\overline{ab}$; $\overline{ba}$) = 252. Además $\overline{ab}$ y $\overline{ba}$ tiene 3 divisores comunes?

A) Periódica pura, de 4 cifras en el período
B) Exacta de 2 cifras
C) Mixta de 1 y 3 cifras respectivamente
D) Periódica pura de 6 cifras
E) N. A.

42. Hallar una fracción propia e irreductible que origine un número decimal periódico mixto con una cifra en la parte no periódica y 6 cifras en el período. Además se sabe que la suma de sus dos términos es 25. Dar como respuesta el numerador.

A) 7 B) 11 C) 13 D) 14 E) 9

43. Determinar la suma de las cifras de "n", si:

$$\frac{n}{275}=0,ab\widehat{ca};\ a=b+c$$

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

44. ¿En qué sistema de numeración el decimal periódico $0,\widehat{15}$ del sistema de base 7, se escribe como 0,282828...?

A) 11 B) 13 C) 9 D) 10 E) 6

45. Hallar el valor de la siguiente suma:

$$N=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+...\ (20\ \text{términos})$$

A) 1 B) 24/25 C) 7/8
D) 15/16 E) 20/21

46. Hallar "C", si: $C=\dfrac{0,\hat{1}+0,\hat{2}+0,\hat{3}+...+0,\hat{9}}{0,0\hat{1}+0,0\hat{2}+0,0\hat{3}+...+0,0\hat{9}}$

A) 10 B) 0,10 C) 1,1
D) 100 E) 0,001

47. Una fracción cuyos términos son primos absolutos genera el decimal $0,\widehat{abc}$. Calcular (a + b + c) sabiendo que los términos de la fracción se diferencian en 35.

A) 7 B) 9 C) 11 D) 17 E) 19

48. Hallar la suma de los términos de una fracción irreductible cuyo denominador sea 37, tal que al con-

vertirlo a decimal se obtengan cifras en progresión aritmética de razón dos.

A) 35 B) 32 C) 37
D) 42 E) 47

49. Si la fracción irreductible: $\overline{c(a-7)a} / \overline{ca(a-2)}$ origina un decimal de la forma: $0,ab\widehat{ca}$, hallar: $a+b+c$.

A) 10 B) 12 C) 14
D) 16 E) 15

50. Si: $\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+...}_{\text{n fracciones}} = 0,\widehat{96}$, hallar "n".

A) 27 B) 30 C) 31
D) 32 E) 35

51. Efectuar: $M=\frac{1}{7}+\frac{2}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\frac{2}{7^4}+\frac{1}{7^5}+\frac{2}{7^6}+...$

A) 5/16 B) 7/16 C) 4/21
D) 3/16 E) 9/16

52. ¿Cuánto le falta a los 2/3 de los 9/10 de los 5/6 de 0,04545... para ser igual a la mitad de los 5/8 de los 10/11 de 0,21333...?

A) 1/22 B) 1/33 C) 1/132
D) 7/132 E) 5/132

53. Hallar el cuadrado de la raíz cúbica de $0,\widehat{296}$.

A) 1/3 B) 7/5 C) 3/2
D) 2/3 E) 4/9

54. ¿Qué parte de 3(1/3) es lo que falta a 1/9 para ser igual a los 2/3 de 3/5?

A) 11/45 B) 9/150 C) 13/150
D) 2/5 E) 41/50

55. Hallar el valor de "a", si: $\frac{\overline{2a}}{55}=0,\overline{a3636...}$

A) 2 B) 4 C) 5 D) 8 E) 3

56. En el desarrollo infinito de: $\frac{5}{37}=0,\widehat{abc}$, hallar la cifra que ocupa el vigésimo tercer lugar en la parte decimal.

A) 1 B) 3 C) 5
D) 4 E) N. A.

57. Simplificar:

$$E=\frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)...\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)...\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$

A) n(n +1) B) $\frac{n+1}{2}$ C) n/2
D) 1/n E) $\frac{n(n+1)}{2}$

58. Para cuántos valores de N menores que 200 se hace reducible la fracción:

$$F=\frac{N^2+126N}{N+1}$$

A) 39 B) 40 C) 41
D) 42 E) N. A.

59. Hallar una fracción propia e irreductible que origina un número decimal periódico mixto con una cifra en la parte no periódica y 3 cifras en el periodo. Además se sabe que la suma de sus términos es 99. Dar como respuesta la suma de cifras del numerador.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) N. A.

60. Si: a/b origina un número decimal mixto con una cifra en la parte periódica y 2 cifras en la parte no periódica. Hallar a + b, sabiendo que: b − a = 5 (b < 23).

A) 17 B) 19 C) 23
D) 25 E) 39

61. La fracción $\frac{17}{37}$ está comprendida entre 2 fracciones homogéneas cuyo denominador es 23 y los numeradores son dos números enteros consecutivos. Hallar el mayor de los numeradores.

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

62. ¿Cuántas fracciones propias e irreductibles de denominador 1996 existen?

A) 1996 B) 498 C) 996
D) 1000 E) 500

63. Hallar una fracción irreductible que al aumentarle 5 a cada uno de sus términos, aumenta en sus 5/24. Dar el numerador.

A) 12 B) 29 C) 2
D) 6 E) N. A.

64. Tres cajeras A, B y C de un supermercado deben atender 12 000 clientes. Se sabe que A puede atender a todos los clientes en 12 horas y B en 16 horas. Hoy, después de una hora A cedió su puesto a B, que trabajó 4 horas, para dejar después la atención a cargo de C que terminó en 6 horas. ¿Cuánto tiempo hubiera demorado C si hubiera trabajado sola?

A) 9 h B) 8 h C) 10 h
D) 12 h E) 6 h

65. Halla el numerador de la fracción propia e irreductible de denominador 396, sabiendo que da origen a un decimal periódico mixto de la forma $a,ab\widehat{cd}$ donde se cumple que: $\overline{cd}=2(\overline{ab})$

A) 83 B) 97 C) 103
D) 91 E) 101

66. Mamá canguro trata de alcanzar a uno de sus canguritos antes que ingrese a la zona de caza, distante 180 de sus saltos. El cangurito que le lleva 15 saltos de ventaja a su madre, da 5 saltos mientras que ella da 4; además 7 saltos de ésta equivalen a 5 de los suyos. Si la madre alcanza al cangurito faltando "n" saltos para llegar a la zona de caza. ¿Cuánto vale "n"?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

67. Si un decimal periódico de 2 cifras se multiplica por 0,2 se obtiene el que resulta de invertir el orden de sus cifras. ¿Cuál es la diferencia de sus cifras?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 4 E) 5

68. Tres reglas de 300 mm de longitud cada una, están uniformemente graduadas, la primera cada mm, la segunda cada 25/36 mm y la tercera cada 40/57 mm. Si se les hace coincidir en toda su extensión, ¿a qué distancia del origen coincidirán tres trazos de las reglas?

A) 180 mm B) 150 mm C) 200 mm
D) 160 mm E) 120 mm

69. César, Martín y Jean pueden hacer una obra en un número de días, pero si cada uno hiciera la tercera parte de la obra, César trabajaría 1 día menos, Martín y Jean 2 días más cada uno. ¿En cuántos días hacen la obra Martín y Jean juntos?

A) 6 B) 4 C) 5 D) 8 E) 9

70. Se deja caer una pelota de ping-pong desde una altura de 27 cm sobre el primer escalón superior de una escalera y cada vez que rebota sobre cada escalón se eleva en 1/3 de la altura de donde cae. ¿Cuántos escalones ha rebotado cuando en uno de los rebotes alcanza una altura de $13\frac{4}{9}$ cm? Cada escalón tiene 27 cm de altura.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

71. La diferencia entre los tiempos empleados por 2 obreros para hacer una misma obra es $3,53\widehat{571428}$ días, siendo las fracciones de obra que hace cada uno por día $0,\widehat{xy}$ y $0,\widehat{yx}$. ¿Qué tiempo emplearán los dos trabajando juntos si "x" e "y" son 2 cifras consecutivas?

A) $5,\widehat{42}$ B) $7,\widehat{63}$ C) $8,\widehat{32}$
D) $5,\widehat{45}$ E) N. A.

72. Un obrero de categoría B puede hacer una obra en 36 días. Se forma un equipo de 2 obreros de categoría B y 2 obreros de categoría A que son 20% más eficientes que los primeros. Trabajan juntos cinco días, luego se retira uno de la categoría A; tres días más tarde se retira uno de categoría B. ¿Cuántos días más necesitarán los trabajadores que quedan para terminar la obra?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

73. Un estudiante convierte dos fracciones generatrices en números decimales y observa que una resulta decimal exacta con 2 cifras decimales y la otra inexacta periódica pura con las mismas dos cifras. Halla la diferencia de los numeradores, si las fracciones se diferencian en 2/825.

A) 3 B) 4 C) 2 D) 5 E) 6

74. De un recipiente lleno de vino se extrae la cuarta parte reemplazándole con agua. Luego de vaciar los 3/4 de la mezcla vuelve a llenar con agua pero solo hasta los 2/3 de su capacidad. Por último se vacía cierta fracción y se vuelve a llenar con agua pero solo hasta la mitad, quedando el vino y el agua en la relación de 3/13. ¿Qué fracción de vino quedó finalmente?

A) 1/16 B) 7/8 C) 3/32
D) 5/64 E) 3/4

75. De un depósito lleno de alcohol se retira un séptimo de su contenido y se le reemplaza por agua; luego se vuelve a retirar un séptimo de esta mezcla y se le reemplaza por agua. la cantidad de alcohol puro que aún queda excede en 20 L a los dos tercios de la capacidad del depósito. Calcular esta capacidad.

A) 252 B) 266 C) 280
D) 294 E) 308

76. En un puesto de frutas había cierto número de naranjas. Un cliente compró los 3/5 de las naranjas que había más 4 naranjas; otro cliente compró los 4/9 de las que quedaban y 2 más; un tercer cliente compró la mitad de las que quedaban y 7 más, quedando finalmente 2 naranjas. ¿Cuántas naranjas había en el puesto inicialmente?

A) 320 B) 250 C) 160
D) 100 E) 120

77. Al dividir un terreno en dos partes, resulta que los 2/5 de la primera parte miden lo mismo que los 3/7 de la segunda. Si el terreno mide 17 400 m^2, ¿Cuánto mide la parte menor?

A) 9000 m^2 B) 8400 m^2 C) 7800 m^2
D) 9600 m^2 E) N. A.

78. Una bomba demora 10 horas 25 minutos para llenar un reservorio. Cuando el tanque está lleno hasta 1/5 se malogra y su rendimiento disminuye en 1/3. ¿Cuánto tiempo tardará la bomba para llenar el reservorio?

A) 13 h 25 min B) 14 h 35 min
C) 11 h 20 min D) 12 h 35 min
E) 14 h 25 min

79. Un comerciante ahorró $54 000 durante 5 años. El segundo año ahorró 2/9 más sobre lo que había ahorrado el primer año; el tercer año ahorró $12 885; el cuarto año ahorró 1/11 menos de lo que ahorró el segundo año y el quinto año ahorró tanto como el segundo más $115. ¿Cuánto ahorró el cuarto año?

A) $9000 B) $1100 C) $1215
D) $1200 E) $1000

80. En un recipiente hay una mezcla de 24 litros de agua con 48 litros de vino. Se extrae 1/3 de la mezcla y se reemplaza con 20 litros de agua, luego se extrae 1/4 de la mezcla y se reemplaza con 5 litros de agua, finalmente se extrae 1/8 de la mezcla. Calcular la diferencia entre los volúmenes de agua y vino en la mezcla final.

A) 7 L B) 8 L C) 9 L
D) 10 L E) 11 L

81. Una persona gana en 3 juegos consecutivos 1/3 de lo que tiene antes de cada juego y en el cuarto pierde los 2/3 de lo que tenía antes del tercer juego, resultando con $416. ¿Con cuánto comenzó a jugar?

A) $315 B) $415 C) $351
D) $372 E) N. A.

82. ¿Cuántas fracciones equivalentes a 270/666 tienen como suma de sus términos un cuadrado perfecto de 5 cifras?

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) Menos de 8

83. ¿En qué sistema de numeración, el decimal periódico $0,\widehat{15}$ del sistema de base 7, se escribe 0,2828... ?

A) Once B) Nueve C) Trece
D) Ocho E) Doce

84. Hallar el valor de "a + b", si:

$$\frac{a^2+b^2}{99} = 0,\widehat{(a-2)(b+2)}$$

A) 9 B) 8 C) 7
D) 10 E) 11

85. Hallar la suma de los valores enteros positivos de "a + 2", para que: $A = \dfrac{a^2+107a}{a+2}$ también sea entero; si: $a = \overset{\circ}{2} + 1$

A) 192 B) 198 C) 195
D) 193 E) 191

86. Sabiendo que al dividir "N" por 8!, se obtiene un decimal de 5 cifras no periódicas y una periódica. ¿Cuál es el menor valor de N?

A) 56 B) 42 C) 21
D) 28 E) 35

87. Efectuar: $N = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{48} + \frac{1}{192} + ...$

Calcular el valor de: $A = \sqrt{N} + \frac{1}{3}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

88. Al efectuar: $H = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + ...$

A) 1/2 B) 3/4 C) 3
D) 2 E) 1/6

89. Halla el mayor numerador de la fracción equivalente a f, de modo que la suma de sus términos esté comprendida entre 120 y 341, siendo:

$f = 0,\widehat{ab}_5 = 0,\widehat{(2a)b}_7$

A) 48 B) 33 C) 30
D) 90 E) 75

90. Halla la cantidad que se le debe agregar o quitar a los dos términos de una fracción ordinaria irreductible equivalente a $0,52\widehat{27}$, para que sea equivalente a $0,36\widehat{36}$.

A) Agregar 11 B) Quitar 11 C) Agregar 13
D) Quitar 13 E) Quitar 17

91. A un alambre de 46,86 m de longitud se le hizo 4 cortes, de manera que la longitud de cada trozo es igual a la del inmediato anterior, más 1/3 de dicha longitud. Halla la longitud del trozo más grande.

A) 15,36 m B) 11,52 m C) 8,64 m
D) 20,48 m E) N. A.

92. Un recipiente contiene 54 litros de agua, se le quita 9 litros de la mezcla y se reemplazan con lejía, esta operación se repite una tercera, cuarta, enésima vez, observándose que la parte fraccionaria de agua en la mezcla es 78 125 / 279 936. Hallar "n".

A) 9 B) 8 C) 7
D) 6 E) 5

93. Hallar: a + b + c + d, si: $\frac{a}{6} + \frac{b}{6^2} + \frac{c}{6^3} + \frac{d}{6^4} = \frac{153}{432}$

A) 7 B) 9 C) 8
D) 10 E) 11

94. Hallar la suma de dos números mayores que la unidad, tales que el cubo de la fracción propia que forman genera un decimal periódico puro de 3 cifras.

A) 5 B) 9 C) 7
D) 8 E) 12

95. Sabiendo que: $\dfrac{0,\widehat{ac}+0,\widehat{ca}}{0,\widehat{ac}} = 2,\widehat{fgh} \wedge a + c = 10$

hallar el valor de: $f + g + h$.

A) 13 B) 14 C) 15 D) 17 E) 18

96. En un colegio mixto de 3000 alumnos se hizo una encuesta, y el $19,\widehat{819}\%$ de las mujeres dijo que viajaría al extranjero y el $51,\widehat{51}\%$ pensaban seguir estudios superiores. Si el número de mujeres es impar, hallar el número de hombres.

A) 1641 B) 1821 C) 1779
D) 1529 E) N. A.

97. ¿Cuántas fracciones propias e irreductibles, originan una fracción decimal exacta con 2 cifras decimales?

A) 72 B) 90 C) 96 D) 45 E) 36

98. ¿Cuántas fracciones propias e irreductibles existen que al dividirlas por su inversa originan un decimal exacto con 2 cifras decimales?

A) 13 B) 12 C) 11 D) 10 E) 9

99. ¿Cuál es el menor numerador de la fracción propia e irreductible de denominador 375, tal que al dividir la parte no periódica por 72 y 27 deja en los dos casos 13 de residuo?

A) 86 B) 87 C) 88 D) 89 E) 90

100. Calcula la suma de las cifras del período que origina la fracción:

$$\frac{\overbrace{101000\ldots}^{55\text{ cifras}}}{\underbrace{24390243902\ldots}_{99\text{ cifras}}}$$

A) 100 B) 12 C) 10 D) 40 E) 18

101. Si la suma de las fracciones $\frac{a}{12}$ y $\frac{b}{37}$ es $0,63\widehat{288}$, hallar el valor de: $a^2 - b$.

A) 13 B) 14 C) 15 D) 17 E) 19

102. Determine la base del sistema de numeración en la que la fracción decimal $0,\widehat{714285}$ se representa como $0,\widehat{41}$.

A) 7 B) 5 C) 6 D) 9 E) 8

103. ¿En qué cifra termina el período de la fracción $\frac{37}{33^{43}}$?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

104. Con dos números primos se forma una fracción que sumada con su inversa da 218/91. La suma de los números primos es:

A) 20 B) 18 C) 36 D) 26 E) 24

105. Halla la fracción equivalente a 377/493, tal que la suma de sus términos es múltiplo de 42 y la diferencia de dichos términos está comprendido entre 30 y 80. ¿Cuál es la suma de las cifras del numerador?

A) 15 B) 14 C) 13 D) 12 E) 11

106. El producto del numerador por el denominador de una fracción de la forma $\dfrac{\overline{abc}}{\overline{cba}}$ es 69 454. Determinar dicha fracción, sabiendo que al ser reducida se obtiene $\dfrac{\overline{ac}}{\overline{ca}}$. Dar como respuesta la suma de las cifras del denominador.

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

CLAVES

1. E	15. A	29. D	43. C	57. E	71. B	85. B	99. A
2. D	16. C	30. D	44. A	58. B	72. D	86. D	100. C
3. B	17. B	31. B	45. E	59. C	73. C	87. A	101. D
4. B	18. C	32. B	46. A	60. B	74. C	88. B	102. C
5. E	19. A	33. A	47. E	61. D	75. D	89. D	103. E
6. C	20. D	34. D	48. D	62. C	76. D	90. B	104. A
7. A	21. B	35. B	49. C	63. A	77. B	91. A	105. E
8. A	22. D	36. A	50. A	64. A	78. B	92. D	106. B
9. E	23. B	37. B	51. D	65. E	79. E	93. B	
10. D	24. C	38. B	52. E	66. B	80. A	94. A	
11. B	25. B	39. A	53. E	67. B	81. C	95. E	
12. A	26. A	40. E	54. C	68. C	82. B	96. C	
13. A	27. C	41. D	55. B	69. A	83. A	97. B	
14. C	28. C	42. B	56. B	70. B	84. C	98. E	

Razones y proporciones

capítulo 10

Eudoxo nació en Cnido, quizás en el año 408 a. C., aunque otros autores lo trasladan 8 años hasta 400 a. C. o 18 hasta 390 a. C. y murió en el año 337 a. C. Fue un filósofo, astrónomo, matemático y médico griego, pupilo de Platón. Nada de su obra ha llegado a nuestros días; todas las referencias con las que contamos provienen de fuentes secundarias, como el poema de Arato sobre astronomía.

Probablemente nació en una familia relacionada con la medicina, ya que esos fueron sus primeros estudios, bajo la tutela de Filisto, y ejerció la profesión durante algunos años. Aprendió también matemáticas de Arquitas. En Atenas acudió a la Academia de Platón y, posteriormente, recomendado por el rey Agesilao II al faraón Nectanebo I estudió astronomía en Heliópolis durante más de un año.

Fue discípulo de Arquitas de Tarento. Su trabajo sobre la teoría de la proporcionalidad denota una amplia comprensión de los números y permite el tratamiento de las cantidades continuas, no únicamente de los números enteros o números racionales. Cuando esta teoría fue resucitada por Tartaglia y otros estudiosos en el siglo XVI, se convirtió en la base de cuantitativas obras de ciencias durante un siglo, hasta que fue sustituida por los métodos algebraicos de Descartes.

Fuente: Wikipedia

RAZÓN

Una razón, es el resultado de comparar dos cantidades homogéneas; esta comparación puede realizarse mediante las operaciones de sustracción o división.

Ejemplo:

Sean las edades de 2 personas: 10 y 20 años. Al comparar las edades tenemos:

- Una de ellas, es mayor que la otra por 10 años.
  20 – 10 = 10 años
- Una de ellas, tiene el doble de la edad que la otra.
  $\frac{20}{10} = 2$ veces

Razón aritmética (R.A.)

Es el resultado de comparar dos cantidades homogéneas mediante la operación de sustracción.

Sean los números a y b, su razón aritmética será:

$$\boxed{a - b = k}$$

Donde: a: antecedente; b: consecuente
k: valor de la R.A.

El valor de la razón aritmética, puede ser mayor, menor o igual que cero.

Ejemplos:

R.A. (12; 8) = 12 – 8 = 4 $(k > 0)$
R.A. (7; 10) = 7 – 10 = –3 $(k < 0)$
R.A. (15; 15) = 15 – 15 = 0 $(k = 0)$

Razón geométrica (R.G.)

Es el resultado de comparar dos cantidades homogéneas, mediante la operación de división.

Sean los números a y b, su razón geométrica es:

$$\boxed{\frac{a}{b} = k}$$

Donde: a: antecedente; b: consecuente
k: valor de la R.G.

El valor de la razón geométrica, puede ser: mayor, menor o igual a la unidad.

Ejemplos:

R.G. (9; 5) = $\frac{9}{5} = 1{,}8$ $(k > 1)$

R.G. (3; 4) = $\frac{3}{4} = 0{,}75$ $(k < 1)$

R.G. (8; 8) = $\frac{8}{8} = 1$ $(k = 1)$

Propiedad fundamental de la razón geométrica

Si a los dos términos de una razón geométrica se les multiplica o divide por una misma cantidad, el valor de la razón no cambia, pero la suma o diferencia de sus términos quedará multiplicada o dividida respectivamente por dicha cantidad.

Ejemplo:

Sea la razón geométrica: $\frac{3}{4}$ cuyo valor es 0,75.

Se cumple:

Razón	Suma	Diferencia
$\frac{3}{4} = 0{,}75$	$3 + 4 = 7$	$4 - 3 = 1$

Multiplicando ambos términos por "n":

$\frac{3n}{4n} = 0{,}75$ $\quad 3n + 4n = 7n \quad 4n - 3n = n$

Dividiendo ambos términos por "n":

$\frac{3/n}{4/n} = 0{,}75 \quad \frac{3}{n} + \frac{4}{n} = \frac{7}{n} \quad \frac{4}{n} - \frac{3}{n} = \frac{1}{n}$

Ejemplos:

A continuación veremos la interpretación matemática de los enunciados que suelen presentarse en los problemas:

- El puntaje de Pedro excede al de Enrique en 48 puntos.

  Planteamiento:

  Puntaje Pedro – Puntaje Enrique = 48
- Cuando Nathaly nació, César tenía 4 años.
  Planteamiento:

  Edad César – Edad Nathaly = 4
- La cantidad de dinero que tiene Lourdes es a lo que tiene Magaly, como 5 es a 8.

  Planteamiento: $\frac{\text{Dinero de Louredes}}{\text{Dinero de Magaly}} = \frac{5}{8}$
- Las edades de Magda y Nathaly están en la relación de 12 a 5.

  Planteamiento: $\frac{\text{Edad de Magda}}{\text{Edad de Nathaly}} = \frac{12}{5}$
- En un aula de clases, por cada 5 hombres hay 8 mujeres.

  Planteamiento: $\frac{\text{n.° hombres}}{\text{n.° mujeres}} = \frac{5}{8}$
- Dos números son proporcionales (o son entre sí) como 9 y 14.

  Planteamiento:

  sean los números a y b: $\frac{a}{9} = \frac{b}{14}$ o $\frac{a}{b} = \frac{9}{14}$

PROPORCIÓN

Una proporción es el resultado de igualar dos razones y éstas pueden ser: proporción aritmética y proporción geométrica.

Proporción aritmética

Es el resultado de igualar a dos razones aritméticas.

Sean los números a; b; c y d, la proporción aritmética correspondiente es:

$$\boxed{a - b = c - d}$$

Notación: $a \times b :: c \times d$
Se lee: "a" es a "b", como "c" es a "d".

Proporción geométrica

Es el resultado de igualar a dos razones geométricas.
Sean los números a; b; c y d; la proporción geométrica correspondiente es:

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}}$$

Notación: a : b :: c : d

Se lee: "a" es a "b", como "c" es a "d".

Para ambas proporciones, se cumple:

- Términos de la primera razón: a y b
- Términos de la segunda razón: c y d
- Antecedentes: a y c
- Consecuentes: b y d
- Extremos: a y d
- Medios: b y c

Proporción armónica

Las cantidades a; b; c y d (distintas de cero) forman una proporción armónica, cuando sus respectivas inversas: 1/a; 1/b; 1/c y 1/d forman una proporción aritmética. Luego, la proporción armónica es:

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{c}-\frac{1}{d}$$

Ejemplo:

Los números: 4; 6; 8 y 24 forman la siguiente proporción armónica:

$$\underbrace{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}}_{\frac{1}{12}}=\underbrace{\frac{1}{8}-\frac{1}{24}}_{\frac{1}{12}}$$

CLASES DE PROPORCIÓN ARITMÉTICA

Discreta

La proporción aritmética es discreta, si sus términos medios son distintos.

$$\boxed{a-b=c-d}$$

Al término "d" se le conoce como cuarta diferencial.

Ejemplo:

La proporción aritmética discreta que se puede formar con los términos: 24; 18; 50 y 44 es:

$$\underbrace{24-18}_{\text{R.A.}=6}=\underbrace{50-44}_{\text{R.A.}=6}$$

Continua

La proporción aritmética es continua si sus términos medios son iguales.

$$\boxed{a-b=b-c}$$

Tenemos:

"b" es la media diferencial o media aritmética de "a" y "c".

Su valor es: $b=\frac{a+c}{2}$

"c" es la tercera diferencial de "a" y "b".

Ejemplo:

La proporción aritmética continua que se puede formar con los términos: 36; 28 y 20 es:

$$\underbrace{36-28}_{\text{R.A.}=8}=\underbrace{28-20}_{\text{R.A.}=8}$$

CLASES DE PROPORCIÓN GEOMÉTRICA

Discreta

Una proporción geométrica es discreta, si sus términos medios son diferentes.

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}}$$

Al término "d" se le conoce como cuarta proporcional.

El producto de los extremos es igual al producto de los términos medios.

Ejemplo:

La proporción geométrica discreta que se puede formar con los números 15; 20; 24 y 32, es:

$$\text{R.G.}=\underbrace{\frac{15}{20}}_{\text{R.G.}=\frac{3}{4}}=\underbrace{\frac{24}{32}}_{\text{R.G.}=\frac{3}{4}}$$

Continua

Una proporción geométrica es continua, si sus términos medios son iguales.

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{b}{c}}$$

Tenemos:

"b" es la media proporcional o media geométrica de "a" y "c".

Su valor es: $b^2=ac$ o $b=\sqrt{ac}$

"c" es la tercera proporcional de "a" y "b".

Ejemplo:

La proporción geométrica continua que se puede formar con los números 10; 30 y 90 es:

$$\underbrace{\frac{10}{30}}_{\text{R.G.}=\frac{1}{3}}=\underbrace{\frac{30}{90}}_{\text{R.G.}=\frac{1}{3}}$$

Ejercicios:

1. Encontrar la cuarta diferencial de los números: 54; 45 y 32.

   Resolución:

   Se trata de una proporción aritmética discreta:

   $$\underbrace{54-45}_{9}=\underbrace{32-x}_{9} \Rightarrow x=23$$

2. Encontrar la media diferencial o media aritmética de 17 y 31.

Resolución:

Se trata de una proporción aritmética continua.

$17 - x = x - 31 \Rightarrow x = 24$

Otra forma: $\frac{17+31}{2} = 24$

3. Encontrar la tercera diferencial de 64 y 50.

Resolución:

Se trata de una proporción aritmética continua:

$$\underbrace{64-50}_{14} = \underbrace{50-x}_{14} \Rightarrow x = 36$$

4. Calcular la cuarta proporcional de los números 36; 48 y 45.

Resolución:

Se trata de una proporción geométrica discreta:

$$\frac{36}{48} = \frac{45}{x} \Rightarrow \frac{48\times45}{36} = 60$$

5. Calcular la media proporción o media geométrica de 24 y 54.

Resolución:

Se trata de una proporción geométrica continua.

$$\frac{24}{x} = \frac{x}{54} \Rightarrow x^2 = 24\times54 = 1296 \Rightarrow x = 36$$

6. Calcular la tercera proporcional de 48 y 60.

Resolución:

Se trata de una proporción geométrica continua.

$$\frac{48}{60} = \frac{60}{x} \Rightarrow \frac{60\times60}{48} = 75$$

PROPIEDADES DE UNA PROPORCIÓN GEOMÉTRICA

I. La suma o diferencia de los antecedentes es a la suma o diferencia de los consecuentes, como cada antecedente es a su respectivo consecuente.

Sea: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$, se cumple: $\boxed{\frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} = k}$

II. A partir de una proporción geométrica, podemos escribir otras 8 proporciones geométricas.

Sea la proporción original: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Se pueden conseguir las siguientes proporciones:

$\boxed{\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}}$ $\boxed{\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}}$

$\boxed{\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}}$ $\boxed{\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}}$

$\boxed{\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}}$ $\boxed{\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}}$

$\boxed{\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}}$ $\boxed{\frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}}$

SERIE DE RAZONES GEOMÉTRICAS IGUALES

Es el resultado de igualar a más de dos razones geométricas, todas de igual valor.

Forma discreta: $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \ldots = \frac{g}{h} = k}$

Forma continua: $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \ldots = k}$

Propiedades

Sea la serie: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$

1. La suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes, como cada antecedente es a su respectivo consecuente.

$$\boxed{\frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k}$$

2. El producto de los antecedentes es al producto de los consecuentes, como el valor de la razón elevado al número de razones consideradas.

$$\boxed{\frac{a\times c\times e}{b\times d\times f} = k^3}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. La razón geométrica, entre 2 números cuya suma es 35, se invierte si se añade 15 al menor y se quita 15 al mayor. Calcular el producto de los números.

Resolución:

Sean los números: x y (35 – x)

Razón inicial: $\frac{x}{35-x}$

Añadimos 15 al menor y le quitamos 15 al mayor, la razón se invierte:

$$\frac{x-15}{35-x+15} = \frac{35-x}{x} \Rightarrow \frac{x-15}{50-x} = \frac{35-x}{x}$$

Por propiedad:

$$\frac{x-15}{(x-15)+(50-x)} = \frac{35-x}{(35-x)+x}$$

$$\frac{x-15}{35} = \frac{35-x}{35}$$

$x - 15 = 35 - x \Rightarrow x = 25$

Los números son: 25 y 10

∴ El producto de los números es: 250.

2. Un club deportivo de 1800 socios participan en la aprobación o desaprobación de un evento. En una primera vuelta se desaprobó y en una segunda vuelta fue aprobado el evento. Si la primera mayoría y la segunda mayoría están en la relación de 6 a 5 y fueron 400 socios los que cambiaron de opinión en la segunda vuelta, ¿con cuántos votos se aprobó el evento?

Resolución:

Sean: A: aprueban el evento

D: desaprueban el evento

1.ª vuelta: (D > A)

Sea x el número de socios que aprobaron el evento.

$A = x \qquad D = 1800 - x$

2.ª vuelta: (A' > D')

Pero 400 socios cambiaron de opinión.

$A' = x + 400 \qquad D' = 1400 - x$

Por dato:

$$\frac{1.^{a}\text{ mayoria}}{2.^{a}\text{ mayoria}} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{1800 - x}{x + 400} = \frac{6}{5} \Rightarrow x = 600$$

∴ El evento se aprobó con: 600 + 400 = 1000 votos.

3. Para ingresar a cierta universidad, las posibilidades de ingresar son de 1 a 10. Si se aumenta en 20 el número de vacantes, las posibilidades de ingresar son de 2 a 19. ¿Cuáles serán las posibilidades de ingresar, si se inscribieron 1000 postulantes más?

Resolución:

Sean: V: número de vacantes

P: número de postulantes

De las posibilidades de ingresar:

$$\frac{V}{P} = \frac{n}{10n} \begin{cases} V = n \\ P = 10n \end{cases}$$

Se aumentan 20 vacantes:

$$\frac{V'}{P} = \frac{2}{19} \Rightarrow \frac{n + 20}{10n} = \frac{2}{19} \Rightarrow n = 380$$

Luego: V = 380; P = 3 800

Las nuevas posibilidades de ingresar al inscribirse 1000 postulantes más:

$$\frac{V'}{P'} = \frac{380 + 20}{3800 + 1000} = \frac{400}{4800} <> \frac{1}{12}$$

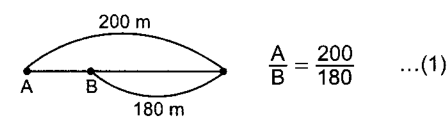
∴ Posibilidades: 1/12

4. "A" le da a "B" una ventaja de 20 m en una carrera de 200 m, "B" le da una ventaja de 40 m a "C" en una carrera de 360 m. ¿Cuántos metros de ventaja debe dar A a C en una carrera de 400 m?

Resolución:

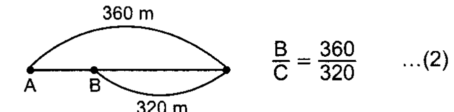
Consideramos lo que cada competidor recorre.

A y B (20 m de ventaja en 200 m)



$$\frac{A}{B} = \frac{200}{180} \qquad ...(1)$$

B y C (40 m de ventaja en 360 m)



$$\frac{B}{C} = \frac{360}{320} \qquad ...(2)$$

A y C: (400 m)

Multiplicando (1) y (2):

$$\frac{A}{B} \times \frac{B}{C} = \frac{200}{180} \times \frac{360}{320} \Rightarrow \frac{A}{C} = \frac{400}{320}$$

∴ "A" le da a "C": 400 − 320 = 80 m de ventaja.

5. Lo que cobra y gasta diariamente un individuo suman S/.900. Lo que gasta y lo que cobra están en la relación de 2 a 3. ¿En cuánto tiene que disminuir el gasto diario para que dicha relación sea de 3 a 5?

Resolución:

Sean: C: cobra; G: gasta

Por dato: $G + C = 900 \qquad ...(1)$

$\frac{G}{C} = \frac{2}{3} \qquad ...(2)$

De (2): $G = \frac{2}{3}C$

En (1): $\frac{2}{3}C + C = 900 \Rightarrow \frac{5}{3}C = 900 \Rightarrow C = S/.540$

$G = \frac{2}{3} \times 540 = S/.360$

Si el gasto diario disminuye en D:

$$\frac{360 - D}{540} = \frac{3}{5} \Rightarrow D = S/.36$$

∴ El gasto disminuye en S/.36.

6. Un club tiene 4290 socios activos. Tuvieron que decidir sobre cierta moción, estando en contra de ella una cantidad como 7, mientras que a favor como 4. Luego de la reconsideración fue aprobada con una relación de como 8 es a 5. No hubo abstenciones. ¿Cuántas personas cambiaron de opinión?

Resolución:

Sean: A: votos a favor; E: votos en contra

1.ª votación: $\frac{E}{A} = \frac{7}{4} \qquad ...(1)$

$E + A = 4290 \qquad ...(2)$

De (1) y (2): A = 1560; E = 2730

2.ª votación: $\frac{A'}{E'} = \frac{8}{5} \wedge A' + E' = 4290$

$\Rightarrow A' = 2640; E' = 1650$

Hallamos el número de socios que cambiaron de opinión: 2730 − 1650 = 1080

∴ Cambiaron de opinión: 1080 socios.

7. Para dibujar un terreno rectangular se empleó una escala de 7/600 (por cada 7 unidades en el dibujo, corresponden 600 unidades en el terreno). Si resulta un dibujo, cuyo perímetro es 294 cm, hallar el área del terreno, sabiendo que la razón de sus dimensiones es 4/17.

Resolución:

Escala: $\frac{\text{Dibujo}}{\text{Terreno}} = \frac{7}{600}$

Dibujo: rectángulo de lados 17n y 4n

largo: $17 \times 7 = 119$ cm
ancho: $4 \times 7 = 28$ cm

Terreno:

El largo: $\frac{119}{L_{Terre.}} = \frac{7}{600} \Rightarrow L_{Terr.} = 10\,200$ cm

$L_{Terr.} = 102$ m

El ancho: $\frac{28}{A_{Terre.}} = \frac{7}{600} \Rightarrow A_{Terr.} = 2400$ cm

$A_{Terr.} = 24$ m

$\therefore$ Área del terreno: $102 \times 24 = 2448$ m^2

8. En una fiesta concurren 400 personas entre hombres y mujeres, asistiendo 3 hombres por cada 2 mujeres. Luego de 2 horas, por cada 2 hombres hay una mujer. ¿Cuántas parejas se retiraron?

Resolución:

Sean:
H: número de hombres; M: número de mujeres

Por datos: $H + M = 400$ ...(1)

$\frac{H}{M} = \frac{3}{2}$ ...(2)

De (1) y (2): $H = 240$; $M = 160$

Se retiran "x" parejas:

$\frac{H'}{M'} = \frac{240 - x}{160 - x} = \frac{2}{1} \Rightarrow x = 80$

$\therefore$ Se retiraron 80 parejas.

9. En una carrera alrededor de un circuito circular, A ganó a B por 1/4 de vuelta; B ganó a C por 1/5 de vuelta. ¿Por qué fracción de vuelta le ganará A a C?

Resolución:

Considerando lo que cada competidor recorre:

A ganó a B por 1/4 vuelta. $\frac{A}{B} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}}$ ...(1)

B ganó a C por 1/5 vuelta: $\frac{B}{C} = \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{\frac{4}{5}}$ ...(2)

Hallamos la relación entre lo que recorre A y C:

(1) × (2): $\frac{A}{B} \times \frac{B}{C} = \frac{1}{\frac{3}{4}} \times \frac{1}{\frac{4}{5}} \Rightarrow \frac{A}{C} = \frac{1}{\frac{3}{5}}$

$\therefore$ A ganó a C por: $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ de vuelta.

10. En un circo se observó: por cada 5 hombres que ingresan, 3 lo hacen con un niño; y, de cada 7 mujeres, 4 lo hacen con un niño. Si ingresaron en total 678 niños y por cada 6 hombres hay 5 mujeres, ¿cuántos adultos ingresaron al circo?

Resolución:

Sean:
H: número de hombres; M: número de mujeres;
n: número de niños

Por datos:
Por cada 5 hombres, 3 lo hacen con un niño:

$\frac{H}{n} = \frac{5 \times a}{3 \times a} \begin{cases} H = 5a \\ n = 3a \end{cases}$

Por cada 7 mujeres, 4 lo hacen con un niño:

$\frac{M}{n} = \frac{7 \times b}{4 \times b} \begin{cases} M = 7b \\ n = 4b \end{cases}$

Total de niños: $678 \Rightarrow 3a + 4b = 678$ ...(1)

Pero: $\frac{H}{M} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{5 \times a}{7 \times a} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{42}{25}$ ...(2)

De (1) y (2): $a = 126$; $b = 75$

Luego: $H = 5 \times 126 = 630$; $M = 7 \times 75 = 525$

$\therefore$ Total de adultos: 1155.

11. De un grupo de niños y niñas, se retiran 15 niños, quedando 2 niños por cada niña. Después se retiran 45 niños y quedan 5 niñas por cada niño. ¿Cuál era el número de niñas al comienzo?

Resolución:

Sean: no: número de niños
na: número de niñas

Se retiran 15 niños, quedan 2 niños por cada niña:

$\frac{no - 15}{na} = \frac{2}{1}$ ...(1)

Se retiran 45 niños más, quedan 5 niñas por cada niño: $\frac{no - 60}{na} = \frac{1}{5}$ ...(2)

De (1) y (2): $no = 65$; $na = 25$

$\therefore$ Inicialmente 25 niñas.

12. Dos móviles cuyas velocidades son entre sí como 7 es a 5, parten al encuentro. ¿Cuál es la distancia de separación inicial, si en el momento del encuentro el más veloz recorrió 20 km más que el otro?

Resolución:

Por dato: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{e_1}{e_2} = \frac{7n}{5n} \begin{cases} e_1 = 7n \\ e_2 = 5n \end{cases}$

Pero, el más veloz recorrió 20 km más que el otro:

$e_1 - e_2 = 20$
$7n - 5n = 20$ $\Rightarrow n = 10$

Separación inicial: $e_1 + e_2 = 12n = 120$ km

$\therefore$ La separación inicial: 120 km

13. En una carrera sobre una distancia "d" km a velocidad uniforme, A puede vencer a B por 30 km; B puede vencer a C por 15 km. Hallar el valor de "d", si A puede vencer a C por 42 km.

Resolución:

Considerando lo que cada competidor recorre:

A vence a B por 30 km:

$$\frac{A}{B}=\frac{d}{d-30} \quad \ldots(1)$$

B vence a C por 15 km:

$$\frac{B}{C}=\frac{d}{d-15} \quad \ldots(2)$$

$$\frac{A}{B}\times\frac{B}{C}=\left(\frac{d}{d-30}\right)\left(\frac{d}{d-15}\right)$$

$$\frac{A}{C}=\left(\frac{d}{d-30}\right)\left(\frac{d}{d-15}\right) \quad \ldots(3)$$

Pero A vence a C por 42 km:

$$\frac{A}{C}=\frac{d}{d-42} \quad \ldots(4)$$

(3) = (4):

$$\frac{d}{d-42}=\frac{d}{d-30}\times\frac{d}{d-15} \Rightarrow d^2-45d+450$$

$$\Rightarrow d^2-42d \quad \therefore d=150 \text{ km}$$

14. Ana y Betty juegan a las cartas, Ana empezó con S/.220 y Betty con S/.440. Después de jugar 20 partidas, la razón entre lo que tienen Ana y Betty es 3/8. ¿Cuántas partidas ganó Betty, si en cada partida se gana o se pierde S/.5?

Resolución:

De las 20 partidas

Ana ganó: $20-x$ (perdió x)

Betty ganó: x (perdió $20-x$)

Si en cada partida se gana o se pierde S/.5, se tiene:

$$\frac{220+5(20-x)-5x}{440+5x-5(20-x)} \Rightarrow x=14$$

∴ Betty ganó 14 partidas.

15. En una galaxia lejana, los planetas X e Y utilizan 400 días y 1200 días en girar en torno a su eje, tardando 20 h y 48 h, respectivamente, los días; se ha tomado como referencia la Tierra. Si en el planeta Y, un ser tiene 20 años, ¿cuántos años tendría este ser en el planeta X?

Resolución:

Planeta X	Planeta Y
1 año = 400 días	1 año = 1200 días
1 día = 20 h	1 día = 48 h

Si el ser tiene 20 años y es del planeta Y:

Sus horas de vida: $20\times1200\times48$ h

Hallamos la edad en el planeta X:

$$x=\frac{20\times1200\times8}{400\times20}=144 \text{ años}$$

∴ Tiene 144 años.

16. Se tienen tres máquinas A; B y C; tal que, la producción de A y B están en la relación de 24 a 35 y la de B y C en la relación de 21 a 20. Si en un determinado día, la diferencia entre lo que produce A y C es 3192 artículos, ¿cuál fue la producción de B ese día?

Resolución:

Como B participa en las dos relaciones, lo hace con la misma cantidad, es decir:

B = MCM(35; 21) = 105

$$\frac{A}{B}=\frac{24\times3}{35\times3}=\frac{72}{105} \qquad \frac{B}{C}=\frac{21\times5}{20\times5}=\frac{105}{100}$$

Luego: A = 72k; B = 105k; C = 100k

Pero C produce 3192 artículos más que A:

$C-A=3192$

$100k-72k=28k=3192 \Rightarrow k=114$

∴ Producción de B = 105×114 = 11 970

17. El número de vagones que lleva un tren A es los 5/11 del que lleva un tren B; el que lleva un tren C, los 7/13 de otro D. Entre A y B llevan tantos vagones como los otros dos. Si el número de vagones de cada tren no puede pasar de 60, ¿cuál es el número de vagones que lleva el tren C?

Resolución:

Por datos:

$$A=\frac{5}{11}\times B \Rightarrow \frac{A}{B}=\frac{5m}{11m}\begin{cases}A=5m\\B=11m\end{cases}$$

$$C=\frac{7}{13}\times D \Rightarrow \frac{C}{D}=\frac{7n}{13n}\begin{cases}C=7n\\D=13n\end{cases}$$

Además, entre A y B llevan tantos vagones como entre C y D:

$A+B=C+D \Rightarrow 5m+11m=7n+13n$

$16m=20n$

Para que el número de vagones sea menor que 60:

$$\frac{m}{n}=\frac{5}{4} \Rightarrow m=5;\ n=4$$

∴ Número de vagones de C: $7\times4=28$.

18. Se tienen dos escalas de temperatura: X e Y. La temperatura en que el agua se congela es 0° en X y 20° en Y; el agua hierve a 60° en X y 140° en Y. ¿En qué temperatura coinciden las dos escalas?

Resolución:

Coinciden a la temperatura T:

Tenemos:	X	Y
Temperatura de congelamiento:	0°	20°
	T	T
Temperatura hierve:	60°	140°

Planteando la proporción:

$$\frac{T-0}{60-0}=\frac{T-20}{140-20} \Rightarrow \frac{T}{60°}=\frac{T-20°}{120°} \Rightarrow T=-20°$$

∴ Las temperaturas coinciden a – 20°.

19. Dada la proporción: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, la suma de los términos medios es 19 y la suma de los extremos es 21. Hallar la diferencia de los extremos, sabiendo que: $a^2+b^2+c^2+d^2=442$

Resolución:

Tenemos: $b+c=19 \Rightarrow b^2+2bc+c^2=361$

$a+d=21 \Rightarrow a^2+2ad+d^2=441$

Sumando m.a.m.:

$\underbrace{a^2+b^2+c^2+d^2}_{442}+2ad+2bc=802$

$\Rightarrow 2ad+\underbrace{2bc}_{ad}=360$

$\Rightarrow ad=90$ y: $a+d=21 \Rightarrow a=15; b=6$

$\therefore a-b=9$

20. ¿Cuántas proporciones geométricas continuas tienen como MCM de sus términos a 1008, siendo la razón un número entero?

Resolución:

Sea la proporción: $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=k, k\in\mathbb{Z}^+$

Entonces: $a=bk$; $b=ck$; $a=ck^2$

Por dato: MCM(a; b; c) = 1008

Reemplazando:

$\text{MCM}\left(bk; b; \frac{b}{k}\right)=1008 \Rightarrow bk=1008$

También: descomponiendo 1008 en factores de manera que $ck^2=1008$

$$a=1008 \qquad ck^2=1008=\begin{cases}252\times 2^2\\ 63\times 4^2\\ 112\times 3^2\\ 28\times 6^2\\ 7\times 12^2\end{cases}$$

$\therefore$ Se pueden formar 5 proporciones.

21. En una proporción geométrica continua, en la cual el producto de los cuatro términos es 50 625, se cumple que la suma de los antecedentes con el primer consecuente es igual al producto de los consecuentes. ¿Cuál es la diferencia de los extremos?

Resolución:

Sea la proporción: $\frac{a}{b}=\frac{b}{c} \Rightarrow b^2=ac$

El producto de los 4 términos: $\underbrace{a\times c}_{b^2}\times b^2=50\,625$

$b^4=50\,625 \Rightarrow b=15$

Además:

$a+2b=bc \Rightarrow a+30=15c$ ...(1)

Pero: $ac=15^2=225$ ...(2)

De (1) y (2): $a=45; c=5$

$\therefore a-c=40$

22. Si a los 4 términos de una proporción geométrica se le suma una misma cantidad, se obtienen los números: 91; 127; 175 y 253. Hallar la suma de dichos términos.

Resolución:

Sea la proporción: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

Sumando x a cada término:

$a+x=91 \Rightarrow a=91-x$

$b+x=127 \Rightarrow b=127-x$

$c+x=175 \Rightarrow c=175-x$

$d+x=253 \Rightarrow d=253-x$

Reemplazando: $\frac{91-x}{127-x}=\frac{175-x}{253-x}$

Por propiedad:

$\frac{91-x}{127-x-91+x}=\frac{175-x}{253-x-175+x}$

$\Rightarrow \frac{91-x}{36}=\frac{175-x}{78} \Rightarrow x=19$

Luego: $a=72; b=108; c=156; d=234$

$\therefore a+b+c+d=570$

23. En una proporción geométrica y continua, el producto de los antecedentes es 400 y el de los consecuentes es 6400. Hallar la suma de los 4 términos.

Resolución:

Sea la proporción: $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, se cumple: $b^2=ac$

Por dato: $ab=400$ ...(1)

$bc=6400$ ...(2)

Multiplicando m.a.m.: $\underbrace{a\times c}_{b^2}\times b^2=400\times 6400$

$b^4=400\times 6400 \Rightarrow b=40$

En (1): $40a=400 \Rightarrow a=10$

En (2): $40c=6400 \Rightarrow c=160$

$\therefore$ Suma de los términos: $a+2b+c=250$

24. La suma de los 4 términos de una proporción aritmética continua es 100; si el producto de los 4 términos es 375 000, hallar la diferencia de los extremos de la proporción.

Resolución:

Sea la proporción aritmética continua: $a-b=b-c$

Se cumple: $b=\frac{a+c}{2}$

Por dato: $a\times b\times b\times c=375\,000$ ...(1)

$a+2b+c=100$ ...(2)

De (2): $2(a+c)=100 \Rightarrow a+c=50$ ...(3)

Luego: $b=25$ ...(4)

En (1): $a\times c\times 25^2=375\,000$

$ac=600$ ...(5)

De (3) y (5): $a=30; c=20$

$\therefore a-c=10$

25. Hallar el último término de una proporción geométrica, si la suma de sus cuatro términos es 5915 y cada uno de los tres últimos términos es los 2/3 del precedente.

Resolución:

Sea la proporción: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Por dato: $a + b + c + d = 5915$ ...(1)

Además: $b = \frac{2}{3}a$; $c = \frac{2}{3}b$; $d = \frac{2}{3}c$

En términos de "a": $b = \frac{2}{3}a$; $c = \frac{4}{9}a$; $d = \frac{8}{27}a$

En (1): $a + \frac{2}{3}a + \frac{4}{9}a + \frac{8}{27}a = 5915 \Rightarrow a = 2457$

$\therefore$ El último término: $d = \frac{8}{27} \times 2457 = 728$

26. En una proporción geométrica continua, cuya razón es un número natural, la suma de los extremos menos la suma de los medios es 450. Hallar el máximo valor que puede adoptar el primer antecedente.

Resolución:

Sea la proporción: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k; k \in \mathbb{N} \Rightarrow a = bk; b = ck$

Por dato: $a + c - 2b = 450$

Reemplazando: $bk + \frac{b}{k} - 2b = 450$

Efectuando y agrupando: $b \times \frac{(k-1)^2}{k} = 450$

Para que "a" sea máximo: $k = 2$; $b = 900$

$\therefore a_{máx.} = 2 \times 900 = 1800$

27. En una proporción geométrica, la suma de cubos de los cuatro términos es 315. Hallar la suma de los cuatro términos, si el valor de la razón es un número entero positivo.

Resolución:

Sea la proporción: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k; k \in \mathbb{Z}^+$

$a = bk$; $c = dk$

Por dato: $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 315$

Reemplazando: $b^3k^3 + b^3 + d^3k^3 + d^3 = 315$

$(k^3 + 1)(b^3 + d^3) = 315 = 35 \times 9$

$b = 3$; $d = 2$

$k = 2$

Luego: $a = 6$; $c = 4$ $\therefore a + b + c + d = 15$

28. En una proporción geométrica de términos enteros y positivos, la diferencia de los medios es 14. Determinar la suma de los términos de la proporción, si el producto de dichos términos es 2601.

Resolución:

Sea la proporción: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$

Por dato: $a \times b \times c \times d = 2601$

$b \times c \Rightarrow (b \times c)^2 = 2601$

$b \times c = 51$ ...(1)

Pero: $b - c = 14$ ...(2)

De (1) y (2): $b = 17$; $c = 3$

Luego: $ad = 51 \Rightarrow a = 51$; $d = 1$

$\therefore a + b + c + d = 72$

29. Sabiendo que: $\frac{x+40}{x-40} = \frac{y+56}{y-56} = \frac{z+44}{z-44}$

además: $x + y + z = 910$; hallar "x".

Resolución:

Por propiedad:

$\frac{x+40+y+56+z+44}{x-40+y-56+z-44} = \frac{x+40}{x-40}$

$\frac{x+y+z+140}{x+y+z-140} = \frac{x+40}{x-40}$

Reemplazando: $x + y + z = 910$

$\frac{910+140}{910-140} = \frac{1050}{770} = \frac{x+40}{x-40} \Rightarrow x = 260$

$\therefore$ El valor de x es 260.

30. Si: $\frac{15+x}{15-x} = \frac{25+y}{25-y} = \frac{60+z}{60-z} = k$

además: $x + y + z + 1 = k^2$; calcular: $x + z - y$.

Resolución:

De: $\frac{15+x}{15-x} = \frac{25+y}{25-y} = \frac{60+z}{60-z} = k$

$x = \frac{15(k-1)}{k+1}$; $y = \frac{25(k-1)}{k+1}$; $z = \frac{60(k-1)}{k+1}$

Pero: $x + y + z + 1 = k^2$

Reemplazando:

$\frac{k-1}{k+1}(15 + 25 + 60) = k^2 - 1 = (k+1)(k-1)$

$\Rightarrow k = 9$

Enseguida: $x = 12$; $y = 20$; $z = 48$

$\therefore x + z - y = 40$

31. De la serie: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e}$; se cumple:

$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(b^2 + c^2 + d^2 + e^2) = 36\,100$

Calcular: $N = 5(ab + bc + cd + de)$

Resolución:

De: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = k$

$a = bk$; $b = ck$; $c = dk$; $d = ek$

Además:

$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(b^2 + c^2 + d^2 + e^2) = 36\,100$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$b^2k^2 \quad c^2k^2 \quad d^2k^2 \quad e^2k^2$

Efectuando: $k^2(b^2 + c^2 + d^2 + e^2)^2 = 36\,100$

También: $k(b^2 + c^2 + d^2 + e^2) = 190$ ...(1)

Nos piden: $N = 5(ab + bc + cd + de)$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$bk \quad ck \quad dk \quad ek$

$N = 5k(b^2 + c^2 + d^2 + e^2)$

Reemplazando: $\therefore N = 5 \times 190 = 950$

32. Se tiene: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b^3}$

Además: * $b_1 + b_2 + b_3 = 66$ * $a_2 \times b_3 = 858$
* $a_1 \times b_2 = 594$ * $a_3 \times b_1 = 702$

Hallar la diferencia entre el mayor y el menor término de la serie.

Resolución:

De: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k$

$\Rightarrow a_1 = b_1 \times k;\ a_2 = b_2 \times k;\ a_3 = b_3 \times k$

Además:

$a_2 \times b_3 = 858 \Rightarrow b_2 \times k \times b_3 = 858 = 2 \times 3 \times 11 \times 13$

$a_1 \times b_2 = 594 \Rightarrow b_1 \times k \times b_2 = 594 = 2 \times 27 \times 11$

$a_3 \times b_1 = 702 \Rightarrow b_3 \times k \times b_1 = 702 = 2 \times 3^3 \times 13$

(×): $(b_1 \times b_2 \times b_3)^2 \times k^3 = 2^3 \times 3^7 \times 11^2 \times 13^2$ ...(1)

Pero: $b_1 + b_2 + b_3 = 66$ ...(2)

De (1) y (2):

$b_1 = 18;\ b_2 = 22;\ b_3 = 26;\ k = \frac{3}{2};\ a_1 = 27;\ a_2 = 33;\ a_3 = 39$

∴ Mayor – Menor: 39 – 18 = 21.

33. Si se cumple: $\frac{AB}{UN} = \frac{AC}{UI} = \frac{BC}{NI} = 25$, además: ABC = 8000. Hallar: UNI

Resolución:

De: $\frac{AB}{UN} = \frac{AC}{UI} = \frac{BC}{NI} = 25$

Multiplicando: $\frac{(ABC)^2}{(UNI)^2} = 25^3$

Reemplazando: $\frac{(8000)^2}{(UNI)^2} = 25^3$ ∴ UNI = 64

34. Dada la serie: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k;\ k \in \mathbb{Z}^+$; además: $a + b + c = 78$, hallar el mayor valor de "a", si d = 2.

Resolución:

Vemos que: $a = bk;\ c = dk;\ e = fk$

Pero: $a + b + c = 78$

Reemplazando: $bk + b + dk = 78$

$\downarrow$

$2 \Rightarrow b = \frac{78 - 2k}{k + 1}$

Para que "a" sea máximo:

$k = 4;\ b = 14$ o $k = 7;\ b = 8$

∴ $a_{máx.} = 4 \times 14 = 7 \times 8 = 56$

35. Si las medias geométricas de tres números naturales A, B y C tomados 2 a 2, son proporcionales a los números 4; 9 y 6 respectivamente, encontrar el valor de la constante de proporcionalidad, de manera que los números A, B y C sean los menores posibles.

Resolución:

Del enunciado, se tiene: $\frac{\sqrt{AB}}{4} = \frac{\sqrt{AC}}{9} = \frac{\sqrt{BC}}{6} = k$

Luego: $AB = 16k^2$ ...(1)

$AC = 81k^2$ ...(2)

$BC = 36k^2$ ...(3)

(1) × (2) × (3): $(ABC)^2 = 16 \times 81 \times 36 \times k^6$

$\Rightarrow ABC = 4 \times 9 \times 6 \times k^3$ ...(4)

De (1), (2), (3) y (4): $A = 6k;\ B = \frac{8}{3}k;\ C = \frac{27}{2}k$

Para que A; B y C sean los menores posibles, se deduce que k = 6

∴ La constante es 6.

36. Dada la siguiente serie de razones geométricas iguales: $\frac{\sqrt{1 + a^2}}{35} = \frac{\sqrt{4 + b^2}}{70} = \frac{\sqrt{9 + c^2}}{105}$ κχ

calcular: abc, sabiendo que: a + b + c = 36

Resolución:

De: $\frac{\sqrt{1 + a^2}}{35} = \frac{\sqrt{4 + b^2}}{70} = \frac{\sqrt{9 + c^2}}{105} = k$

Al cuadrado: $\frac{1 + a^2}{1} = \frac{4 + b^2}{4} = \frac{9 + c^2}{9} = k^2$

$\Rightarrow a = \sqrt{k^2 - 1};\ b = 2\sqrt{k^2 - 1};\ c = 3\sqrt{k^2 - 1}$

Pero: $a + b + c = 36$

Reemplazando: $6\sqrt{k^2 - 1} = 36 \Rightarrow \sqrt{k^2 - 1} = 6$

Luego: $a = 6;\ b = 12;\ c = 18$ ∴ abc = 1296

37. La suma, diferencia y el producto de dos números, están en la misma relación que los números 4; 2 y 15. ¿Cuál es el mayor de los números?

Resolución:

Sean los números a y b, tal que:

$\frac{a + b}{4} = \frac{a - b}{2} = \frac{ab}{15} = k$

$\left.\begin{array}{l} a + b = 4k \\ a - b = 2k \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 3k \\ b = k \end{array}$

Además: $ab = 15k \Rightarrow 3k \times k = 15k \Rightarrow k = 5$

Los números son: a = 15; b = 5

∴ El mayor número: 15.

38. Tres números en progresión aritmética, que aumentados en 2; 3 y 8, respectivamente, son proporcionales a: 10; 25 y 50. Hallar el mayor número.

Resolución:

Sean los números en PA: a – r; a; a + r.

Por dato: $\frac{a - r + 2}{10} = \frac{a + 3}{25} = \frac{a + r + 8}{50} = k$

Luego: $a - r = 2k - 2$ ...(1)

$a = 5k - 3$ ...(2)

$a + r = 10k - 8$ ...(3)

De (1); (2) y (3): a = 7; r = 5; k = 2

Los números: 2; 7; 12

∴ El mayor número: 12.

39. Dada la siguiente serie: $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{D}{d}$, se cumple: $\frac{A}{a} + \frac{B}{b} + \frac{C}{c} + \frac{D}{d} = 18$

y: $\frac{A^3+B^3+C^3+D^3}{a^2+b^2+c^2+d^2}=2187$

Hallar: $\frac{A^2+B^2+C^2+D^2}{a^3+b^3+c^3+d^3}$

Resolución:

De: $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=\frac{D}{d}=k$

Además: $\frac{A}{a}+\frac{B}{b}+\frac{C}{c}+\frac{D}{d}=18 \Rightarrow 2k=18 \Rightarrow k=9$

Luego:

$\frac{A^3+B^3+C^3+D^3}{a^2+b^2+c^2+d^2}=2187 \Rightarrow \frac{A^2+B^2+C^2+D^2}{a^3+b^3+c^3+d^3}=x$

Multiplicando m.a.m. y ordenando, se tiene:

$\left(\frac{A^3+B^3+C^3+D^3}{a^3+b^3+c^3+d^3}\right)\left(\frac{A^2+B^2+C^2+D^3}{a^2+b^2+c^2+d^2}\right)=2187x$

Por propiedad: $9^3\times 9^2=2187x$

$\therefore x=27$

40. Si: $\frac{48}{a}=\frac{b}{c}=\frac{d}{e}$, además: $ab+be+72c=4cd$

hallar: $H=\frac{3a+2e}{2a-e}$

Resolución:

De: $\frac{48}{a}=\frac{b}{c}=\frac{d}{e} \Rightarrow 48c=ab;\ be=cd$

Pero: $ab+be+72c=4cd$

$\Rightarrow 48c+cd+72c=4cd$

$\Rightarrow 120c=3cd \Rightarrow d=40$

Luego: $\frac{48}{a}=\frac{40}{a} \Rightarrow \frac{a}{e}=\frac{6n}{5n}\begin{cases}a=6n\\e=5n\end{cases}$

Nos piden:

$H=\frac{3a+2e}{2a-e} \Rightarrow H=\frac{3(6n)+2(5n)}{2(6n)-5n}=4$

$\therefore H=4$

41. Sabiendo que: $\frac{N}{972}=\frac{A}{N}=\frac{T}{A}=\frac{Y}{T}=\frac{4}{Y}=k$,

hallar: $N+A+T+Y$

Resolución:

De: $\frac{N}{972}=\frac{A}{N}=\frac{T}{A}=\frac{Y}{T}=\frac{4}{Y}=k$

Multiplicando las razones:

$\frac{4NATY}{972NATY}=k^5 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^5=k^5 \Rightarrow k=\frac{1}{3}$

Vemos que en cada razón, el consecuente es el triple de su respectivo antecedente.

La serie: $\frac{324}{972}=\frac{108}{324}=\frac{36}{108}=\frac{12}{36}=\frac{4}{12}$

$\Rightarrow N=324; A=108; T=36; Y=12$

$\therefore N+A+T+Y=480$

42. Si: $\frac{a_1}{2}=\frac{a_2}{4}=\frac{a_3}{6}=\frac{a_{20}}{40}$ y: $a_{15}+a_{16}+\ldots+a_{20}=8400$

hallar: $a_1+a_2+\ldots+a_{15}$.

Resolución:

De la serie: $\frac{a_1}{2}=\frac{a_2}{4}=\frac{a_3}{6}=\ldots=\frac{a_{20}}{40}=k$

y: $a_{15}+a_{16}+\ldots+a_{20}=8400$

$30k+32k+\ldots+40k=8400 \Rightarrow k=40$

Luego: $a_1+a_2+\ldots+a_{15}$

$2k+4k+\ldots+30k=\underset{\downarrow\ 40}{240k}=9600$

$\therefore a_1+a_2+\ldots+a_{15}=9600$

43. En la serie de razones geométricas iguales:

$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=\frac{D}{d}$; se cumple:

$A+a+40=B+b+25=C+c+20=D+d=50$;

y: $a^2+b^2+c^2+d^2=660$. Hallar: $A+B+C+D$.

Resolución:

De: $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=\frac{D}{d}=k$

Tenemos: $A=ak; B=bk; C=ck; D=dk$

Por datos:

$A+a=10 \Rightarrow a(k+1)=10 \Rightarrow a=\frac{10}{k+1}$

$B+b=25 \Rightarrow b(k+1)=25 \Rightarrow b=\frac{25}{k+1}$

$C+c=30 \Rightarrow c(k+1)=30 \Rightarrow c=\frac{30}{k+1}$

$D+d=50 \Rightarrow d(k+1)=50 \Rightarrow d=\frac{50}{k+1}$

Pero: $a^2+b^2+c^2+d^2=660$

Reemplazando:

$\frac{1}{(k+1)^2}(10^2+25^2+30^2+50^2)=660 \Rightarrow k=\frac{3}{2}$

Luego: $a=4; b=10; c=12; d=20$

$A=6; B=15; C=18; D=30$

$\therefore A+B+C+D=69$

44. Dada la serie: $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}$; se cumple:

$\frac{A^3+B^3+C^3}{A^2+B^2+C^2}\times\frac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}=81$. Hallar: $\sqrt[4]{\frac{ABC}{abc}}$.

Resolución:

Si: $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=k$

Ordenando el dato: $\frac{A^3+B^3+C^3}{A^2+B^2+C^2}\times\frac{a^2+b^2+c^2}{A^2+B^2+C^2}=81$

Por propiedad: $k^3\times\frac{1}{k^2}=81 \Rightarrow k=81$

Ahora: $\frac{ABC}{abc}=81^3$

$\therefore \sqrt[4]{\frac{ABC}{abc}}=\sqrt[4]{81^3}=27$

45. La siguiente serie, tiene 92 razones geométricas:

$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=k;\ k\in\mathbb{N}$

Además: $\frac{a_1 \times a_2 \times a_3}{b_1 \times b_2 \times b_3} + \frac{a_2 \times a_3 \times a_4}{b_2 \times b_3 \times b_4} + \ldots = m!$

Hallar el mínimo valor de: k + m.

Resolución:

Vemos que:

$$\underbrace{\frac{a_1 \times a_2 \times a_3}{b_1 \times b_2 \times b_3} + \frac{a_2 \times a_3 \times a_4}{b_2 \times b_3 \times b_4} + \ldots + \frac{a_{90} \times a_{91} \times a_{92}}{b_{90} \times b_{91} \times b_{92}}}_{90 \text{ sumandos}} = m!$$

$$90k^3 = m!$$

La menor solución:

$k = 2;\ m = 6 \quad \therefore\ k + m = 8$

46. Hallar los valores de "m" y "n", que hagan constante a la siguiente expresión:

$$\frac{(m-2)x + (n+2m-1)y + 3n}{8x - 4y + 7}$$

Resolución:

Por propiedad: $\frac{m-2}{8} = \frac{n+2m-1}{-4} = \frac{3n}{7}$

Luego: $\frac{m-2}{8} = \frac{n+2m-1}{-4} \Rightarrow 5m + 2n = 4$ ...(1)

$\frac{m-2}{8} = \frac{3n}{7} \Rightarrow 7m - 24n = 14$ ...(2)

$\therefore$ De (1) y (2): $m = \frac{62}{67};\ n = -\frac{21}{67}$

47. En una serie de tres razones geométricas iguales, la suma de los términos de cada una de las razones es 12 ; 24 y 48, respectivamente, y el producto de los consecuentes es 1000. Hallar la suma de las cifras de la suma de los consecuentes.

Resolución:

Del enunciado, la serie es:

$\frac{12-a}{a} = \frac{24-b}{b} = \frac{48-c}{c} = k$

Además: $abc = 1000 = 5 \times 10 \times 20$

$a = 5;\ b = 10;\ c = 20 \Rightarrow a + b + c = 35$

$\therefore$ Suma de cifras : 8.

48. Si: $m - n = 12$ y $\frac{m}{n} = \frac{6}{5}$; hallar: m +n

Resolución:

De la proporción geométrica inicial transponiendo los términos medios: $\frac{m}{6} = \frac{n}{5} = k$

Despejando los valores de m y n, tendremos:

$m = 6k;\ n = 5k$ ...(1)

Como $m - n = 12$, reemplazaremos los valores de m y n dados en (1):

$6k - 5k = 12 \Rightarrow k = 12$ ...(2)

Sustituyendo (2) en (1), obtendremos:

m= 72; y n= 60

$\therefore$ Finalmente concluimos que: $m + n = 132$

49. Un piloto observa que el número de aviones es al número de barcos como 7 es a 6 pero a la vez el timonel nota que el número de aviones es al número de barcos como 8 es a 5. Hallar la diferencia entre el número de aviones y barcos.

Resolución:

Sea: A = n.° de aviones; y B = n.° de barcos. Dado que el piloto observa (A − 1) aviones, según el dato tendremos: $\frac{A-1}{B} = \frac{7}{6}$ ...(α)

El timonel que va en un barco, observa (B − 1) barcos, luego por condición:

$\frac{A}{B-1} = \frac{8}{5}$ ...(β)

Aplicando propiedades de la proporción geométrica tendremos:

En (α): $\frac{A-1}{A+B-1} = \frac{7}{7+6}$

En (β): $\frac{A}{A+B-1} = \frac{8}{8+5}$

Dividiendo miembro a miembro: $\frac{A-1}{A} = \frac{7}{8} \Rightarrow A = 8$

Reemplazando en (α): B = 6

$\therefore A - B = 2$

50. Sabiendo que:

- "a" es la media proporcional de 8 y 32.
- "b" es la tercera proporcional de 32 y a.
- "c" es la cuarta proporcional de a; b y 6

Hallar (a + b + c)

Resolución:

Del enunciado se tendrá que:

- $\frac{8}{a} = \frac{a}{32} \Rightarrow a = 16$
- $\frac{32}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow b = 8$
- $\frac{a}{b} = \frac{6}{c} \Rightarrow c = 3$

$\therefore a + b + c = 27$

51. En una proporción geométrica de razón 3, la suma de los términos de la segunda razón es menor que la suma de los términos de la primera razón en 56. Determinar la diferencia de antecedentes.

Resolución:

Sea la proporción: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = 3$

Despejando las consecuentes: $b = \frac{a}{3};\ d = \frac{c}{3}$

Por dato del problema: $(a + b) - (c + d) = 56$

Reemplazando los consecuentes en el dato:

$\frac{4}{3}a - \frac{4}{3}c = 56 \quad \therefore\ a - c = 42$

52. En un corral hay "n" aves entre patos y gallinas. Si el número de patos es a "n" como 5 es a 12 y la diferencia entre el número de patos y el número de gallinas es 18. ¿Cuál será la relación entre patos y gallinas, si se mueren 13 gallinas?

Resolución:

De acuerdo con los datos, se sabe que:

(n.° de patos) + (n.° de gallinas) = n

Según condición del problema:

$$\frac{\text{n.° de patos}}{5} = \frac{n}{12} = k$$

De donde al despejar, obtenemos que:

n.° de patos = 5k; n.° de gallinas = 7k

También:

(n.° de gallinas) – (n.° de patos) = 18 ⇒ k = 9

n.° de patos = 5 × 9 = 45

n.° de gallinas = 7 × 9 = 63

Si se mueren 13 gallinas:

$$\frac{\text{n.° de patos}}{\text{n.° de gallinas}} = \frac{45}{63-13} = \frac{9}{10}$$

53. En una proporción geométrica continua la razón de la proporción es igual a la media proporcional y la suma de sus cuatros términos es 169. Determinar la diferencia ente los extremos.

Resolución:

Sea la P. G. C. de razón b: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = b$

Despejando tendremos:

$b = cb;\ a = cb^2$ de donde: $c = 1$ ...(1)

Por dato del problema se tiene que:

$a + 2b + c = 169$ ...(2)

Reemplazando los valores de (1) en (2), obtenemos:

$b^2 + 2b + 1 = 169 \Rightarrow (b + 1)^2 = 169 \Rightarrow b = 12$

Esto significa que: $a = (1)(12)^2 \Rightarrow a = 144$

$\therefore\ a - c = 143$

54. En una proporción aritmética continua los extremos están en la relación de 3 a 5. Si la suma de los cuadrados de los tres términos diferentes de la proporción es 200. Hallar la media diferencial.

Resolución:

Sean 3k y 5k los extremos y b la media diferencial de la proporción aritmética continua, luego se tendrá que:

$3k - b = b - 5k \Rightarrow b = 4k$ ...(1)

Además, por condición del problema se debe cumplir que: $(3k)^2 + (4k)^2 + (5k)^2 = 200 \Rightarrow k = 2$

∴ Al reemplazar en (1) concluimos que la media diferencial es: $b = 8$

55. A partir de la serie: $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = k$, se cumple que $\frac{AB}{ab} + 2\frac{(B-C)}{(b-c)} = 15$. Calcular el valor de k siendo $k \in \mathbb{Z}^+$

Resolución:

Utilizando las dos primeras razones, aplicamos propiedades de las razones geométricas equivalentes, obteniéndose que:

$$\frac{AB}{ab} = k^2 \quad ...(1)$$

Asimismo, para las dos últimas razones emplearemos propiedad de las proporciones geométricas:

$$\frac{B-C}{b-c} = k \quad ...(2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en la condición dada:

$k^2 + 2k = 15 \Rightarrow k^2 + 2k - 15 = 0$

Descomponiendo en factores:

$(k + 5)(k - 3) = 0 \Rightarrow k = -5 \ \vee \ k = 3$

∴ Dado que k es un número positivo, concluimos que: $k = 3$

56. En una serie de 4 razones geométricas continuas equivalentes la suma de sus términos diferentes excede a la suma de los extremos en 310. Calcular la diferencia de los extremos.

Resolución:

Dado la serie geométrica continua:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = k \begin{cases} a = ek^4 \\ b = ek^3 \\ c = ek^2 \\ d = ek \end{cases}$$

Por condición del problema se cumple que:

$(a + b + c + d + e) - (a + e) = 310$

$b + c + d = 310$

$ek^3 + ek^2 + ek = 310$

$ek(k^2 + k + 1) = 2 \times 5 \times 31 \Rightarrow e = 2;\ k = 5$

$\therefore\ a - e = 2 \times 5^4 - 2 = 1248$

57. La edad de un padre y la de sus hijos forman una proporción geométrica continua cuya razón es un número entero. Si la suma de dichas edades es 93. ¿Cuál es la suma de las edades de sus hijos?

Resolución:

Asumimos que las edades son a, b y c, entonces:

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$

$\Rightarrow b = ck;\ a = ck^2$ ...(1)

De acuerdo con los datos sabemos que:

$a + b + c = 93$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):

$\Rightarrow c(k^2 + k + 1) = 3 \times 31 \Rightarrow c = 3;\ k = 5$

Donde se puedan deducir que las edades son:

$a = 75;\ b = 15$ y $c = 3$

$\therefore\ b + c = 18$

58. Halle la suma de dos números, tal que su media geométrica sea $\sqrt[5]{2}$ y su tercera proporcional sea 20.

Resolución:

$$\frac{a}{5\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{c} \Rightarrow ac = 50 \quad ...(1)$$

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{20} \Rightarrow 20a = c^2 \quad ...(2)$$

Reemplazando (2) en (1): $\left(\frac{c^2}{20}\right)c = 50 \Rightarrow c = 10$

Luego, reemplazando en (1): $a = 5$

$\therefore a + c = 15$

59. Si $\frac{64+x}{x} = \frac{x+y}{y} = \frac{z+8}{z}$, hallar la suma de las cifras del producto xyz.

Resolución:

Por propiedades:

$$\frac{64+x-x}{x} = \frac{x+y-y}{y} = \frac{z+8-z}{z} \Rightarrow \frac{64}{x} = \frac{x}{y} = \frac{8}{z} = k$$

$\Rightarrow$ si la constante es entera

$\Rightarrow$ x divide exactamente a 64

$x = 32$: $\frac{64}{32} = \frac{32}{y} = \frac{8}{z} = 2$

Se obtiene: $y = 16$, $z = 4$

$xyz = 32 \times 16 \times 4 = 2048$

$\therefore$ La suma de cifras: $2 + 0 + 4 + 8 = 14$

60. La media aritmética de los términos de una proporción geométrica continua es a la razón aritmética de sus extremos como 3 a 4. Calcular la suma de las 2 razones geométricas que se pueden obtener con los extremos de dicha proporción.

Resolución:

$$\frac{MA(a;b;b;c)}{R.A(a;c)} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\left(\frac{a+2b+c}{4}\right)}{a-c} = \frac{3}{4}$$

$\Rightarrow a + 2b + c = 3a - 3c$
Donde: $b + 2c = a$ $\Big\}$ $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$

$$ck + 2c = ck^2 \Rightarrow k^2 - k = 2$$

Solo $k = 2$

Luego: $a = c(2)^2 = 4c$

Primera razón: $\frac{a}{c} = 4$; Segunda razón: $\frac{c}{a} = \frac{1}{4}$

$\therefore$ Suma: $4 + \frac{1}{4} = 4{,}25$

61. Si: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = 0{,}5$

además: $\left(\frac{b_1}{a_1}\right) + \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^n = 2046$

Hallar n

Resolución:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = 0{,}5 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = \dots = \frac{b_n}{a_n} = 2$$

Reemplazando en:

$$\left(\frac{b_1}{a_1}\right) + \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{b_3}{a_3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^n = 2046$$

$2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2046$

Sumando 1 a cada término

$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2047$ ...(1)

Multiplicando por 2:

$2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n+1} = 4094$ ...(2)

(2) – (1): $2^{n+1} - 1 = 2047 \Rightarrow 2^{n+1} = 2^{11}$

$\therefore n = 10$

62. Si de los números 15, 69, 27 y 63 restamos una misma cantidad los cuadrados de los números resultantes son proporcionales a 28, 847, 112 y 700. Si dicha cantidad es igual a la constante de proporcionalidad del siguiente conjunto de razones geométricas equivalentes:

$$\frac{2a+5b}{5e+2d} = \frac{3b-c}{3e-f} = \frac{7a+2c}{2f+7d}$$

Calcular: $\frac{ad+be+cf}{d^2a+e^2b+f^2c} \times \frac{a^3+b^3+c^3}{d^2+e^2+f^2}$

Resolución:

Del dato:

$$\frac{(15-a)^2}{28} = \frac{(69-a)^2}{847} = \frac{(27-a)^2}{112} = \frac{(63-a)^2}{700}$$

$28 = 4 \times 7$; $847 = 121 \times 7$; $112 = 16 \times 7$; $700 = 100 \times 7$

$$\Rightarrow \frac{(15-a)^2}{4} = \frac{(69-a)^2}{121} = \frac{(27-a)^2}{16} = \frac{(63-a)^2}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{15-a}{2} = \frac{69-a}{11} = \frac{27-a}{4} = \frac{63-a}{10}$$

Igualando: $\frac{15-a}{2} = \frac{27-a}{4} \Rightarrow a = 3$

a = 3 es la constante de proporcionalidad de la serie.

$$\frac{2a+5b}{5e+2d} = \frac{3b-c}{3e-f} = \frac{7a+2c}{2f+7d} = 3$$

Ordenando y multiplicando:

$$\frac{7(2a+5b)}{7(2d+5e)} = \frac{2(7a+2c)}{2(7d+2f)} = \frac{3b-c}{3e-f}$$

Restando: $\frac{(35b-4c)}{(35e-4f)} = \frac{(3b-c)\times 4}{(3e-f)\times 4}$

$\Rightarrow$ Restando: $\frac{35b-12b}{35e-12e} = \frac{23b}{23e} = \frac{b}{e}$

Similar con los demás, se obtiene:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = 3 \begin{cases} a = 3d \\ b = 3e \\ c = 3f \end{cases}$$

Reemplazando en:

$$T = \left(\frac{ad+be+cf}{d^2a+e^2b+f^2c}\right)\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{d^2+e^2+f^2}\right)$$

$$T = \left(\frac{(3d)d+(3e)e+(3f)f}{d^2(3d)+e^2(3e)+f^2(3f)}\right)\left(\frac{(3d)^3+(3e)^3+(3f)^3}{d^2+e^2+f^2}\right)$$

$$T = \frac{3(d^2+e^2+f^2)}{3(d^3+e^3+f^3)} \times \frac{27(d^3+e^3+f^3)}{(d^2+e^2+f^2)} \qquad \therefore T = 27$$

63. Se tienen tres razones geométricas equivalentes y continuas; la suma de los cubos de los antecedentes es 64 veces la suma de los cubos de los

consecuentes. Si la diferencia entre el antecedente de la primera razón y 8 veces el consecuente de la última razón es 392. Hallar la suma de los consecuentes.

Resolución:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=k \Rightarrow \frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3}=\frac{64(b^3+c^3+d^3)}{b^3+c^3+d^3}=k^3$$

Como $64 = k^3 \Rightarrow k = 4$

Dato: $a - 8d = 392$ ...(1)

De la serie continua: $a = dk^3 = d(4)^3 = 64d$

Reemplazando: $64d - 8d = 392 \Rightarrow d = 7$

Se forma: $\frac{448}{112}=\frac{112}{28}=\frac{28}{7}=4$

$\therefore$ Suma de consecuentes: $112 + 28 + 7 = 147$

64. En un conjunto de 4 razones geométricas equivalentes y continuas, al dividir, el producto de los antecedentes entre el producto de los consecuentes se obtuvo $\frac{16}{81}$. Si la suma del primer antecedente y el último consecuente es 776. El menor de los consecuentes es:

Resolución:

Sean las razones: $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e}=k$

Propiedad: $\frac{abcd}{bcde}=k^4=\frac{16}{81} \Rightarrow k = 2/3$

Pero: $\frac{abcd}{bcde}=\frac{16}{81} \Rightarrow a= 16m;\ e = 81m$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Dato: } a + e = 776\\ \Rightarrow 16m + 81m = 776\end{array}\right\} m=8$$

Luego: $a = 128;\ e = 648$

Se forma: $\frac{128}{192}=\frac{192}{288}=\frac{288}{432}=\frac{432}{648}=\frac{2}{3}$

$\therefore$ El menor consecuente es 192

65. Si se cumple que: $\frac{\sqrt{a}-3}{39}=\frac{\sqrt{b}-5}{65}=\frac{\sqrt{c}-7}{91}$

Además: ab= 3600. Calcular: $a - b + c$

Resolución:

$$\frac{\sqrt{a}-3}{39}=\frac{\sqrt{b}-5}{65}=\frac{\sqrt{c}-7}{91}$$

$$\frac{\sqrt{a}-3}{3}=\frac{\sqrt{b}-5}{5}=\frac{\sqrt{c}-7}{7} \Rightarrow \frac{\sqrt{a}}{3}=\frac{\sqrt{b}}{3}=\frac{\sqrt{c}}{7}$$

Elevando al cuadrado:

$$\frac{a}{9}=\frac{b}{25}=\frac{c}{49}=k=\frac{a-b+c}{33}$$

Dato: $\frac{ab}{9\times 25}=k^2 \Rightarrow \frac{3600}{9\times 25}=k^2 \Rightarrow k = 4$

$\therefore a - b + c = 33k = 132$

66. Si la suma de las combinaciones de productos de 2 en 2 de a, b y c es 31, además la media geométrica de dichos números es $\sqrt[3]{30}$. Calcular cuántos números de dos cifras mayores que $10 \times [\![MH]\!]$ existen, tales que terminen en 5.

$[\![\ ]\!]$: Máximo entero.

Resolución:

Según los datos:

$ab + ac + bc = 31$

$\sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{30} \Rightarrow abc = 30$

$$\Rightarrow \frac{ab+ac+bc}{abc}=\frac{31}{30} \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{31}{30}$$

$$\Rightarrow MH(a;b;c)=\frac{3}{\frac{31}{30}}=2{,}9 \Rightarrow [\![MH(a;\ b;\ c)]\!]=2$$

Los números de 2 cifras que terminan en 5 que son mayores que $\underbrace{2\times 10}_{20}$ son: 25, 35, 45, ..., 95

$\therefore$ 8 numeros

67. En una serie de 4 razones geométricas equivalentes continuas donde cada término es entero y la constante de proporcionalidad mayor que 1, la suma de los antecedentes es 150. Calcular cuántas proporciones tiene como media proporcional al primer antecedente de la serie si su constante es mayor que 1.

Resolución:

Sean las razones geométricas continuas:

$$\frac{nk^4}{nk^3}=\frac{nk^3}{nk^2}=\frac{nk^2}{nk}=\frac{nk}{k}=k$$

Por dato:

$$nk(k^3+k^2+k+1)=150=2\times 3\times 5\times 5$$

$n = 5$ y $k = 2$

Luego, la serie será: $\frac{80}{40}=\frac{40}{20}=\frac{20}{10}=\frac{10}{5}=2$

Nos piden cuantas proporciones de constante mayor que 1 tienen la forma:

$\frac{a}{80}=\frac{80}{b} \Rightarrow (a > 80)$

a	×	b = 6400
↓		↓
6400		1
3200		2
1600		4
⋮		⋮
80		80
64		100
⋮		⋮
1		6400

Divisores de 6400

$$\therefore \frac{CD_{6400}+1}{2}-1=13$$

68. La diferencia del primer y último término de una proporción continua es 30. Calcular la media proporcional, si la suma de los cuatro términos es 150.

Resolución:

Se tiene la proporción geométrica continua:

$\frac{nk^2}{nk} = \frac{nk}{n}$

Por dato: $n(k^2 - 1) = 30 \Rightarrow n(k^2 + 2k + 1) = 150$

$\frac{n(k^2 - 1)}{n(k^2 + 2k + 1)} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{(k + 1)(k - 1)}{(k + 1)^2} = \frac{1}{5}$

$\frac{k - 1}{k + 1} = \frac{1}{5} \Rightarrow k = \frac{3}{2}$

Reemplazando en el primer dato:

$n\left(\frac{9}{4} - 1\right) = 30 \Rightarrow n = 24$

$\therefore$ La media proporcional es: $nk = 24 \times \frac{3}{2} = 36$

69. En una serie de cuatro razones geométricas equivalentes y continuas se cumple que la suma de antecedentes con el doble de la suma de los dos primeros consecuentes es 4320. Hallar la suma de los términos de la segunda razón, sabiendo que el valor de la razón es un número impar.

Resolución:

$\frac{ak^4}{ak^3} = \frac{ak^3}{ak^2} = \frac{ak^2}{ak} = \frac{ak}{a} = k$

$ak^4 + 3ak^3 + 3ak^2 + ak = 4320$

$\underbrace{a}_{4} \times \underbrace{k}_{5} \times \underbrace{(k + 1)^3}_{6^3}$

$4 \times 5 \times 6^3$

Segunda razón: $\frac{4 \times 5^3}{4 \times 5^2} = \frac{500}{100}$

$\therefore 500 + 100 = 600$

70. La media geométrica de dos números enteros A y B es $6\sqrt{2}$. Se sabe que su media armónica y su media aritmética son dos enteros consecutivos. Hallar la diferencia en valor absoluto de dichos números.

Resolución:

Por dato: $MG(A; B) = 6\sqrt{2} \Rightarrow AB = 72$

MA(A; B) y MH(A; B) son números consecutivos

Para dos números se cumple

$MA(A; B) \times MH(A; B) = MG^2(A; B)$, $MA(A; B) > MH(A; B)$

Entonces: $\underbrace{\boxed{MA(A;B)}}_{9} \times \underbrace{\boxed{MH(A;B)}}_{8} = (6\sqrt{2})^2 = 72$

Pero: $MA(A; B) = \frac{A + B}{2} = 9 \Rightarrow A + B = 18$

Como: $AB = 72 \Rightarrow A = 12;\ B = 6$

$\therefore A - B = 6$

71. Si: $\frac{a + 2b}{b} = \frac{e + 2f}{f} = \frac{c + 2d}{d}$, además:

$(b + d + f)(a + e + c) = 3249$

Calcular: $T = \sqrt{fe} + \sqrt{ba} + \sqrt{cd}$

Resolución:

Descomponiendo:

$\frac{a}{b} + 2 = \frac{e}{f} + 2 = \frac{c}{d} + 2 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$

$(b + d + f)(b + d + f)k = 3249$

$k(b + d + f)^2 = 3249$

Piden: $T = \sqrt{f^2k} + \sqrt{b^2k} + \sqrt{d^2k}$

$T = \sqrt{k}(b + d + f) = \sqrt{3249} = 57 \quad \therefore T = 57$

72. El producto de los 4 términos de una proporción geométrica continua es 124 veces la suma de sus 4 términos. Sabiendo que el cuarto término es par y la razón mayor que 1. Halle la media proporcional.

Resolución:

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k \left\} \begin{array}{l} a = ck^2 \\ b = ck \end{array}\right.$

Luego: $abbc = 324(a + b + b + c)$

Se obtiene: $c^4k^4 = 324c(k + 1)^2$

$c^3 = \frac{3^4 \times 2^2(k + 1)^2}{k^4}$

Solo: $k = 3 \Rightarrow c = 4$

La proporción será: $\frac{36}{12} = \frac{12}{4} = 3$

$\therefore$ Media proporcional es 12

73. En una serie de n razones aritméticas continuas e iguales de razón r. Halle la semidiferencia entre el primer antecedente y el último consecuente:

Resolución:

Sean las razones aritméticas continuas indicadas cuyo:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 - b_1 = r \\ b_1 - b_2 = r \\ b_2 - b_3 = r \\ \vdots \\ b_{n-1} - b_n = r \end{array}\right\} \text{n razones aritméticas}$$

Sumando miembro a miembro las expresiones anteriores: $a_1 - bn = r + r + \ldots + r = nr$

$\therefore \frac{a_1 - bn}{2} = \frac{nr}{2}$

74. Dos mujeres y cuatro niños, consumen en un comedor por un valor de S/.390 Determinar la cantidad en soles que consumirán 4 mujeres y 2 niños, si se sabe que el consumo de comida de la misma calidad ha sido 8 veces más considerable. Además se sabe que los apetitos de una mujer y de un niño están en la relación de 5 a 4.

Resolución:

Sean los apetitos respectivos de una mujer y un niño:

$\frac{M}{N} = \frac{5}{4} \Rightarrow \begin{array}{l} M = 5k \\ N = 4k \end{array}$

Inicialmente: $2M + 4N \Rightarrow 2(5k) + 4(4k) = 26k$

Después: $4M + 2N \Rightarrow 4(5k) + 2(4k) = 28k$

Pero el consumo es 8 veces más considerable: 8(28k)

Luego: $\frac{\text{Gasto inicial}}{\text{Gasto final}} = \frac{26k}{8(28k)} = \frac{390}{x}$

$\therefore x = S/.3360$

75. Dos razones son respectivamente equivalentes a 7/13 y 5/9. Hallar la suma de los antecedentes, sabiendo que son los menores enteros positivos posibles. Además la suma de los términos de la primera razón es igual a la suma de los términos de la segunda razón.

Resolución:

Sean las razones:

$\frac{a}{b}=\frac{7}{13} \Rightarrow \begin{matrix} a=7k \\ b=13k \end{matrix}$ (k debe ser entero)

$\frac{c}{d}=\frac{5}{9} \Rightarrow \begin{matrix} c=5m \\ d=9m \end{matrix}$ (m debe ser entero)

También: $a+b=c+d \Rightarrow 7k+13k=5m+9m$

$\Rightarrow 20k=14m \Rightarrow k=7;\ m=10$

Antecedentes : $\left.\begin{matrix} a=7(7)=49 \\ c=5(10)=50 \end{matrix}\right\} \therefore a+c=99$

76. Si a/b = b/c = c/d = d/e = e/f, el último consecuente es 8, sabiendo que $\sqrt[3]{abf}=216$. Hallar: $\frac{a}{de}$

Resolución:

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e}=\frac{e}{f}=k$

De donde: $a=8k^5$, $b=8k^4$

Dato: $\sqrt[3]{abf}=\sqrt[3]{8k^5\times 8k^4\times 8}=216 \Rightarrow k=3$

$\therefore\ \frac{a}{de}=\frac{8\times 3^5}{(8\times 3^2)(8\times 3)}=\frac{9}{8}$

77. En una proporción geométrica continua, la suma de los antecedentes es 30 y la suma de los extremos es 26. Hallar la media proporcional si la razón es un número fraccionario.

Resolución:

$\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}\left\{\begin{matrix} a+b=30=ck^2+ck \\ a+c=26=ck^2+c \end{matrix}\right.$

Luego: $\frac{ck(k+1)}{c(k^2+1)}=\frac{30}{26}=\frac{15}{13}$

Resolviendo: k = 5 o k = 3/2

Como k es fraccionable: k=3/2

Se obtiene: $c=8 \Rightarrow a=18,\ b=12$

$\therefore$ La media proporcional es 12

78. En una proporción geométrica se cumple que el producto de los antecedentes es 200 y el producto de los consecuentes es 1250. La mitad de la media armónica de los términos medios es 25/3. Calcule el mayor valor que puede tomar la media armónica de los extremos.

Resolución:

Si: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$

Se cumple: $\frac{ac}{bd}=k^2=\frac{200}{1250} \Rightarrow k=\frac{2}{5}$

También: $\frac{1}{2}MH(b;c)=\frac{bc}{b+c}=\frac{25}{3}$ pero: c = dk

$\left.\frac{b(2/5d)}{b+(2/5d)}=\frac{25}{3}\right\}\begin{matrix} \text{también } bd=1250 \\ \text{se obtiene: } d=25 \text{ o } d=125 \end{matrix}$

Si $d=25 \Rightarrow b=50$

Respectivamente:

$c=\frac{2}{5}(25)=10,\ a=\frac{2}{5}(50)=20$

$MH(10;20)=\frac{2\times 10\times 20}{10+20}=\frac{40}{3}=13{,}3$

Si $d=125 \Rightarrow b=10;\ c=50;\ a=4$

$MH(50;4)=\frac{2\times 50\times 4}{50+4}=7{,}4$

$\therefore$ Mayor valor: MH(10; 20) = 13,3

79. A un festival deportivo concurrió el público de la siguiente manera:

- 2 hombres adultos por cada 3 señoritas y 2 señoras por cada señorita.
- Cada 3 señoras entraban con 5 niños
- Cada 2 señoritas entraban con 7 niños.
- Cada 4 hombres adultos entraban con 8 niños.
- Cada 7 niños entraba con 1 mascota.
- Las señoras, señoritas y hombres adultos entraban por puertas diferentes.
- Al final se contaron 160 personas entre mujeres casadas y hombres adultos.

¿Cuántos eran entre niños y señoritas? y ¿cuántas las mascotas?

Resolución:

Sea la relación entre hombres (H), señoritas (S_T) y señoras (S_A):

H	S_T	S_A
2	3	
	1	2
2	3	6

$\frac{H}{2}=\frac{S_T}{3}=\frac{S_A}{6}=2k$

Se tendrá:

$H=4k;\ S_T=6k;\ S_A=12k$

- Niños acompañados por señoras:

  $\frac{N_{SA}}{5}=\frac{S_A}{3}=\frac{12k}{3} \Rightarrow N_{SA}=20k$

- Niños acompañados por señoritas:

  $\frac{N_{ST}}{7}=\frac{S_T}{2}=\frac{6k}{2} \Rightarrow N_{ST}=21k$

- Niños acompañados por hombres:

  $\frac{N_H}{8}=\frac{H}{4}=\frac{4k}{4} \Rightarrow N_H=8k$

Total de niños:

$N_{SA}+N_{ST}+N_H=20k+21k+8k=49k$

Pero: $\frac{\text{Niños}}{7}=\frac{\text{Mascota}}{1} \Rightarrow$ Mascotas = 7k

Además: $S_A+H=12k+4k=160 \Rightarrow k=10$

$\therefore$ Se pide: $N+S_T=49(10)+6(10)=550$

Mascotas : 7(10) = 70

80. Si $a/b=(a+c)/d=b/c=r$; $d-c=39$; $r\in\mathbb{Z}-\{2\}$; calcular d − b

Resolución:

Dato: $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{d} = \frac{b}{c} = r$

Ordenando: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = r \left.\right\} \begin{matrix} a = cr^2 \\ b = cr \end{matrix}$

De la serie inicial, se restan los términos de las dos últimas razones: $\frac{a+c-b}{d-c} = r$

Reemplazando: $\frac{cr^2 + c - cr}{39} = r$

Luego: $c(r^2 - r + 1) = 3 \times 13 \times r$

$r = 4$

Se obtiene: $c = 12$; $b = 48$, $d = 51$

$\therefore\ d - b = 51 - 48 = 3$

81. En una proporción geométrica discreta de términos enteros, la suma de extremos vale 22 y los términos medios son números consecutivos. Si la razón es entera, determinar el valor de la suma de los consecuentes más la razón.

Resolución:

Sea la proporción: $\frac{a}{n+1} = \frac{n}{b} = k \Rightarrow n = bk$

$\therefore\ a + b = b \times k^2 + k + b = 22$

$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow$

$4\ \ 2^2\ \ 2\ \ 4$

La proporción será: $\frac{18}{9} = \frac{8}{4} = 2$

$\therefore$ Nos piden: $9 + 4 + 2 = 15$

82. Se tiene un recipiente que contiene una mezcla de vino y agua en la relación de 5 a 4. Se sacan 9 litros de este recipiente y es reemplazado por el mismo volumen de otra mezcla de vino y agua pero que están en la relación de 4 a 5. Si ahora dicha relación en el recipiente es de 6 a 5. Calcule el volumen de la mezcla en el recipiente.

Resolución:

Después de sacar 9 litros, la relación entre el vino y el agua es de 5 a 4: Cantidad de vino : 5k
Cantidad de agua: 4k

Luego se repone con 9 litros pero la relación entre el vino y el agua es de 4 a 5:

Se agrega: 4 litros de vino
5 litros de agua
Total 9 litros

La nueva relación:

$\frac{\text{Vino}}{\text{Agua}}\ \frac{5k+4}{4k+5} = \frac{6}{5} \Rightarrow k = 10$

La cantidad de mezcla será:

Cantidad de vino + cantidad de agua

$[5(10) + 4] + [4(10) + 5] = 99$ litros

83. Halle dos enteros positivos a y b, tal que su razón es 2/3 y satisfacen: $a^2 + b^2 - ab = 2268$

Resolución:

$\frac{a}{b} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = 2k$; $b = 3k$

Dato: $a^2 + b^2 - ab = 2268$

Reemplazando: $(2k)^2 + (3k)^2 - (2k)(3k) = 2268$

Se obtiene $k = 18$

$\therefore\ a = 2(18) = 36$ y $b = 3(18) = 54$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2003 - II)

Se tiene cuatro números, tales que los tres primeros están en progresión geométrica y los tres últimos en progresión aritmética de razón seis, siendo el primer número igual al cuarto. La suma de los cuatro números es:

A) 22 B) 18 C) 14
D) 16 E) 20

Resolución:

Sean los números: a_1; a_2; a_3; a_4

Por dato: $a_1 = a_4$

Del enunciado:; a_1; a_2; a_3 ...(1)
a_2; a_3; a_4 ...(2)

Como la razón es 6 se cumple:

$a_2 = x - 6$; $a_3 = x$; $a_4 = a_1 = x + 6$

De (1), por ser progresión geométrica, se cumple:

$a_2^2 = a_1\, a_3$

Reemplazando: $(x - 6)^2 = x(x + 6)$

$\Rightarrow x^2 - 12x + 36 = x^2 + 6x \Rightarrow 36 = 18x \Rightarrow x = 2$

Luego: $a_1 = 8$; $a_2 = -4$; $a_3 = 2$; $a_4 = 8$

$\therefore\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 14$

Clave: C

PROBLEMA 2 (UNI 2004 - I)

La suma de las razones geométricas que se pueden formar con dos cantidades es 14. Calcule la relación entre la media geométrica y la media armónica de esas dos cantidades.

A) 2,5 B) 2,0 C) 1,0
D) 0,5 E) 0,25

Resolución:

Sabemos: $MH(a; b) \leq MG(a; b) \Rightarrow \frac{MG(a;b)}{MH(a;b)} \geq 1$

Con lo cual descartamos las alternativas D y E.

Del problema: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=14$

Sumando "2ab" a ambos miembros:

$a^2+2ab+b^2=16ab \Rightarrow (a+b)^2=16ab$

$\Rightarrow a+b=4\sqrt{ab}$

$2MA(a;b)=4MG(a;b) \Rightarrow MA(a;b)=2MG(a;b)$ ...(1)

Luego: $(a+b)^2=16ab \Rightarrow a+b=8\left(\frac{2ab}{a+b}\right)$

$2MA(a;b)=8MH(a;b) \Rightarrow MA(a;b)=4MH(a;b)$ ...(2)

Igualando (1) y (2): $4MH(a;b)=2MG(a;b)$

$\therefore \frac{MG(a;b)}{MH(a;b)}=2$

Clave: B

PROBLEMA 3 (UNI 2006 - I)

Si a; b; c son números positivos tales que

$$\frac{a^2+b^6}{a+b^6+3c}=\frac{b^6}{c^2}=\frac{a^2}{b^6}=k$$

Entonces: c − k es igual a:

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución:

Con los datos del problema:

$$\frac{a^2+b^6}{a+b^6+3c}=\frac{b^6}{c^2}=\frac{a^2}{b^6}=k$$

Observamos que se cumple lo siguiente

$\frac{a^2+b^6}{a+b^6+3c}=\frac{b^6+a^2}{c^2+b^6} \Rightarrow c^2=a+3c$ ...(α)

De otro lado, también se cumple:

$\frac{b^6\times a^2}{c^2\times b^6}=k^2 \Rightarrow a=ck$ ...(β)

Reemplazando (β) en (α):

$c^2=ck+3c \Rightarrow c=k+3 \quad \therefore c-k=3$

Clave: C

PROBLEMA 4 (UNI 2006 - II)

En una barra de madera de 30 cm se realizan n cortes, tal que las partes obtenidas A_1; A_2; ...; son proporcionales a los números 1; 2; ... La media aritmética de las inversas de la menor y mayor de las partes es:

A) $\frac{120}{n+2}$ B) $\frac{60}{(n+2)^2}$ C) $\frac{120}{(n+1)^2}$

D) $\frac{(n+1)^2}{120}$ E) $\frac{(n+2)^2}{120}$

Resolución:

Como en la madera se hacen n cortes, se puede expresar lo siguiente:

$k[1+2+3+...+(n+1)]=30$

$\frac{k(n+1)(n+2)}{2}=30 \Rightarrow k(n+1)(n+2)=60$

Luego, nos piden la media aritmética de las inversas:

$$\therefore MA=\frac{\frac{1}{k}+\frac{1}{(n+1)k}}{2}=\frac{n+2}{2k(n+1)}=\frac{n+2}{2\left(\frac{60}{n+2}\right)}=\frac{(n+2)^2}{120}$$

Clave: E

PROBLEMA 5 (UNI 2008 - I)

Si se cumple: $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=k$, donde k es un entero positivo, y que $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2^2-a_3^2}{b_2^2-b_3^2}=6$, entonces el valor de k es:

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución:

Si: $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=k \Rightarrow \frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2^2-a_3^2}{b_2^2-b_3^2}=6$

$k+k^2=6 \Rightarrow k(1+k)=2(1+2) \therefore k=2$

Clave: B

PROBLEMA 6 (UNI 2008 - I)

La suma de tres términos consecutivos de una progresión geométrica es 13. Sabiendo que si los dos primeros términos se incrementan en dos unidades y se disminuye en la misma cantidad al tercero, los números forman una progresión aritmética. Determine la razón de la progresión geométrica decreciente.

A) 1/3 B) 1/2 C) 2/3
D) 2 E) 3

Resolución:

Hacemos: $\frac{x}{r}; x; xr$

Por dato:

$\frac{x}{r}+x+xr=13 \Rightarrow \frac{x}{r}+xr=13-x$ ...(α)

Luego: $\frac{x}{r}+2; x+2; xr-2$

Se cumple: $(x+2)-\left(\frac{x}{r}+2\right)=(xr-2)-(x+2)$

De donde: $2x+4=xr+\frac{x}{r}$

De (α): $2x+4=13-x \Rightarrow x=3$

En el dato: $\frac{3}{r}+3+3r=13$

Operando: $3r^2-10r+3=0 \Rightarrow r=3 \vee r=\frac{1}{3}$

Clave: A

PROBLEMA 7 (UNI 2008 - II)

Tres números positivos forman una progresión aritmética y además su suma es 21. Si a esos números añadimos 2; 3 y 9, respectivamente, obtenemos una progresión geométrica. Hallar el producto de esos números.

A) 231 B) 284 C) 273
D) 308 E) 420

Resolución:

Sean los números: $a - r$; a; $a + r$ (positivos)

Por condición del problema:

$a - r + a + a + r = 21 \Rightarrow 3a = 21 \Rightarrow a = 7$

Luego, los números son: $7 - r$; 7 y $7 + r$

También, si a esos números se añaden 2; 3 y 9, entonces, los nuevos números serán: $9 - r$; 10 y $16 + r$

Por condición del problema; los nuevos números forman una PG, entonces se cumple: $(9 - r)(16 + r) = 10^2$

$\Rightarrow r = 4 \vee r = -11$ (se descarta porque habría un número negativo). Entonces, los números son: 3; 7 y 11

Nos piden el producto de los números:

$\therefore\ 3 \times 7 \times 11 = 231$

Clave: A

PROBLEMA 8 (UNI 2010 - II)

Tres números A, B, C están en relación directa a 5; 7 y 11. Si sumamos a dichos números, respectivamente, 130; 260 y n, la nueva relación directa es como 13; 17 y 19. Determine n.

A) 390 B) 650 C) 910
D) 1170 E) 1430

Resolución:

Por dato:

$\frac{A}{5} = \frac{B}{7} = \frac{C}{11} = k \Rightarrow A = 5k;\ B = 7k;\ C = 11k$

Luego: $\underbrace{\frac{5k+130}{13} = \overbrace{\frac{7k+260}{17}}_{(I)} = \frac{11k+n}{19}}^{(II)}$

De (I): $k = -195$

Reemplazando en (II):

$\frac{7(-195)+260}{17} = \frac{11(-195)+n}{19}\ \ \therefore\ n = 910$

Clave: C

PROBLEMA 9 (UNI 2012 - I)

En una proporción geométrica de razón $\frac{5}{4}$ la suma de los términos es 45 y la diferencia de los consecuentes es 4. Halle el mayor de los términos de la proporción.

A) 12 B) 15 C) 16
D) 18 E) 20

Resolución:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{5}{4};\ a + b + c + d = 45$

$\underbrace{(a + c)}_{\substack{5(5)\\25}} + \underbrace{(b + d)}_{\substack{4(5)\\20}} = 45$

$\left.\begin{array}{l} b + d = 20 \\ b - d = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} b = 12 \Rightarrow a = 15 \\ d = 8 \Rightarrow c = 10 \end{array}$

$\therefore$ El mayor término de la proporción es 15

Clave: B

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. La suma de dos números es 3/4 y los 2/3 de sus productos es 1152. Encontrar el mayor de los números.

A) 84 B) 36 C) 49
D) 48 E) 45

2. La suma de 4 números es 250. El primero es al segundo como 3 es a 2, siendo su diferencia 20. La razón geométrica del tercero y el cuarto es 5/7. ¿Cuál es su diferencia?

A) 15 B) 10 C) 25
D) 19 E) N. A.

3. En una reunión hay hombres y mujeres, siendo el número de hombres al número de personas como 3 es a 8 y la diferencia entre los números de hombres y mujeres 24. ¿Cuál será la relación entre hombres y mujeres si se retiran 33 mujeres?

A) 4/3 B) 3/5 C) 2/3
D) 4/5 E) N. A.

4. Para elegir los nuevos dirigentes de un club se presentan dos listas: A y B, 240 socios se hacen presentes para votar. En una votación de sondeo inicial la elección favorece a B en la proporción de 3 a 2, pero en la votación legal ganó A en una proporción de 5 a 3. ¿Cuántos que votaron inicialmente por B cambiaron por A?

A) 24 B) 48 C) 54
D) 72 E) N. A.

5. En una competencia de 1600 m A le ganó a B por 400 metros y B le ganó a C por 100 m. ¿Por cuántos metros le ganó A a C?

A) 500 B) 450 C) 429
D) 475 E) N. A.

6. Un recipiente A contiene 4 litros de agua y 8 litros de vino. Otro recipiente B contiene 6 litros de agua y 9 de vino. Se extraen simultáneamente 3 litros de A y 5 litros de B para intercambiarse luego dichas cantidades extraídas. ¿Cuál es la razón entre la cantidad de vino de A y la de B luego de la operación?

A) 8/9 B) 9/8 C) 2/3
D) 3/2 E) N. A.

7. En una razón geométrica mayor que la unidad, se tiene que la suma de los 2 términos es 65; y si se le suma al menor 17 unidades que se quitaron al mayor la razón original se invierte. Hallar la diferencia de los 2 términos.

A) 21 B) 20 C) 19
D) 18 E) 17

8. En una reunión el número de hombres que bailan es al número de damas que no bailan como 1 a 2, además el número de damas es al número de hombres que no bailan como 3 a 5. Determinar ¿cuántas personas bailan, si en total asistieron 72 personas?

A) 16 B) 24 C) 20 D) 28 E) 30

9. Hace 6 años una pareja de esposos se casaron cuando sus edades estaban en la relación de 13 a 11 y tuvieron su primer hijo hace 4 años, cuando dichas edades estaban en la proporción de 7 a 6. Si su hijo acabará la secundaria cuando este tenga 15 años, ¿qué edad tendría su padre?

A) 39 B) 41 C) 43 D) 45 E) 46

10. De una canasta llena con manzanas se observó que el peso de todas las manzanas es al peso total como 3 a 4; si se vendieron 5 manzanas, la nueva relación es de 2 a 3. ¿Cuántas manzanas quedaron luego de ello, si cada una pesa 60 g?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

11. La relación de 3 números es 7; 5 y 3, calcular la cuarta proporcional de dichos números sabiendo que su cuarta diferencial es 7.

A) 30 B) 15 C) 2/7
D) 13/17 E) N. A.

12. En un recipiente de 30 litros y otro de 74 litros, ¿cuántos litros deben ser transferidos del segundo recipiente al primero de manera que los contenidos se encuentren en la razón de 3:5?

A) 6 B) 7 C) 9
D) 12 E) N. A.

13. En una fábrica, el personal está clasificado en 3 grupos: A, B y C. El personal del grupo A es a B como 2 es a 5, mientras que B es a C como 3 es a 7. Por Navidad son despedidas algunas personas de cada grupo en la relación de 3; 6 y 8, respectivamente, quedando personal en la relación de 60; 171 y 483. ¿Qué fracción del total fue despedido?

A) 1/4 B) 1/7 C) 1/3
D) 2/9 E) 5/7

14. En una reunión de 240 personas por cada 38 hombres, hay 10 mujeres, si por cada 10 personas que beben 6 son hombres y cada persona que bebe consumió 3 botellas de cerveza, si se consumió en total 12 decenas de cervezas, ¿cuántas mujeres no bebieron?

A) 32 B) 38 C) 42 D) 16 E) 34

15. En una discoteca se observa que por cada 8 mujeres había 5 hombres, además el número de mujeres excede al número de hombres en 21. ¿Cuál será la nueva relación de hombres a mujeres si se retiran 14 parejas?

A) 1/2 B) 1/3 C) 1/5
D) 5/7 E) N. A.

16. En una caja se tienen 15 bolas blancas y 12 bolas rojas. ¿Cuántas bolas blancas se deben aumentar para que la relación entre bolas blancas y rojas sea de 3 a 2?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

17. Dos números cuya suma es 90 forman una razón geométrica; si se agrega 10 al menor y se resta 10 al mayor la relación primitiva se invierte, hallar el mayor.

A) 10 B) 50 C) 20 D) 25 E) 30

18. A una fiesta asisten 140 personas entre hombres y mujeres, por cada 3 mujeres hay 4 hombres. Si se retiran 20 parejas, ¿cuál es la razón entre el número de mujeres y el número de hombres que quedan en la fiesta?

A) 1/3 B) 2/3 C) 3/5
D) 4/5 E) 5/6

19. En un corral la relación entre el número de pollos y patos es como 5 es a 3. Si se mueren 1/3 del número de aves, del cual 2/3 eran pollos y el resto patos, ¿cuál será la nueva relación entre los números de pollos y patos?

A) 7/8 B) 17/19 C) 29/19
D) 19/29 E) 8/7

20. El radio de Venus es 90% menos que el radio de Saturno y el diámetro de Mercurio es 5/6 del radio de Venus. Calcular la relación entre el radio de Mercurio y el radio de Saturno.

A) 5/12 B) 1/24 C) 5/24
D) 5/36 E) N. A.

21. Cuando Luis nació, su padre Juan tenía 25 años y cuando nació Ricardo, el hijo de Luis, éste tenía 20 años. Si actualmente, la edad del abuelo es a la del nieto como 4 es a 1, hace cuántos años estas edades eran como 10 es a 1.

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

22. Si Manuel le da a Pedro 10 m de ventaja para una carrera de 100 m y Pedro le da a Carlos una ventaja de 20 m para una carrera de 180 m, ¿cuántos metros de ventaja debe dar Manuel a Carlos para una carrera de 200 m?

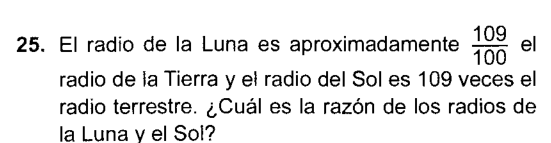
A) 40 B) 30 C) 50 D) 45 E) 55

23. En un ómnibus en el cual viajan 62 caballeros, 42 damas y una cierta cantidad de niños, el cobrador observa que por cada dos caballeros que bajan, baja una dama y suben 4 niños; si cuando llega al paradero final el número de caballeros, damas y niños están en la relación de 4; 3 y 6, ¿cuántos niños había inicialmente?

A) 36 B) 30 C) 66 D) 90 E) 45

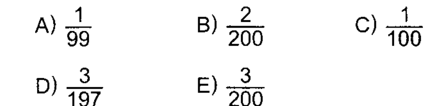
24. Si la razón de la suma con la diferencia de 2 números enteros positivos es 5/3, ¿cuál es el número mayor, si su producto es 64?

A) 4 B) 8 C) 16 D) 32 E) 64



25. El radio de la Luna es aproximadamente $\frac{109}{100}$ el radio de la Tierra y el radio del Sol es 109 veces el radio terrestre. ¿Cuál es la razón de los radios de la Luna y el Sol?

A) $\frac{1}{99}$ B) $\frac{2}{200}$ C) $\frac{1}{100}$



D) $\frac{3}{197}$ E) $\frac{3}{200}$

26. La edad de un padre es tres veces mayor que la de su hijo; si dentro de 10 años la suma de sus edades será 120 años, hallar la edad del padre.

A) 60 B) 70 C) 80
D) 85 E) 90

27. Roberto le da a Enrique 50 m de ventaja en una carrera de 400 m, luego Enrique le da a Jorge 40 m de ventaja en una carrera de 200 m. ¿Cuántos metros le debe dar Roberto a Jorge o Jorge a Roberto en una carrera de 100 m?

A) Roberto, 10 m B) Roberto, 30 m
C) Jorge, 10 m D) Jorge, 30 m
E) Jorge, 40 m

28. Si los dos tercios de la suma de a y b es igual a los ocho tercios de su diferencia, hallar la razón geométrica de a y b.

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{5}{3}$
D) $\frac{7}{4}$ E) $\frac{7}{3}$

29. En una fiesta se observa que en cierto momento, el número de varones que no bailan es al número de personas que están bailando como 7 es a 2 y el número de varones que bailan es al número de damas como 1 es a 4. Hallar cuántas personas no bailan, si en total asistieron 384 personas.

A) 320 B) 420 C) 340
D) 120 E) 160

30. La cantidad de dinero que tiene Aldo es a la que tiene Alonso como 8 es a 11. Si Alonso le da S/.60 a Aldo, entonces ambos tienen la misma cantidad. ¿Cuánto más tiene Alonso que Aldo?

A) S/.120 B) S/.90 C) S/.150
D) S/.180 E) S/.60

31. Si el antecedente de una razón geométrica es la tercera proporcional de a y b y el consecuente es la cuarta proporcional de c; d y e, ¿qué pasa con la razón si a y b se multiplican por 2; y c, d, y e se dividen por 2?

A) Se quintuplica B) Se hace a la mitad
C) Se duplica D) Se triplica
E) Se cuadruplica

32. El producto de los términos diferentes de una proporción geométrica continua es 1728. Calcular la razón de la proporción sabiendo que la suma de los términos extremos es 74.

A) 2 B) 9 C) 7 D) 6 E) 5

33. En una proporción geométrica continua la suma de los extremos es 34 y la diferencia de los mismos es 16. Hallar la media proporcional.

A) 12 B) 15 C) 18
D) 21 E) 13

34. La suma de los extremos de una proporción geométrica continua es 104. Hallar la media proporcional si la razón es 2/3.

A) 42 B) 45 C) 48
D) 52 E) 56

35. Quince es la media proporcional de "a" y 25; "2a" es la tercera proporcional de 8 y "b". ¿Cuál es la cuarta proporcional de "a", "b" y 15?

A) 20 B) 15 C) 7
D) 5 E) N. A.

36. El producto de los extremos de una proporción geométrica es 216, y si uno de los medios es 2/3 de otro, hallar la semisuma de los medios.

A) 15 B) 13 C) 12
D) 16 E) N. A.

37. Si la tercera proporcional de "a" y "b" es la media proporcional también de "a" y "b", luego:

A) $a = b$ B) $b^2 = a$ C) $a^2 = b$
D) $b^2 = a^3$ E) $a^2 = b^3$

38. El producto de los cuatro términos de una proporción geométrica es 11 664 y la diferencia de los medios es 23. Hallar la suma de los medios.

A) 30 B) 31 C) 32
D) 33 E) 34

39. En una proporción geométrica el producto de los antecedentes es 80 y el producto de los consecuentes es 180. Si el producto de los 2 términos de la primera razón es 96, hallar el cuarto término de dicha proporción.

A) 30 B) 24 C) 12 D) 15 E) 18

40. La media proporcional de 28 y 7 es a la tercera proporcional de "a" y 21; como la tercera proporcional de "b" y 10 es a la media proporcional de 18 y 2. Hallar (a/b) sabiendo que el valor de la razón aritmética de "b" y "a" es 4.

A) 0,87 B) 0,31 C) 21/25
D) 25/35 E) N. A.

41. Hallar la tercera proporcional de: la media diferencial y media proporcional de 9 y 25.

A) 17/15 B) 225/17 C) 225/18
D) 15 E) N. A.

42. La media geométrica de "a" y "b" es "c"; la tercera proporcional de "4b" y "2c" es "d". ¿Cuál es la cuarta proporcional de "2a", "b" y "2d"?

A) 2b B) ab C) b
D) 4ac E) c

43. En una proporción geométrica cuya razón es 3/5, se sabe que el producto de los antecedentes es 216 y la suma de los consecuentes es 50. Hallar la diferencia de los antecedentes.

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 15

44. La diferencia entre el mayor y el menor término de una proporción geométrica continua es 25; si el otro término es 30, hallar la suma de los términos, si dichos términos son enteros positivos.

A) 138 B) 125 C) 45
D) 11 E) N. A.

45. Si: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $(a - b)(c - d) = 729$, hallar:

$M = \sqrt{ac} - \sqrt{bd}$.

A) 9 B) 27 C) 81
D) 3 E) 243

46. El producto de los cuatro términos de una proporción geométrica es 50 625. Sabiendo que los medios son iguales y que uno de los extremos es 75, indicar la suma de los 4 términos de la proporción.

A) 180 B) 108 C) 216
D) 156 E) 258

47. En una serie de 3 razones geométricas iguales y continuas, la suma del primer antecedente y el último consecuente es 1274. Hallar la suma de los antecedentes, si la suma de las tres razones es $1\frac{7}{8}$.

A) 1360 B) 1420 C) 1290
D) 960 E) 980

48. La suma, la diferencia y el producto de los cubos de 2 números están en la misma relación que: 9, 7 y 64. ¿Cuál es el mayor de los números?

A) 4 B) 3 C) 8 D) 9 E) 2

49. En la serie: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$, el producto de los antecedentes es 448 y el producto de los consecuentes es 1512. Determinar la suma de los antecedentes sabiendo que: $a+b+c+d+e+f=65$.

A) 42 B) 39 C) 26
D) 50 E) 24

50. Tenemos que: $(x+y+z)(x+y+z)=1681$ y que $\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z}$. Calcular: $N=3(\sqrt{Xx}+\sqrt{Yy}+\sqrt{Zz})$

A) 120 B) 123 C) 126
D) 129 E) 132

51. Si: $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=\frac{D}{d}$ y $\frac{(Ab+Ba+Cd+Dc)}{(Aa+Bb+Cc+Dd)}=7$

además: $a^2+b^2+c^2+d^2=194$; hallar: $ab+cd$

A) 291 B) 388 C) 485
D) 679 E) 873

52. En la serie: $\frac{a_1}{2}=\frac{a_2}{5}=\frac{a_3}{10}=\ldots=k$, se sabe que: $a_4^2-a_3^2=756$, además: $a_{(n-1)}\times a_n=298\ 120$

hallar: a_{n+1}.

A) 472 B) 514 C) 802
D) 650 E) 724

53. Sea: $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}$ y $\frac{A+x}{B+x}=\frac{a+x}{b+x}=5\ \wedge$

$\frac{B+m}{C+m}=\frac{b+m}{c+m}=3$; hallar C, si: $A+B=54$

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15

54. Si: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k\ \wedge\ (a+b)(c+d)(e+f)=2^{21}$;

hallar: $\sqrt[3]{ace}+\sqrt[3]{bdf}$.

A) 128 B) 64 C) 32
D) 16 E) 256

55. Se tienen: $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}\ \wedge\ \frac{a^3-b^3}{b^3-c^3}=8$

hallar: $S=\frac{ab+bc+cd}{(a+b+c)(b+c+d)}$

A) $\frac{7}{3}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{3}{5}$
D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{5}{2}$

56. En una serie de 4 razones geométricas iguales y continuas, la suma de los extremos es 68. Hallar la suma de los antecedentes, si el valor de la razón es entero y distinto de la unidad.

A) 120 B) 130 C) 80
D) 240 E) 200

57. Si: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{25}{9}\ \wedge\ \begin{matrix}\sqrt{b}+\sqrt{d}=15\\ \sqrt{b}-\sqrt{d}=3\end{matrix}$

hallar: $a+\sqrt{a}+c+\sqrt{c}$

A) 280 B) 350 C) 120
D) 180 E) 150

58. Al observar 3 grupos de panes en cantidades proporcionales a 6; 7 y 11 se desea que todos los grupos tengan la misma cantidad de panes, por lo que se saca 12 del grupo que tiene más panes para distribuirlo en los otros dos. ¿Cuántos panes más se pasan al primer grupo con respecto a los que se pasan al segundo?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 3 E) 2

59. Si: $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}$, se cumple que: $A+B+C=64$

y $\frac{AB+BC+AC}{ab+bc+ac}=1024$, hallar: $a+b+c$

A) 5 B) 2 C) 7 D) 6 E) 8

60. El contenido en litros de 3 cilindros A, B y C son proporcionales a 7; 11 y 15, respectivamente. Luego cada vez que se adiciona 3 litros a C, se saca 2 litros de B para echarlo a A. Se hace esta operación hasta que el volumen de C sea 3 veces más que el de B. ¿Cuál será la relación entre el volumen final de C y el volumen final de A?

A) 27/31 B) 21/23 C) 23/15
D) 28/15 E) N. A.

61. Si: $\frac{32}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{4}=\frac{4}{e}$, hallar "e":

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

62. Si se cumple que: $\frac{ab}{15}=\frac{cd}{77}=\frac{ac}{21}$; además: $a+b+c=196$, calcular: $(d-a)b$

A) 1440 B) 720 C) 1200
D) 1500 E) 1720

63. Se tiene la serie: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$

Además: $\frac{a}{b}+\frac{c^2+e^2}{d^2+f^2}=12$. Hallar: $P=\frac{a-2c+3e}{b-2d+3f}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

64. En la serie de razones equivalentes: $\left(\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}\right)$ de constante entera mayor que 2. Calcular:

$E=\sqrt{\frac{ab^2+ade+ef^2}{b^3+bcf+f^3}}$. Además: $a+c^2=52$

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) 2 D) 4 E) 8

65. Si: $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=\frac{D}{d}=k$

además: $\frac{4a}{a}+\frac{3B}{b}+\frac{2C}{c}+\frac{D}{d}=30$

calcular: $E=\frac{Aa+Bb+Cc+Dd}{a^2+b^2+c^2+d^2}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

66. Si: $\frac{p}{a}=\frac{q}{b}=\frac{r}{c}$; $q=4p$; $r=5p$, determinar el valor de: $E=\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}$

A) 0,42 B) 0,21 C) 2,34
D) 2,39 E) 4,2

67. Si: $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}\wedge(A+B+C)(a+b+c)=12\,100$

hallar: $Aa+Bb+Cc+2(\sqrt{ABab}+\sqrt{ACac}+\sqrt{BCbc})$

Dar la suma de las cifras.

A) 9 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

68. La suma de tres números tomados dos a dos son proporcionales a los números 7; 9 y 12. Uno de los números es proporcional a:

A) 1 B) 7 C) 4 D) 3 E) 6

69. En una serie de cuatro razones geométricas iguales y continuas, se cumple que la suma de la diferencia del primer y tercer antecedente y el doble de la diferencia del segundo y el cuarto antecedente es 840, hallar el máximo valor que puede tomar el primer consecuente si la constante de proporcionalidad es un número entero.

A) 189 B) 125 C) 280
D) 150 E) 120

70. Sabiendo que: $\frac{90+p}{90-p}=\frac{108+q}{108-q}=\frac{144+r}{144-r}=k$

y además: $p+q+r+38=k(k+1)$; hallar "q".

A) 128 B) 80 C) 96
D) 72 E) 40

71. Si la suma de antecedentes y consecuentes de la siguiente serie: $\frac{3}{a}=\frac{b}{4}=\frac{5}{c}=\frac{d}{6}=\frac{7}{e}$ es 48 y 36, respectivamente, hallar: $[(b+d)-(a+c)]e$

A) $\frac{77}{3}$ B) $\frac{55}{3}$ C) $\frac{55}{4}$
D) $\frac{44}{3}$ E) $\frac{77}{2}$

72. Si: $\frac{a+2b}{a-b}=\frac{b+2x}{b-x}=\frac{x+2y}{x-y}$ y $\frac{a^2+by+xy}{ab+xy+y^2}+\frac{a}{y}=10$

calcular: $E=\frac{a^3}{b^3}+\frac{a}{y}+\frac{x^3}{y^3}$

A) 24 B) 18 C) 12
D) 16 E) N. A.

73. Si la suma de los antecedentes de una serie de 3 razones geométricas iguales es los 2/3 de la suma de los consecuentes, ¿cuál es el producto de los antecedentes, si el producto de los consecuentes es 24 300?

A) 10 800 B) 7200 C) 6000
D) 4800 E) 3600

74. Se tiene la siguiente serie: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$

Además: $\frac{a^2\times d^2\times e^2}{b^2\times c^2\times f^2}+\frac{a^2+c^2+e^2}{b^2+d^2+f^2}=32$

hallar: $N=\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{c}{d}}+\sqrt{\frac{e}{f}}$

A) 3 B) 4 C) 6 D) 8 E) 12

75. Hallar cuatro números proporcionales a 1; 2; 3 y 5, sabiendo que la suma de los cubos de los números buscados es 1288. El número que no se busca es:

A) 2 B) 5 C) 4
D) 6 E) 10

76. Sabiendo que se cumple: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{3}=\frac{24}{f}$

donde: $ef+ad=462$; $e+f+bc=412$

Hallar el valor de la constante de proporcionalidad, si es el menor posible.

A) 2/3 B) 4/3 C) 5/3
D) 2 E) N. A.

77. Los cuadrados de $\frac{1}{2};\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{8}$ son proporcionales a otros tres números que suman $\frac{147}{176}$. Hallar uno de dichos números.

A) $\frac{7}{176}$ B) $\frac{5}{44}$ C) $\frac{7}{18}$
D) $\frac{8}{21}$ E) $\frac{8}{41}$

78. Si: $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}\wedge(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=4900$

hallar: $R=3(ab+bc+cd)$.

A) 170 B) 180 C) 190
D) 200 E) 210

79. Si: $\frac{10+a}{10-b}=\frac{11+b}{11-b}=\frac{100+c}{100-c}=r\ (r>1)\ \wedge$

$a+b+c+1=r^2$, hallar: $r-1$

A) 10 B) 0 C) −13
D) 9 E) 11

80. Si: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k^2\wedge bde=\frac{R^2}{k^2}(R>0)$

hallar: $\sqrt{acf}$

A) 1　　B) $\frac{R}{k}$　　C) $\frac{k}{R}$
D) k　　E) R

81. Si: $\frac{32}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{4}=\frac{4}{r}$, hallar: r + c).

A) 12　　B) 10　　C) 8
D) 14　　E) 20

82. De la siguiente serie: $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e}$
Además: ad + bc = 1944, 2be − dc = 108
hallar la suma de antecedentes:

A) 180　　B) 200　　C) 220
D) 240　　E) 260

83. Si: $\frac{a}{b}=\frac{a+c}{n}=\frac{b}{c}$ ∧ n − c = 39, hallar: n − b

A) 13　　B) 20　　C) 25
D) 30　　E) 40

84. Hallar: a + b, si: $\frac{a^2+b^3}{182}=\frac{a^2+b^2}{25}=\frac{a^2-b^2}{7}$

A) 12　　B) 14　　C) 16
D) 18　　E) 20

85. En una serie de 3 razones geométricas equivalentes, la suma de los antecedentes es 24 y de los consecuentes es 16. El producto de los dos primeros antecedentes es 45 y el tercer consecuente es 4. Hallar el mayor de los consecuentes.

A) 6　　B) 8　　C) 10
D) 12　　E) 14

86. El valor de una razón de una proporción geométrica es 5/9. Si el producto de los antecedentes es 1800 y la suma de los consecuentes es 162, hallar la diferencia de los antecedentes.

A) 28　　B) 30　　C) 32
D) 34　　E) 36

87. Se tiene cinco razones geométricas iguales y continuas. Si la suma de las tres últimas es 9 y la suma de los extremos es 488, hallar el tercer consecuente.

A) 33　　B) 27　　C) 54
D) 72　　E) 45

88. Si: $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{p}$ = k; abc = 1536 ∧
bmp + anp + cmn = 7200, hallar el valor de k.

A) 0,10　　B) 0,6　　C) 0,7
D) 0,8　　E) 0,5

89. Si: $\frac{m}{a}=\frac{n}{b}=\frac{p}{c}$ ∧ $\frac{30m+40n+60p}{15a+20b+30c}=\frac{1}{3}$
hallar: $\frac{a^4+b^4}{m^4+n^4}$

A) 81　　B) 256　　C) 1296
D) 729　　E) 512

90. Dada la serie: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$ y además:
b + d + e + g = 67
a + c + f + h = 43
a + c + e + g = 88
hallar: a + b + c + d.

A) 34　　B) 35　　C) 36
D) 38　　E) 40

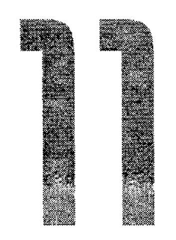
91. Hallar el término central "p" de una proporción geométrica continua cuyos extremos son "m" y "n" en la cual se cumple: $\frac{m^2+p^2+n^2}{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{p^2}}=1296$

A) 5　　B) 6　　C) 7
D) 12　　E) 36

CLAVES

1. D	13. C	25. C	37. A	49. A	61. D	73. A	85. B
2. C	14. A	26. C	38. A	50. C	62. A	74. B	86. C
3. A	15. E	27. C	39. B	51. B	63. B	75. C	87. B
4. C	16. A	28. B	40. D	52. D	64. C	76. B	88. C
5. D	17. A	29. C	41. C	53. D	65. C	77. B	89. D
6. B	18. B	30. A	42. B	54. A	66. C	78. A	90. C
7. D	19. B	31. A	43. C	55. A	67. A	79. E	91. B
8. E	20. C	32. E	44. B	56. B	68. E	80. D	
9. A	21. B	33. D	45. B	57. A	69. B	81. E	
10. C	22. A	34. B	46. B	58. B	70. C	82. B	
11. A	23. A	35. C	47. B	59. A	71. C	83. C	
12. B	24. B	36. A	48. C	60. B	72. E	84. A	

Proporcionalidad



Luca Pacioli (Umbría, 1445-Roma, 1517) fue un fraile franciscano, matemático precursor del cálculo de probabilidades y economista italiano, cuyo nombre completo era Fray Luca Bartolomeo de Pacioli o Luca di Borgo San Sepolcro. Su apellido también aparece escrito como Paccioli y Paciolo.

Su obra más divulgada e influyente es *De Divina Proportione* (De la divina proporción) término relativo a la razón o proporción ligada al denominado número áureo, escrita en Milán entre 1496 y 1498, y que trata también, en su primera parte, de los polígonos y la perspectiva. Para ilustrarlo encargó dibujos a Leonardo da Vinci, que en la época formaba parte de la corte milanesa de Ludovico Sforza (il Moro).

Entre 1477 y 1480 enseñó en la Universidad de Perugia, escribiendo a tal efecto el Tractator mathematicus ad discipulos perusinos. Entre otras obras, escribió también *De viribus quantitatis*, sobre matemáticas y magia (1496-1508), una traducción de los *Elementos* de Euclides (Geometría, Venecia, 1509) y un manual de ajedrez *(De ludo scacchorum)*.

Fuente: Wikipedia

DEFINICIÓN

La proporcionalidad es parte de la Aritmética que se encarga de estudiar el comportamiento de las magnitudes, cuando éstas varían.

Una magnitud, es aquella que sea susceptible a ser medida y expresada mediante números concretos (cantidad y unidades).

Algunas magnitudes que pueden citarse son: tiempo, temperatura, velocidad, espacio, número de obreros, dificultad, etc.

Al comparar dos magnitudes éstas pueden ser: Directa o Inversamente proporcionales.

MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES (DP)

Se dice que dos magnitudes son DP cuando al aumentar o al disminuir una de ellas, la otra magnitud aumenta o disminuye respectivamente.

Si dos magnitudes son DP se cumple que su cociente es una constante, llamada constante de proporcionalidad.

Sean las magnitudes A y B, tales que son DP:

Notación: $A \alpha B$

Se lee: "A es DP a B" o "A es proporcional a B"

Se cumple: $\boxed{\frac{A}{B} = \text{cte.}}$

Ejemplo:

Si un móvil se desplaza a la velocidad constante de 40 m/s. Construir una tabla de valores, e interpretarlo mediante un gráfico.

Resolución:

Haciendo una tabla de valores:

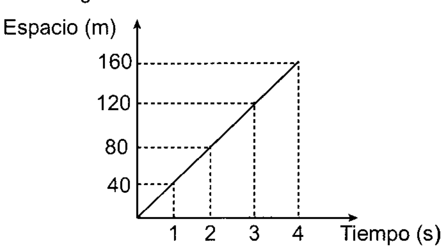
Espacio (m)	40	80	120	160	200	...↑
Tiempo (s)	1	2	3	4	5	...↑

Se deduce que, a medida que el tiempo aumenta, la distancia recorrida también aumenta.

Entonces, el espacio es DP al tiempo: $\frac{\text{espacio}}{\text{tiempo}} = \text{cte.}$

Es decir: $\frac{40}{1} = \frac{80}{2} = \frac{120}{3} = \frac{160}{4} = ... = 40$

Haciendo un gráfico:



- La gráfica de dos magnitudes que son DP siempre es creciente.

MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES (IP)

Se dice que dos magnitudes son IP cuando al aumentar o al disminuir una de ellas, la otra disminuye o aumenta respectivamente.

Si dos magnitudes son IP se cumple que su producto es constante.

Sean las magnitudes A y B tales que son IP:

Notación: $A \, 1/\alpha \, B$

Se lee: "A es IP a B"

Se cumple: $\boxed{A \times B = \text{cte.}}$

Ejemplo:

Un móvil desea recorrer una distancia de 24 km. Construir una tabla de valores, e interpretarlos mediante un gráfico.

Resolución:

Haciendo una tabla de valores:

Velocidad (km/h)	1	2	3	4	6	...↑
Tiempo (h)	24	12	8	6	4	...↓

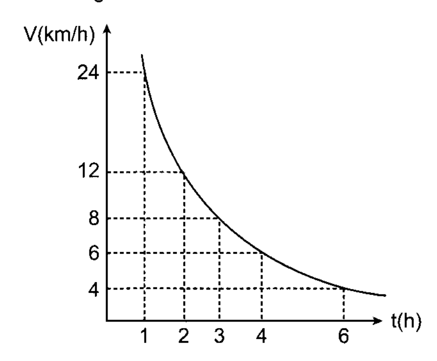
Vemos que, a medida que la velocidad aumenta, el tiempo disminuye.

En consecuencia: velocidad IP tiempo

Se cumple: velocidad × tiempo = cte

Es decir: $1(24) = 2(12) = 3(8) = 4(6) = ... = \text{cte.}$

Haciendo un gráfico:



La gráfica de dos magnitudes que son IP siempre es decreciente.

Propiedades

1. Dadas las magnitudes: A; B y C; si: $A \alpha B \wedge B \alpha C$, entonces se cumple: $A \alpha C$.
2. Si dos magnitudes son IP, entonces una de ellas será DP con la inversa de la otra.

   Si A IP B, entonces: $A \alpha \frac{1}{B}$ o $B \alpha \frac{1}{A}$

PROPORCIONALIDAD COMPUESTA

Sean las magnitudes A, B y C

Si: $A \alpha B$ (cuando C es constante) y
$A \alpha C$ (cuando B es constante)

Se cumple: $A \alpha B \times C$, es decir: $\boxed{\frac{A}{B \times C} = \text{cte.}}$

OPERACIONES BÁSICAS CON MAGNITUDES PROPORCIONALES

A continuación se presentan con ejemplos las operaciones que se pueden hacer con las magnitudes.

Ejemplos:

1. Si, la magnitud A es DP a $\sqrt{B}$

Resolución:

Tenemos: $A \alpha \sqrt{B}$

Al cuadrado: $A^2 \alpha B$

La proporcionalidad no cambia, siguen siendo DP.

2. Si, $\sqrt[3]{A}$ es IP a B

Resolución:

Tenemos: $\sqrt[3]{A}$ IP B

Elevando al cubo: A IP B^3

La proporcionalidad no cambia, siguen siendo IP.

3. Se tiene que: A DP a $\sqrt{B}$ $\wedge$ B DP a C^3.
¿Cómo se relacionan A y C?

Resolución:

De: $A \alpha \sqrt{B}$, elevando al cuadrado: $A^2 \alpha B$ ...(1)

Pero: $B \alpha C^3$ ...(2)

De (1) y (2): Se deduce que: $A^2 \alpha C^3$.

PROBLEMAS RESUELTOS

1 Según la ley de Boyle, la presión es IP al volumen que contiene determinada cantidad de gas. ¿A qué presión está sometido un gas, si al aumentar esta presión en 2 atmósferas el volumen varía en un 40%?

Resolución:

Sean: P: presión; V: Volumen

Por dato: P IP V $\Rightarrow P \times V = \text{cte.}$

$P_1 = P$; $P_2 = P + 2$;

$V_1 = V$; $V_2 = V - 40\%V = 60\%V = 6V/10$

Reemplazando:

$P \times V = (P + 2)(6V/10) \Rightarrow P = 3$ atm

∴ La presión es 3 atmósferas

2. Se tienen 2 magnitudes A y B que son IP. Cuando A aumenta 6 unidades, B varía en 20%. ¿Cómo varía B, cuando A disminuye en 4 unidades?

Resolución:

Como: A IP B $\Rightarrow A \times B = \text{cte.}$

Tenemos: $A_1 = a$; $A_2 = a + 6$

$B_1 = b$; $B_2 = b - 20\%b = 80\%b = \frac{4}{5}b$

Reemplazando: $(a)(b) = (a + 6)(4b/5) \Rightarrow a = 24$

Hallamos la variación de B, cuando A disminuye 4 unidades:

$24(b) = 20(x) \Rightarrow x = \frac{24}{20}b$

En porcentaje: $x = 120\%b$ ∴ B aumenta 20%

3. Dos personas tienen concedidas pensiones en razón directa a la raíz cuadrada del número de años de servicio. El servicio de la primera excede al de la segunda en $4\frac{1}{4}$ años y las pensiones están en la relación de 9 a 8. ¿Cuántos años ha servido la segunda?

Resolución:

Sea: P: pensión ;

A: número de años $\Rightarrow \frac{P}{\sqrt{A}} = \text{cte.}$

Por datos:

$P_1 = 9$; $P_2 = 8$; $A_1 = a + \frac{17}{4}$; $A_2 = a$

Reemplazando: $\frac{9}{\sqrt{a + \frac{17}{4}}} = \frac{8}{\sqrt{a}}$

Luego: $\frac{a}{a + \frac{17}{4}} = \frac{64}{81} \Rightarrow a = 16$

∴ La segunda ha servido 16 años

4. Los saltos de mamá canguro son proporcionales a los de su hijo. Cuando hijo canguro da 398 saltos, mamá da 995. ¿Cuántos saltos dará la mamá cuando el hijo recorra 600 m y además un salto de éste equivalen a $\frac{3}{4}$ m?

Resolución:

Sean: Sm: saltos de mamá canguro
Sh: saltos de hijo canguro

Del enunciado: $\frac{Sm}{Sh} = \text{cte.}$

Se tiene: $Sm_1 = 995$; $Sm_2 = ?$

$Sh_1 = 398$; $Sh_2 = 600\left(\frac{4}{3}\right) = 800$

Reemplazando:

$\frac{995}{398} = \frac{Sm_2}{800}$ ∴ $Sm_2 = 2000$ saltos.

5. La capacidad de un condensador es DP a su longitud "L" e IP a su sección "A". ¿Qué sucede con

la capacidad si "L" se hace la tercera parte y "A" la sexta parte?

Resolución:

Sean: C: capacidad del condensador;
L: longitud; A: sección

Por dato: $\dfrac{C \times A}{L} = \text{cte.}$

Tenemos: $C_1 = c$; $C_2 = x$; $A_1 = a$;
$A_2 = a/6$; $L_1 = l$; $L_2 = l/3$

Reemplazando: $\dfrac{c(a)}{l} = \dfrac{x(a/6)}{l/3} \Rightarrow x = 2c$

$\therefore$ Se duplica la capacidad.

6. La elongación de un resorte es DP al peso aplicado. Si cuando el peso aumenta 7,5 kg la elongación varía en 25%, ¿cómo varía el peso, cuando la elongación disminuye en un 20% de su valor inicial?

Resolución:

L: elongación de un resorte; W: peso aplicado

Por dato: $\dfrac{L}{W} = \text{cte.}$

Se tiene: $L_1 = L$; $L_2 = L + 25\%L = \dfrac{5}{4}L$;
$W_1 = W$; $W_2 = W + 7{,}5$

Reemplazando: $\dfrac{L}{W} = \dfrac{\frac{5}{4}L}{W + 7{,}5} \Rightarrow W = 30\ \text{kg}$

Hallamos el peso, cuando L disminuye 20%:

$L_3 = L - 20\%L = \dfrac{4}{5}L \Rightarrow W_3 = ?$

Reemplazando: $\dfrac{L}{30} = \dfrac{\frac{4}{5}L}{W_3} \Rightarrow W_3 = 24\ \text{kg}$

$\therefore$ El peso disminuye 6 kg

7. El precio de los diamantes varía proporcionalmente con el cuadrado de su peso, si un diamante que se compró en S/.3200, se divide en 2 partes que son entre sí como 3 es a 5, ¿cuál sería su pérdida?

Resolución:

Sea: P: precio del diamante; W: peso del diamante

Por dato: $\dfrac{P}{W^2} = \text{cte}$

$P = 3200$;
$W_1 = 3$; $W_2 = 5$; $W = 3 + 5 = 8$

Reemplazando: $\dfrac{P_1}{3^2} = \dfrac{P_2}{5^2} = \dfrac{3200}{8^2} = 50$

Hallamos el precio de los diamantes:

$P_1 = 9(50) =$ S/.450; $P_2 = 25(50) =$ S/.1250

$\Rightarrow P_1 + P_2 =$ S/.1700

$\therefore$ Se pierde: $3200 - 1700 =$ S/.1500

8. El costo de un metal "A" es proporcional a su peso y el costo de una piedra preciosa es proporcional al cuadrado de su peso. Dos anillos de 30 g cada uno poseen 2 g y 3 g de piedra preciosa y el resto de metal "A". Si sus precios son de \$480 y \$720, respectivamente, hallar el precio de otro anillo de 20 g que posee una piedra preciosa de 5 g.

Resolución:

Del metal A: $\dfrac{\text{Costo}(C_A)}{\text{Peso}(P_A)} = \text{cte.}$ ...(α)

De la piedra preciosa: $\dfrac{\text{Costo}(Cp)}{\text{Peso}^2(Pp^2)} = \text{cte.}$ ...(β)

De los anillos:

Peso / Anillo	Piedra preciosa (g)	Metal A (g)	Peso total (g)
1.°	2	28	30
2.°	3	27	30

Reemplazando:

$\dfrac{C_{A_1}}{28} = \dfrac{C_{A_2}}{27} = k_1 \begin{cases} C_{A_1} = 28k_1 \\ C_{A_2} = 27k_1 \end{cases}$; $\dfrac{C_{P_1}}{2^2} = \dfrac{C_{P_2}}{3^2} = k_2 \begin{cases} C_{P_1} = 4k \\ C_{P_2} = 9k \end{cases}$

Precio de los anillos:

1.^{er} anillo: $28k_1 + 4k_2 = 480$ ...(1)

2.° anillo: $27k_1 + 9k_2 = 720$ ...(2)

De (1) y (2): $k_1 = 10$; $k_2 = 50$

Para el 3.^{er} anillo:

$20\ \text{g} \begin{cases} Pp_3 = 5\ \text{g} \Rightarrow C_{P_3} = 50(5)^2 = \$1250 \\ Pa_3 = 15\ \text{g} \Rightarrow C_{A_3} = 15(10) = \$150 \end{cases}$

$\therefore$ Costo del 3.^{er} anillo: $1250 + 150 = \$1400$

9. La velocidad del sonido en el aire es DP a la raíz cuadrada de la temperatura absoluta. Si a 16 °C la velocidad del sonido en el aire es 340 m/s, ¿cuál será la velocidad del sonido en el aire cuando la temperatura sea 88 °C?

Resolución:

Sea: V: velocidad del sonido en el aire;
T: temperatura absoluta (K)

Por dato: $\dfrac{V}{\sqrt{T}} = \text{cte.}$

Se tiene: $V_1 = 340$ m/s; $V_2 = ?$
$T_1 = 16\,°\text{C} <> 289\,\text{K}$; $T_2 = 88\,°\text{C} <> 361\,\text{K}$

Reemplazando:

$\dfrac{340}{\sqrt{289}} = \dfrac{V_2}{\sqrt{361}} \Rightarrow V_2 = \dfrac{340(19)}{17}$ $\therefore V_2 = 380$ m/s

10. El incremento anual de la población de una ciudad es DP a la población existente al comienzo del año. Si al comenzar el año 2003, la población era de 400 000 habitantes y al comenzar el año 2004 era 420 000 habitantes. ¿Cuál será la población al terminar el año 2005?

Resolución:

Sean:

P_o: población al inicio del año

P_f: población al inicio del nuevo año
$P_f - P_o$ = incremento de la población

Tenemos:
$P_o(2003) = 400\,000$
$P_f(2004) = 420\,000$ } Incremento = 20 000
$P_f(2005) = ?$

Reemplazando:

$$\frac{20\,000}{420\,000} = \frac{P_f(2005) - 420\,000}{P_f(2005)} \Rightarrow P_f(2005) = 441\,000$$

∴ Al terminar el año 2005: 441 000 habitantes

11. El precio de un terreno de forma cuadrada varia en forma DP con su área e IP con la distancia que lo separa de Lima. Si cuando el perímetro del terreno es "q" y está separada "d" km de Lima su precio es "p", ¿cuánto costará un terreno, cuyo perímetro es el cuádruple del anterior y está a "d/2" km de Lima?

Resolución:

Sean: P: precio del terreno; A: área del terreno
D: distancia que lo separa de Lima

Del enunciado: $\frac{P \times D}{A}$ = cte.

Tenemos:
1.^{er} terreno: $A_1 = (q/4)^2 = q^2/16$; $D_1 = d$; $P_1 = p$
2.° terreno: $A_2 = q^2$; $D_2 = d/2$; $P_2 = ?$

Reemplazando:

$$\frac{p \times d}{\frac{q^2}{16}} = \frac{P_2 \times \frac{d}{2}}{q^2} \Rightarrow P_2 = 32p \Rightarrow P_2 = 32p$$

∴ El terreno costará 32p

12. El número de "m²" que tiene una hacienda es proporcional al número de vacas que existen en ella. Si el número de m² que son para la alimentación es proporcional a la diferencia entre el número de m² que tiene la hacienda y el número de vacas que hay. Hallar cuántos m² para la alimentación habría en una hacienda que tiene 1500 m² y 500 vacas, si para 200 vacas hay 450 m² para la alimentación?

Resolución:

Sean: A: número de m² de la hacienda
A*: número de m² para la alimentación
V: número de vacas

Por datos:

$$\frac{A}{V} = k_1 \quad ...(1); \qquad \frac{A^*}{A - V} = k_2 \quad ...(2)$$

Tenemos: $A_1 = 1500$ m²; $V_1 = 500$; $A_1^* = ?$;
$A_2 = ?$; $V_2 = 200$; $A_2^* = 450$ m²

En (1): $\frac{1500}{500} = \frac{A_2}{200} \Rightarrow 600$ m²

En (2): $\frac{A_1^*}{1500 - 500} = \frac{450}{600 - 200} \Rightarrow A_1^* = 1125$ m²

∴ Son 1125 m² para la alimentación

13. Dos cilindros tienen el mismo diámetro y el mismo peso, pero sus densidades son 7,8 y 0,48. Calcular la altura h del segundo cilindro, si la del primero (el de mayor densidad) es 20 cm.

Resolución:

Sean: d: densidad; V: volumen
Sabemos que: V × d = cte.
Luego: $d_1 \times V_1 = d_2 \times V_2$

Reemplazando: $7{,}8\pi\left(\frac{d^2}{4}\right)(20) = 0{,}48\pi\left(\frac{d^2}{4}\right)(h)$

∴ h = 325 cm

14. El costo unitario de un libro es IP al número de ejemplares editados. Si una primera tirada se vende por S/.35 640, ganando el 10%, ¿cuál será el costo de cada libro en una segunda tirada de 1800 ejemplares?

Resolución:

Sea: P: precio unitario de un libro
N: número de ejemplares

Por dato: P × N = cte.
1.^{er} tiraje:
El costo total: $\frac{35\,640}{110\%}$ = S/.32 400

2.° tiraje:
Precio = ?; N = 1800
Luego: 32 400 = P × 1800 ⇒ P = S/.18

∴ El libro costará S/.18

15. En un proceso de producción se observa que dicha producción es DP al número de máquinas e IP a la raíz cuadrada de la antigüedad de ellas. Inicialmente había 15 máquinas con 9 años de uso; si se consiguen 8 máquinas más con 4 años de uso cada una, determinar la relación entre la producción actual con la anterior.

Resolución:

Sean: P: producción; N: número de máquinas;
A: antigüedad de las máquinas

Del enunciado: $\frac{P\sqrt{A}}{N}$ = cte. ...(1)

Inicialmente: $P = P_1$; N = 15; A = 9
Al final: $P = P_2$; N = 8; A = 4

En (1): $\frac{P_1\sqrt{9}}{15} = \frac{P_2\sqrt{4}}{8} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{5}{4}$

$$\therefore \frac{\text{Nueva producción}}{\text{Producción anterior}} = \frac{P_1 + P_2}{P_2} = \frac{9}{4}$$

16. La duración de un viaje por ferrocarril es DP a la distancia e IP a la velocidad. A su vez, la veloci-

dad es IP al número de vagones del tren. Si un tren de 20 vagones recorre 30 km en 30 minutos, ¿qué distancia, puede recorrer un tren de 10 vagones en 1/6 de hora?

Resolución:

Tenemos: T: duración del viaje; D: distancia; V: velocidad; N: número de vagones

Por dato: $\frac{T \times V}{D} = k_1$ ...(1)

$V \times N = k_2$ ...(2)

(2) en (1): $\frac{T}{D \times N} = \text{cte.}$ ...(3)

Inicialmente: $N_1 = 20$; $D_1 = 30$ km; $T = 30$ min

Al final: $N_2 = 10$; $T_2 = h/6 = 10$ min; $D_2 = ?$

En (3): $\frac{30}{30 \times 20} = \frac{10}{D_2 \times 10}$ $\therefore D_2 = 20$ km

17. Se sabe que X es DP con el cuadrado de P y con el cubo de V, e IP con la raíz cuadrada de Z. A base de esta información que se da en el siguiente cuadro, calcular A + B.

X	A	108	324
P	5	2	4
V	2	3	B
Z	25	9	16

Resolución:

Del enunciado $\frac{X\sqrt{Z}}{P^2V^3} = \text{cte.}$

Reemplazando: $\frac{A\sqrt{25}}{5^2 \times 2^3} = \frac{108\sqrt{9}}{2^2 \times 3^3} = \frac{324\sqrt{16}}{4^2B^3}$

Reduciendo: $\frac{A}{40} = 3 = \frac{81}{B^3} \Rightarrow A = 120;\ B = 3$

$\therefore A + B = 123$

18. Se sabe que: $A \,\alpha\, B^2$ (cuando C = cte.)

$C \,\alpha\, \sqrt{A}$ (cuando B = cte.)

Además:

A	36	n
B	2	1/3
C	3	1/2

Hallar el valor de "n".

Resolución:

De: $C \,\alpha\, \sqrt{A} \Rightarrow C^2 \,\alpha\, (\sqrt{A})^2$

Luego: $A \,\alpha\, C^2$ (cuando B = cte.)

También: $A \,\alpha\, B^2$ (cuando A = cte.)

$\Rightarrow A \,\alpha\, B^2 \times C^2 \Rightarrow \frac{A}{B^2 \times C^2} = \text{cte.}$

Reemplazamos los valores de la tabla:

$\frac{36}{2^2 \times 3^2} = \frac{n}{\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2} = (9)(4)(n) \Rightarrow n = 1/36$

$\therefore$ El valor de "n" = 1/36

19. Dos kilogramos de sal que se introducen en un recipiente de 50 litros de agua, en los dos primeros minutos la concentración de la mezcla disuelta es 16 g/l. ¿Cuántos gramos quedarán después de 2 minutos más, si la cantidad de sal que no se disuelve es inversamente proporcional al cuadrado del tiempo en minutos?

Resolución:

Cantidad inicial de sal: 2 kg ≡ 2000 g

Sea "x" la cantidad de sal (en gramos) disuelta en los dos primeros minutos:

Concentración: $\frac{\text{cantidad de sal no disuelta}}{\text{cantidad de agua}} = 16$

$\frac{2000 - x}{50} = 16 \Rightarrow x = 1200$ g

Pero: (C. de sal no disuelta) IP $(\text{Tiempo})^2$

$\Rightarrow$ (C. de sal no disuelta)$(\text{Tiempo})^2$ = cte.

$\underbrace{800 \times 2^2}_{\text{2 primeros min.}} = \underbrace{P \times 4^2}_{\text{2 sgtes. min.}} \Rightarrow P = 200$ (no disuelta)

$\therefore$ No se disolvieron 200 g

20. A varía como la suma de 2 cantidades de las cuales una varía como B y la otra inversamente a B^2. Si A es 19 cuando B es 2 o 3, hallar A cuando B es 6.

Resolución:

Sea: P DP B $\Rightarrow P = Bk_1$;

Por dato: Q IP $B^2 \Rightarrow Q = \frac{k_2}{B^2} \Rightarrow A = P + Q$

Reemplazando: $A = k_1B + \frac{k_2}{B_2}$ ...(1)

Además: $A = 19$; $B = 2$ ∨ $A = 19$; $B = 3$

En (1): $19 = 2k_1 + \frac{k_2}{4}$ ...(2)

$19 = 3k_1 + \frac{k_2}{9}$ ...(3)

De (1) y (2): $k_1 = 5$; $k_2 = 36$

En (1): $A = 5B + \frac{36}{B^2}$

Hallamos A, cuando B = 6:

$A = 5(6) + \frac{36}{(6)^2} = 31$ $\therefore A = 31$

21. En un edificio, el volumen de agua que llega a cierto piso es IP a "t^n", donde "t" es el tiempo que demora en llegar el agua al piso "n". Si cuando lleva 80 litros al segundo piso, la demora es 4 min, ¿que tiempo demorará en llegar 5 litros de agua al cuarto piso?

Resolución:

V: volumen en litros.; t: tiempo en min

Por dato: V IP $t^n \Rightarrow V \times t^n = \text{cte.}$

Tenemos: $V_1 = 80$ L; $V_2 = 5$ L; $t_1 = 4$ min;

$t_2 = ?$; $n = 2$; $n = 4$

Reemplazando: $80 \times 4^2 = 5 \times t^4 \Rightarrow t = 4$

$\therefore$ Demorará 4 min.

22. Se sabe que "A" es IP con "B" y que "B" es IP con "C". Si cuando "A" aumenta 15 unidades, "C" varía en 20%, ¿qué pasa con "B", cuando "A" aumenta en 25 unidades?

Resolución:

Del enunciado:

$A \times B = k_1$ ....(1)

$B \times C = k_2$ ....(2)

$(1) \div (2)$: $\frac{AB}{BC} = \frac{k_1}{k_2} \Rightarrow \frac{A}{C} = k_3$ ...(3)

Hallamos el valor inicial de "A":

$A_1 = a$; $A_2 = a + 15$;

$C_1 = c$; $C_2 = c + 20\%c = 120\%c = \frac{6}{5}c$

En (3): $\frac{a}{c} = \frac{a+15}{\frac{6c}{5}} \Rightarrow 6a = 5a + 75 \Rightarrow a = 75$

Hallamos el valor final de "B":

$A_1 = 75$; $A_2 = 75 + 25 = 100$; $B_1 = b$; $B_2 = ?$

En (1):

$75b = 100B_2 \Rightarrow B_2 = \frac{75}{100}b = 75\%b$

$\therefore$ B disminuye 25%

23. La eficiencia se mide en puntos y es DP a los años de servicio e IP a la raíz cuadrada de la edad del trabajador. Se sabe que la eficiencia de Juan es de 2 puntos cuando tiene un año de servicio y 25 años de edad. ¿Cuál será la eficiencia a los 36 años?

Resolución:

Sea: E: eficiencia; A: años de servicio; e: edad

Por dato: $\frac{E\sqrt{e}}{A} = \text{cte.}$

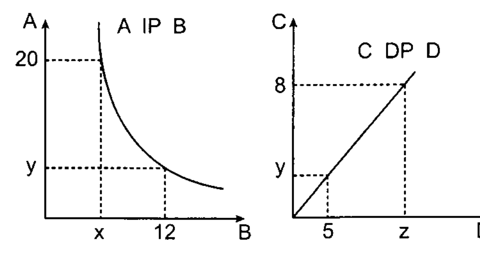
$E_1 = 2$; $A_1 = 1$; $e_1 = 25$

$E_2 = ?$; $A_2 = 12$; $e_2 = 36$

Reemplazando: $\frac{2\sqrt{25}}{1} = \frac{E_2\sqrt{36}}{12} \Rightarrow E_2 = 20$

$\therefore$ La eficiencia es de 20 puntos.

24. De las gráficas:



Hallar x(z).

Resolución:

Como: A IP B, se cumple: AB = cte. ...(1)

Del gráfico:

A	B
20	x
y	12

En (1): $20(x) = y(12) \Rightarrow x = \frac{3y}{5}$

Como C DP D, se cumple: $\frac{C}{D} = \text{cte.}$ ...(2)

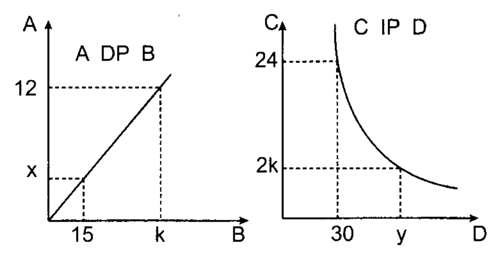
Del gráfico:

C	D
8	z
y	5

En (2): $\frac{8}{z} = \frac{y}{5} \Rightarrow z = \frac{40}{y}$

$\therefore$ Hallamos: $x(z) = \left(\frac{3y}{5}\right)\left(\frac{40}{y}\right) = 24$

25. De las siguientes gráficas:



hallar x/y.

Resolución:

Del gráfico: A y B

A	B
x	15
12	k

Pero: $\frac{A}{B} = \text{cte.}$

Reemplazando: $\frac{x}{15} = \frac{12}{k} \Rightarrow x = \frac{180}{k}$

Del gráfico: C y D

C	D
24	30
2k	y

Pero: $C \times D = \text{cte.}$

Reemplazando: $24(30) = 2k(y) \Rightarrow y = \frac{360}{k}$

$\therefore$ Hallamos: $\frac{x}{y} = \frac{\frac{180}{k}}{\frac{360}{k}} = \frac{1}{2} = 0,5$

26. Sean A y B dos magnitudes tales que A es IP con $\sqrt{B}$ cuando $B \leq 36$ y A es DP con B^4 cuando $B \geq 36$. Además, si $A = \sqrt{75}$, cuando B = 12. Hallar A cuando B = 72.

Resolución:

Se tiene:

$B \leq 36$: $A\sqrt{B} = \text{cte.}$ ...(1)

$B \geq 36$: $\frac{A}{B^4} = \text{cte.}$ ...(2)

Tenemos en cuenta que B = 36, permite enlazar las dos condiciones:

Por datos: $A_1 = \sqrt{75}$; $A_2 = ?$
$B_1 = 12$; $B_2 = 36$

En (1): $\sqrt{75}(\sqrt{12}) = A_2\sqrt{36} \Rightarrow A_2 = 5$

Hallamos A, cuando B = 72
$A_2 = 5$; $A = ?$; $B_2 = 36$; $B = 72$

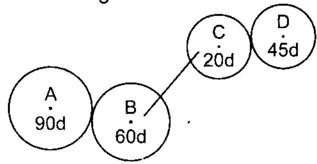
En (2): $\frac{5}{36^4} = \frac{A}{72^4} \Rightarrow A = 80$

∴ El valor de A: 80

27. Una rueda A de 90 dientes engrana con otra B de 60 dientes, fija al eje de B hay otra rueda C de 20 dientes, que engrana con otra D de 45 dientes. Si A, da 120 revoluciones por minuto, ¿cuántas revoluciones dará D en 4 minutos?

Resolución:

Haciendo un diagrama:



Si las ruedas están engranadas se cumple:
(n.° de dientes) IP (n.° vueltas)
⇒ (n.° dientes)(n.° vueltas) = cte.

Si las ruedas están unidas por el mismo eje: dan el mismo número de vueltas.

A y B: (engranadas):
$D_A \times V_A = D_B \times V_B \Rightarrow 90(120) = 60(V_B)$
$\Rightarrow V_B = 180$ rev/min
Además: $V_B = V_C = 180$ rev/min
C y D: $D_c \times V_c = D_D \times V_D$
$20(180) = 45(V_D) \Rightarrow V_D = 80$ rev/min
∴ En 4 minutos D dará: $80 \times 4 = 320$ rev.

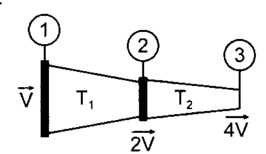
28. La turbina de un avión produce una diferencia de energía de 100 joule, la cual es producida por el aire que entra a una cierta velocidad y sale con el doble de velocidad. ¿Cuál será la energía producida por dos turbinas colocadas de modo que el aire que sale de la primera entre a la segunda? La energía es DP al cuadrado de la velocidad con que entra el aire.

Resolución:

Sean: E: energía; V: velocidad con que entra el aire

Por dato: $\frac{E}{V^2} = $ cte.

Además:



Reemplazando:

$$\frac{E_1}{V^2} = \frac{E_2}{(2V)^2} = \frac{E_3}{(4V)^2} \Rightarrow E_1 = \frac{E_2}{4} = \frac{E_3}{16} = \text{cte.}$$

$E_1 = k$; $E_2 = 4k$; $E_3 = 16k$

También:

$E_2 - E_1 = 100 \Rightarrow 4k - k = 100 \Rightarrow k = \frac{100}{3}$

Hallamos la energía producida:

$E_3 - E_1 = 16k - k = 15k \Rightarrow 15\left(\frac{100}{3}\right) = 500$ J

∴ Se producen 500 J de energía.

29. La potencia de un circuito varía en forma DP con la resistencia del conductor eléctrico y con el cuadrado de la corriente que circula. Si la corriente se reduce a su mitad y la resistencia se triplica, ¿qué sucede con la potencia: aumenta o disminuye y cuánto?

Resolución:

Sean: P: potencia del circuito
R: resistencia del conductor
I: corriente que circula por el conductor

Por dato, se tiene: $\frac{P}{RI^2} = $ cte.

Además: $P_1 = P$; $R_1 = R$; $I_1 = I$
$P_2 = ?$; $R_2 = 3R$; $I_2 = I/2$

Reemplazando: $\frac{P}{R(I)^2} = \frac{P_2}{3R(I/2)^2}$

Efectuando: $\frac{P}{RI^2} = \frac{P_2}{\frac{3RI^2}{4}} \Rightarrow P_2 = \frac{3}{4}P$

∴ La potencia del circuito disminuye en 1/4.

30. El número de obreros requeridos para construir un edificio, depende del volumen de concreto que interviene en la obra, del coeficiente regional de dificultad, del número de días y del número de horas diarias de labor. Si el volumen de concreto se reduce a las 3/5 partes, el número de días aumenta al triple y el número de horas diarias de labor se duplica. ¿En qué relación se encuentran los números de obreros requeridos en ambos casos?

Resolución:

Sean:
n: número de obreros; V: volumen de concreto;
d: número de días; h: horas diarias;
C: coeficiente de dificultad

Se deduce que:

$$\left.\begin{array}{l} n \text{ DP } V \\ n \text{ DP } C \\ n \text{ IP } h \\ n \text{ IP } d \end{array}\right\} \frac{n \times h \times d}{V \times c} = \text{cte.}$$

Por datos:
$C_1 = c$; $h_1 = h$; $V_1 = V$; $d_1 = d$

$C_2 = \frac{3}{5}c$; $h_2 = 2h$; $V_2 = V - \frac{V}{3} = \frac{2}{3}V$; $d_2 = 3d$

Reemplazando:

$$\frac{n_1 \times h \times d}{V \times c} = \frac{n_2 \times 2h \times 3d}{\frac{2}{3}V \times \frac{3}{5}c} \Rightarrow n_1\left(\frac{h \times d}{V \times c}\right) = \frac{n_2}{\frac{1}{15}}\left(\frac{h \times d}{V \times c}\right)$$

$$\therefore \frac{n_1}{n_2} = 15 \quad \vee \quad \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{15}$$

31. Italia, Brasil y Alemania son serios aspirantes al título del próximo mundial. Las posibilidades de cada equipo son IP con sus promedios de edad y directos con el cuadrado del número de goles anotados. Diga Ud. cómo serán las colocaciones, si se sabe que:

	Edad promedio	Goles
Italia	4A	2B
Brasil	30% de 50% de 4A	125% del 80% de B
Alemania	40% de 4A	MH de B y 2B

Resolución:

Operaciones previas:

- $4A\left(\frac{30}{100}\right)\left(\frac{50}{100}\right) = \frac{3A}{5}$ • $4A\left(\frac{40}{100}\right) = \frac{8A}{5}$
- $\left(\frac{125}{100}\right)\left(\frac{80}{100}\right)B = B$ • $MH(B; 2B) = \frac{2B(2B)}{B + 2B} = \frac{4}{3}B$

	Edad prom.	Goles
Italia	4A	2B
Brasil	3A/5	B
Alemania	8A/5	4B/3

Sean: P: posibilidades de campeonar
E: edad promedio;
G: número de goles

Por dato: $\frac{P \times E}{G^2} = \text{cte.}$

Reemplazando: $\frac{P_I \times 4}{(2)^2} = \frac{P_B \times \frac{3}{5}}{1^2} = \frac{P_A \times \frac{8}{5}}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} = k$

$\Rightarrow P_{Italia} = k$; $P_{Brasil} = \frac{5}{3}k$; $P_{Alemania} = \frac{10}{9}k$

$\therefore$ 1.°: Brasil; 2.°: Alemania; 3.°: Italia

32. El precio de un diamante es DP al cuadrado de su peso. Un diamante que costó $6480 se fraccionó en "n" partes, tales que sus pesos son proporcionales a los números: 1; 2; 3; ...; n; por esta razón se perdió $5460 de su valor. Hallar "n".

Resolución:

Sean: P: precio del diamante;
W: peso del diamante

Por dato: $\frac{P}{W^2} = \text{cte.}$

Al fraccionarse el diamante, se obtienen "n" diamantes cuyos precios y pesos cumplen:

$$\frac{P_1}{1^2} = \frac{P_2}{2^2} = \frac{P_3}{3^2} = ... = \frac{P_n}{n^2} = \frac{6480}{(1 + 2 + ... + n)^2} = k$$

Luego:

$P_1 = 1^2(k)$; $P_2 = 2^2(k)$; $P_3 = 3^2(k)$; ...; $P_n = n^2(k)$

El precio total:

$P_T = P_1 + P_2 + P_3 + ... + P_n$

$$P_T = k(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) = k\left[\frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}\right]$$

Además: $k = \frac{6480}{\left[\frac{n(n + 1)}{2}\right]^2}$

También: $P_T + 5460 = 6480 \Rightarrow P_T = 1020$

$$\Rightarrow \frac{6480}{\frac{n^2(n + 1)^2}{4}} \times \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} = 1020$$

Reduciendo: $\frac{2n + 1}{n(n + 1)} = \frac{17}{72} \Rightarrow n = 8$

$\therefore$ El valor de n es 8.

33. Las inscripciones del Concurso de Admisión a la UNI duraron 7 días y se observó que el número de inscritos era IP al número de días que faltan para el cierre de inscripciones a excepción del último día en que se inscribieron 1024 postulantes. ¿Cuántos se inscribieron el 3.er día, si en total postularon a la UNI 8080?

Resolución:

Del enunciado:

	1.er día	2.° día	3.er día	4.° día	5.° día	6.° día	7.°
n.° de días que faltan para el cierre	6	5	4	3	2	1	-
n.° de inscritos	a	b	c	d	e	f	1024

Por dato:

(n.° de inscritos) IP $\left(\begin{array}{l}\text{n.° de días que faltan para}\\ \text{el cierre de las inscripciones}\end{array}\right)$

$a(6) = b(5) = c(4) = d(3) = e(2) = f(1) = k$

$\Rightarrow a = \frac{k}{6}$; $b = \frac{k}{5}$; $c = \frac{k}{4}$; $d = \frac{k}{3}$; $e = \frac{k}{2}$; $f = k$

Además: $a + b + c + d + e + f + 1024 = 8080$

$\frac{k}{6} + \frac{k}{5} + \frac{k}{4} + \frac{k}{3} + \frac{k}{2} + k = 7056 \Rightarrow k = 2880$

$\therefore$ N.° de inscritos el 3.er día: $c = 2880/4 = 720$

34. Indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda para cada proposición:

I. El volumen de una esfera es DP al cubo del radio, el peso de la esfera es DP al volumen, entones el peso es DP al cubo del radio.

II. Si x es DP a y, su gráfica siempre es una recta.

III. Si A es DP a B^2 $\Rightarrow$ $\sqrt{A}$ es IP a $\frac{1}{B}$

Resolución:

I. Al comparar las magnitudes: volumen, peso y radio al cubo, estas no se relacionan a la vez, y se produce la transitividad.
Luego, si: V DP R^3 $\Rightarrow$ W DP V $\Rightarrow$ W DP R^3
Es verdadero.

II. Si x DP y, su gráfico corresponde a una sucesión de puntos que se ubican sobre una recta pero que no toma el origen (0; 0), ni valores negativos.
Es falso.

III. Si A DP B^2, luego se extrae ($\sqrt{\ }$); $\sqrt{A}$ DP B
También: $\sqrt{A}$ IP $\frac{1}{B}$
Es verdadero.

$\therefore$ VFV

35. Se tiene una rueda A_1 que engrana con A_2, la cual está unida mediante un eje con A_3 que engrana con A_4 y así sucesivamente hasta formar un sistema de 24 ruedas ¿Cuántas vueltas da la última cuando la primera da n vueltas , si el número de dientes de A es $10(i + 1)$ cuando i es impar e $10\left(\frac{i}{2}\right)$ cuando i es par?

Resolución:

Para ruedas engranadas:
n.° vueltas $\times$ n.° dientes = cte.
$\Rightarrow$ Sea V_k: n.° vueltas de la rueda A_k

Nótese: $A_1 \Rightarrow (1 + 1)10 = 20$ dientes
$A_3 \Rightarrow (3 + 1)10 = 40$ dientes
⋮
$A_{23} \Rightarrow (23 + 1)10 = 240$ dientes

También: $A_2 \Rightarrow \frac{2}{2} \times 10 = 10$ dientes
$A_4 \Rightarrow \frac{4}{2} \times 10 = 20$ dientes
⋮
$A_{24} \Rightarrow \frac{24}{2} \times 10 = 120$ dientes

Se cumple: $20V_1 = 10V_2 \Rightarrow 2V_1 = V_2$
También: $V_2 = V_3$ unidas por un eje
Luego: $\underbrace{40V_3 = 20V_4 = ... = 240V_{23} = 120V_{24}}_{\text{están engranadas}}$

$\Rightarrow 40V_3 = 120V_{24} \Rightarrow V_3 = 3V_{24}$

$\Rightarrow 2\underset{n}{V_1} = V_2 = V_3 = 3V_{24} \quad \therefore V_{24} = \frac{2}{3}n$

36. El sueldo de un empleado es DP a su edad hasta 32 años, a partir de allí y hasta los 40 años es IP a su edad, en adelante su sueldo será 5% menos cada año. ¿Cuál es el sueldo de un empleado de 42 años, si uno de 26 años gana S/.3900?

Resolución:

Hasta los 32 años es DP

$\frac{\text{sueldo}}{\text{edad}} = \frac{3900}{26} = \frac{x}{32} \Rightarrow x = \text{S/.}4800$

De los 32 a los 40 es IP
Sueldo $\times$ edad $= 32 \times 4800 = 40y \Rightarrow y =$ S/.3840
En adelante será 5% menos:
$\Rightarrow$ 1 año más $\Rightarrow$ tiene 41 años
$3840 - 5\%(3840) = 95\%(3840)$
$\Rightarrow \text{Sueldo}_{(41)} =$ S/.3648
$\Rightarrow$ 1 año más $\Rightarrow$ tiene 42 años
$3648 - 5\%(3648) = 95\%(3648)$
$\therefore \text{Sueldo}_{(42)} =$ S/.3465,6

37. Si: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \wedge \frac{5a_1^2 + 6a_2^2 + 7a_3^2}{5b_1^2 + 6b_2^2 + 7b_3^2} = 9$,

calcule: $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_1a_2}{b_1b_2} + \frac{a_1a_2a_3}{b_1b_2b_3}$

Resolución:

De la serie: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k$

Elevando al cuadrado: $\frac{a_1^2}{b_1^2} = \frac{a_2^2}{b_2^2} = \frac{a_3^2}{b_3^2} = k^2$

Convenientemente se da forma:

$\frac{5a_1^2}{5b_1^2} = \frac{6a_2^2}{6b_2^2} = \frac{7b_3^2}{7b_3^2} = \frac{5a_1^2 + 6a_2^2 + 7a_3^2}{5b_1^2 + 6b_2^2 + 7b_3^2} = k^2$

Del dato: $9 = k^2 \Rightarrow k = 3$

Se pide: $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_1a_2}{b_1b_2} + \frac{a_1a_2a_3}{b_1b_2b_3} = k + k^2 + k^3$

$\therefore 3 + 3^2 + 3^3 = 39$

38. Un automóvil deportivo se compra en $16 000. La depreciación de dicha máquina es proporcionar el cuadrado del tiempo transcurrido. Luego de 10 años, el automóvil cuesta $10 000, hallar el valor (en dólares) del automóvil, cuando tiene un tiempo de vida de 7 años.

Resolución:

$\frac{\text{Depreciación}}{\text{tiempo}^2} = \text{cte.}$

Donde: Depreciación = valor inicial − valor actual
Se conoce:

$\frac{16\,000 - 10\,000}{10^2} = \frac{16\,000 - V_{auto}}{7^2}$

$60 \times 49 = 16\,000 - V_{auto} \quad \therefore V_{auto} = \$13\,060$

39. Se ha establecido que en un Banco el número de clientes es DP a la tasa de interés e IP a la competencia (número de Bancos del año anterior). Un Banco X con 300 000 ahorristas ha impuesto durante el 2002 una tasa del 7,5% anual, superando a su más cercano perseguidor en 1,5%; para el 2003 se estima la quiebra de dos Bancos, de esta manera se sumaría a los dos Bancos que cerraron actividades en el 2002. El Banco X también se encuentra en crisis, un tercio de sus ahorristas se han retirado y en el 2003 solo podrá dar una tasa del 2,25% por debajo de su cercano perseguidor. ¿Cuántos Bancos trabajaron en el 2001?

Resolución:

Número de dientes: n; Tasa de interés: i

Número de Bancos del año anterior: B

Del problema: $\frac{n \times B}{i} = \text{cte.}$

Año 2002: $n_1 = 300\,000$

$i_1 = 7{,}5\%$ (su competidor $i = 6\%$)

$B_1 = x$ (bancos que trabajaron en el 2001)

Año 2003: Se retiran 1/3 clientes

Queda: $n_2 = \frac{2}{3}(300\,000) = 200\,000$

Da una tasa del 2,25% por debajo de su competidor ($i = 6\%$)

$i_2 = (6 - 225)\% \Rightarrow i_2 = 3{,}75\%$

Dos bancos cerraron en el 2002

$B_2 = (x - 2)$

$$\Rightarrow \frac{n \times B}{i} = \frac{300\,000(x)}{7{,}5\%} = \frac{200\,000(x-2)}{3{,}75\%}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{x-2}{3} \qquad \therefore x = 8$$

40. En la siguiente tabla se muestran los valores de las magnitudes A y B.

A	0,3	1	3	a	9
B	0,01	$0,\hat{1}$	1	4	b

Calcula: a + b

Resolución:

A	0,3	1	3	a	9
B	0,01	$0,\hat{1}$	1	4	b

$A\uparrow^{+}\ B\uparrow^{+}$

Sea: A^n DP B $\Rightarrow \frac{A^n}{B} = \text{cte.}$

$$\frac{1^n}{0,\hat{1}} = \frac{3^n}{1} \Rightarrow \frac{1}{1/9} = \frac{3^n}{1} \Rightarrow n = 2$$

Luego: $\frac{3^2}{1} = \frac{a^2}{4} = \frac{9^2}{b} = \text{cte.}$

$\Rightarrow a = 6 \wedge b = 9 \qquad \therefore a + b = 15$

41. La fuerza necesaria para evitar que un carro patine en una curva es inversamente proporcional al radio de la curva, directamente proporcional a la masa del carro y directamente proporcional al cuadrado de la velocidad. ¿Cómo varía ésta fuerza cuando el radio se duplica la masa se reduce en 25% y la velocidad aumenta en 20%?

Resolución:

Sea F la fuerza indicada:

F IP radio (R)
F DP masa (m)
F DP velocidad^2 (V^2)
$\Rightarrow \frac{FR}{mV^2} = \text{cte.}$

$$\frac{F_1R_1}{m_1V_1^2} = \frac{F_2(2R_1)}{(75\%m_1)(120\%V_1)^2}$$

Reduciendo: $\frac{F_1R_1}{m_1V_1^2} = \frac{100F_2R_1}{54m_1V_1^2}$

$\Rightarrow F_2 = \frac{54}{100}F_1 = 54\%F_1 \qquad \therefore$ Disminuye 46%

42. Se tiene dos magnitudes: A y B, tales que A es inversamente proporcional con B^2. Si cuando B aumenta es 25%, el valor de A varía en 144 unidades. ¿En cuánto aumenta o disminuye A, cuando B disminuye un 20%?

Resolución:

$A \times B^2 = \text{cte.}$

$(A - 144)(B + 25\%B)^2 = A \times B^2$

$(A - 144)\left(\frac{25}{16}B^2\right) = A \times B^2 \Rightarrow A = 400$

Luego: $(400 + x)(B - 20\%B)^2 = 400B^2 \Rightarrow x = 225$

$\therefore$ A aumenta en 225 unidades

43. En un fenómeno donde intervienen las magnitudes A, B y C con las cuales se han realizado 3 experimentos:

1.^{er} Experimento: Manteniendo B constante se obtiene el siguiente cuadro de valores:

A	1	2	3	4
C	2	1/2	2/9	1/8

2.° Experimento: Manteniendo C constante se obtiene el siguiente cuadro de valores:

A	2	4	6	8
B	2	8	18	32

3.^{er} Experimento: Haciendo variar las 3 magnitudes se obtuvo el siguiente cuadro de valores:

A	2	5
B	2	x
C	2	4

Calcular x

Resolución:

Del primer cuadro se deduce que:

$1^2 \times 2 = 2^2 \times 1/2 = 3^2 \times 2/9 = 4^2 \times 1/8 = A^2 \times C = \text{cte.}$

$\Rightarrow A^2$ IP C ...(1)

Del segundo cuadro:

$$\frac{2^2}{2} = \frac{4^2}{8} = \frac{6^2}{18} = \frac{8^2}{32} = \frac{A^2}{B} = \text{cte.}$$

$\Rightarrow A^2$ DP B ...(2)

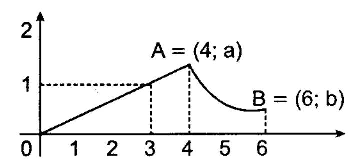
La fórmula proporcional que reacciona las magnitudes es: $\frac{A^2 \times C}{B} = k$

Aquí reemplazamos los valores del 3.^{er} Experimento:

$$\frac{2^2(2)}{2} = \frac{5^2(4)}{x} \qquad \therefore x = 25$$

44. En la gráfica siguiente la línea OA representa proporcionalidad directa entre dos magnitudes y la lí-

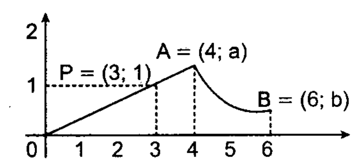
nea AB proporcionalidad inversa. Hallar los valores de a y b.



Resolución:

Dos magnitudes son directamente proporcionales si el cociente de sus valores respectivos es constante.

Dos magnitudes son inversamente proporcionales si el producto de los valores respectivos es constante.



Del gráfico se observa que cumplen la proporcionalidad.

Directa	**Inversa**
A = (4; a) ∧ P = (3; 1)	A = (4; a) ∧ B = (6; b)
$\frac{4}{a}=\frac{3}{1} \Rightarrow a=\frac{4}{3}$	$4\left(\frac{4}{3}\right)=6(b) \Rightarrow b=\frac{8}{9}$

$\therefore\ a = 4/3 \wedge b = 8/9$

45. Si C es constante A es constante

A	18	2
B	2,50	7,5

y

B	1,7	13,6
C	1,5	6

halle "z" en:

A	1	z
B	1	3
C	1	2

Resolución:

Cuando C es constante, si A disminuye, B aumenta. Luego la proporcionalidad es inversa de la forma $A \times B^n = \text{cte.}$

Reemplazando: $18(2,5)^n = 2(7,5)^n \Rightarrow n = 2$

Pero la proporcionalidad es directa:

$\frac{B}{C^m} = \text{cte.} \Rightarrow \frac{1,7}{1,5^m} = \frac{13,6}{6^m} \Rightarrow m = \frac{3}{2}$

Esto es: $\frac{B}{C^{3/2}} = \text{cte.} \Rightarrow \frac{B^2}{C^3} = \text{cte.}$

Luego se tiene:

$\left.\begin{array}{l} A \times B^2 = \text{cte. } (C = \text{cte.}) \\ B^2/C^3 = \text{cte. } (A = \text{cte.}) \end{array}\right\} \frac{A \times B^2}{C^3} = \text{cte.}$

Reemplazando los valores indicados en la tabla:

$\frac{1(1^2)}{1^3} = \frac{z(3^2)}{2^3} \quad \therefore\ z = 8/9$

46. La obra que hace un obrero por hora, varía en razón directa a su salario por hora e inversamente proporcional a la raíz cuadrada del número de horas que trabaja por día. Si puede hacer una obra en 12 días cuando trabaja 9 horas por días a razón de S/.6 la hora ¿Cuántos días empleará en hacer la misma obra trabajando 16 horas por día a S/.9 la hora?

Resolución:

Las magnitudes son:
T: cantidad de obra que hace por hora
S: salario por hora
h: número de horas que trabaja por día

Las relaciones proporcionales son:
T DP S ∧ T IP $\sqrt{h}$

La fórmula proporcional es:

$$\frac{T\sqrt{h}}{S} = k \Rightarrow \frac{T_1\sqrt{h_1}}{S_1} = \frac{T_2\sqrt{h_2}}{S_2} \qquad ...(1)$$

1.ª obra

Emplea 12 días a 9 horas por día o sea 12,9 = 108 horas en total, luego la obra que hace por hora es $T_1 = \frac{1}{108}$ de obra, siendo h_1= 9 horas/día y S_1= S/.6 por hora.

2.ª obra

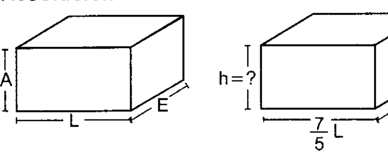
Emplea x días a 16 horas/ día o sea 16x horas en total, luego la obra que hace por hora es T_2= 1/16x de obra, siendo h_2= 16 horas/ día y S_2= S/.9 horas.

Reemplazando en (1):

$$\frac{\frac{1}{108}(\sqrt{9})}{6} = \frac{\frac{1}{16x}(\sqrt{16})}{9} \quad \therefore\ x = 6 \text{ días}$$

47. Un muro de L metros de largo, A metros de alto y E centímetros de espesor, ha sido construido en D días por P hombres que trabajaron H horas diarias. ¿Qué altura tendrá en metros otra pared que debe ser construida en 5/3D días por (P – p) hombres que trabajaran 5H/4 horas diarias, si se desea que tenga 7L/5 metros de largo y 3E/2 centímetros de espesor?

Resolución:



Volumen	A'L'E'	$\frac{7}{5}L'\frac{3}{2}E'h$
n.° de obreros	P	P – p
n.° días	D	$\frac{5}{3}D$
n.° de horas/día	H	$\frac{5}{4}H$

Sabemos que: $\frac{(\text{n.° obreros})(\text{n.° días})(\text{n.° h/d})}{\text{obra}} = \text{cte.}$

Reemplazando: $\frac{P(D)(H)}{A(L)(E)} = \frac{(P-p)\left(\frac{5}{3}D\right)\left(\frac{5}{4}H\right)}{\left(\frac{7}{5}L\right)\left(\frac{3}{2}E\right)(h)}$

$\therefore\ h = \frac{125A(P-p)}{126P}$

48. Si: A^2 DP B^3 ; cuando C es constante
B^4 DP C^3 ; cuando A es constante
A^n 1/DP C ; cuando B es constante
hallar "n".

Resolución:

Si al comparar 2 de las magnitudes se dice que la otra es constante, entonces las 3 magnitudes participan en el mismo aspecto del fenómeno. Aquí no es posible aplicar transitividad.

$$\left.\begin{array}{l} A^2 \text{ DP } B^3 \Rightarrow A^8 \text{ DP } B^{12} \\ B^4 \text{ DP } C^3 \Rightarrow B^{12} \text{ DP } C \end{array}\right| \frac{A^8 \times C^9}{B^{12}} = k$$

De la fórmula obtenemos: A^8 IP C^9

Aplicando un teorema: $A^{8/9}$ IP C (elevando a la 1/9) y comparando con el dato: A^n IP C

$\therefore$ Se deduce que: n= 8/9

49. Las edades de tres personas que son proporcionales a los números 3; 5 y n suman 60. Si dentro de 6 años sus edades serán proporcionales a 9; p y q. Calcular la mayor de las edades (n, p y q son primos absolutos).

Resolución:

Por dato: n, p y q son primos absolutos

Edades actuales: 3a; 5a; na

Suma = 3a + 5a + na = (8 + n)a = 60

↓ ↓
2 6 (no cumple)
7 4 (sí cumple)

Edades actuales: 12 20 28

Dentro de 6 años: 9b = 18; pb = 26; qb = 34

↓	↓	↓
0	0	0
2	13	17

$\therefore$ na = 28

50. La duración de un viaje por ferrocarril es DP a la distancia e IP a la velocidad. A su vez la velocidad es IP al número de vagones y DP a la raíz cuadrada de la cantidad de carbón que se consume por kilómetro. Si un viaje de 200 km con 20 vagones, hecho en 4 horas consumió 100 kg. de carbón por kilómetro. ¿Cuántos kilogramos de carbón se consumirán en un viaje de 100 km hecho con 15 vagones en 6 horas?

Resolución:

Sean las magnitudes:

t: duración del viaje; e: espacio recorrido;
v: velocidad; n: número de vagones;
q: consumo de carbón por kilómetro

Las relaciones proporcionales son:

$$\left.\begin{array}{l} t \text{ DP } e \\ t \text{ IP } v \end{array}\right\} \frac{t \times v}{e} = k_1 \quad ...(1)$$

$$\left.\begin{array}{l} v \text{ IP } n \\ v \text{ DP } \sqrt{q} \end{array}\right\} \frac{v \times n}{\sqrt{q}} = k_2 \quad ...(2)$$

$(1) \div (2)$: $\frac{t\sqrt{q}}{e \times n} = \frac{k_1}{k_2} = \text{cte.}$

$$\frac{t\sqrt{q}}{e \times n} = k \Rightarrow \frac{t_1\sqrt{q_1}}{e_1 \times n_1} = \frac{t_2\sqrt{q_2}}{e_2 \times n_2}$$

$$\frac{4\sqrt{100}}{200 \times 20} = \frac{6\sqrt{q^2}}{100 \times 15} \Rightarrow q_2 = \frac{25}{4} \text{ kg de carbón} \times \text{km}$$

Consumo en todo el 2.° viaje:

$$\left(\frac{25}{4} \frac{\text{kg}}{\text{km}}\right)(100 \text{ km}) = 625 \text{ kg}$$

51. Sean A, B y C tres magnitudes tales que: $(A^2 + B^2)$ DP $(A^2 - B^2)$, cuando C se mantiene constante y $(A^2 + C^2)$ DP $(A^2 - C^2)$, cuando B se mantiene constante. ¿Qué sucede con A cuando C aumenta en un 20% y B disminuye en 20%?

Resolución:

Dada: $(A^2 + B^2)$ DP $(A^2 - B^2)$

En una tabla de valores:

Magnitud A	a_1	a_2	a_3
Magnitud B	b_1	b_2	b_3

Cuando C es constante.

Se cumplirá: $\frac{a_1^2 + b_1^2}{a_1^2 - b_1^2} = \frac{a_2^2 + b_2^2}{a_2^2 - b_2^2} = \frac{a_3^2 + b_3^2}{a_3^2 - b_3^2} = \text{cte.}$

Por propiedad de serie de razones:

$$\frac{(a_1^2+b_1^2)+(a_1^2-b_1^2)}{(a_1^2+b_1^2)-(a_1^2-b_1^2)} = \frac{(a_2^2+b_2^2)+(a_2^2-b_2^2)}{(a_2^2+b_2^2)-(a_2^2-b_2^2)} = \frac{(a_3^2+b_3^2)+(a_3^2-b_3^2)}{(a_3^2+b_3^2)-(a_3^2-b_3^2)}$$

$$\frac{2a_1^2}{2b_1^2} = \frac{2a_2^2}{2b_2^2} = \frac{2a_3^2}{2b_3^2} = \text{cte.}$$

Sacando raíz cuadrada:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \text{cte.}$$

$\Rightarrow$ A DP B, cuando C es constante ...(1)

En forma similar:

$(A^2 + C^2)$ DP $(A^2 - C^2)$; cuando B es constante

Se cumplirá A DP C ...(2)

De (1) y (2): A DP $(B \times C) \Rightarrow \frac{A}{B \times C} = \text{cte.}$

Realizando las variaciones:

$$\frac{A}{B \times C} = \frac{A'}{(80\%B)(120\%C)}$$

Del problema: disminuye 20% aumenta 20%:

$\Rightarrow$ (80%)(120%)A = A' $\Rightarrow$ 96%A = A'

$\therefore$ A disminuye 4%

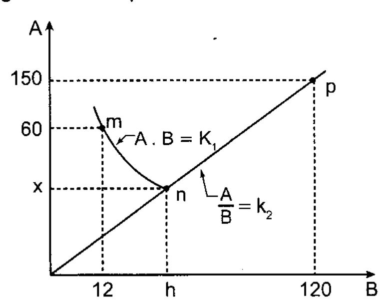
52. A y B son 2 magnitudes tales que:
A IP B, cuando $12 \leq B \leq h$
A DP B, cuando $h \leq B \leq 120$
Se sabe que:
A = 60, cuando B = 12 ∧ A = 150, cuando B = 120
Hallar h.

Resolución:

Para $12 \leq B \leq h \Rightarrow A \times B = K_1$ ...(1)

Para $h \leq B \leq 120 \Rightarrow \frac{A}{B} = k_2$ ...(2)

El gráfico correspondiente es:



Los puntos m y n en la ecuación (1):
$60 \times 12 = x \times h$ ...(3)

Los puntos n y p en la ecuación (2): $\frac{x}{h} = \frac{150}{120}$

(3) × (4): $\frac{60(12)(x)}{h} = \frac{150(x)(h)}{120} \Rightarrow h^2 = 4 \times 12^2$

∴ h = 24

53. El espacio que recorre un cuerpo en caída libre es DP al cuadrado del tiempo. Si en los primeros "a" segundos recorre N metros. ¿Cuántos metros recorre en los próximos "2a" segundos?

Resolución:

Sean: e: espacio recorrido; t: tiempo transcurrido

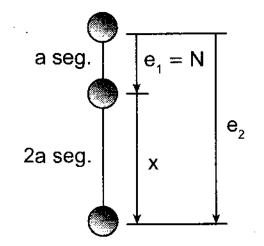
$e \text{ DP } t^2 \Rightarrow \frac{e}{t^2} = k$

$\frac{e_1}{t_1^2} = \frac{e_2}{t_2^2}$

$\frac{N}{a^2} = \frac{e_2}{(3a)^2}$

$e_1 = N \wedge e_2 = 9N$

$\therefore x = e_2 - e_1 = 8N$



54. A^3 DP B^4 cuando C se mantiene constante
A^4 DP C^3 cuando B se mantiene constante
B IP C^{2n} cuando A se mantiene constante
Hallar n.

Resolución:

A^3 DP B^4; elevando a la cuarta: A^{12} DP B^{16}

A^4 DP C^3; elevando al cubo: A^{12} DP C^9

De lo anterior: $\frac{A^{12}}{B^{16} \times C^9} = \text{cte.}$

Cuando A se mantiene constante:
$B^{16} \times C^9 = \text{cte.} \Rightarrow B^{16}$ IP C^9
Sacando $\sqrt[16]{\ }$: B IP $C^{9/16}$
Dando forma: B IP $C^{2\,(9/32)}$
∴ Se identifica n = 9/32

55. A y B son dos magnitudes que cumplen la siguiente regla de proporcionalidad: A DP B cuando $B \leq 8$, por otro lado A IP B cuando $8 \leq B \leq 15$, asimismo A IP B^2 cuando $B \geq 15$. Si cuando B = 4, A = 15, calcular el valor de A cuando B = 30.

Resolución:

$B \leq 8$: A DP B $\Rightarrow \frac{A}{B} = \text{cte.} \Rightarrow \frac{15}{4} = \frac{A_1}{8}$

Se obtiene: $A_1 = 30$

$8 \leq B \leq 15$: A IP B

$A \times B = \text{cte.} \Rightarrow 30 \times 8 = A_2(15)$

Se obtiene $A_2 = 16$

$B \geq 15$: A IP B^2

$A \times B^2 = \text{cte.} \Rightarrow 6 \times 15^2 = A_3(30^2)$

Se obtiene: $A_3 = 4$

∴ Cuando B = 30, el valor de A es 4

56. Cuatro jardineros siembran 40 árboles alrededor de un terreno, de forma de un triángulo equilátero de 60 m de perímetro, es 3 días. ¿En cuánto tiempo 2 obreros sembraron 50 árboles alrededor de un terreno circular de 80 m de perímetro, sabiendo que este terreno es doblemente más duro que el primero?

Resolución:

		Perímetro		Dureza
4 jardineros	40 árboles	60 m	3 días	1
2 obreros	20 árboles	80 m	x	2
IP	DP	DP		DP

$\therefore x = 3 \times \frac{4}{2} \times \frac{50}{40} \times \frac{80}{60} \times \frac{2}{1} = 20$ días

57. Cinco soldados tienen víveres para 10 días. En la noche del sexto día murió uno de ellos y en la noche siguiente, por huir de cierta emboscada abandonan la mitad de los alimentos que les quedaba. ¿Para cuántos días les alcanzará la comida que les queda, si reducen la ración diaria a la mitad?

Resolución:

Sea V la cantidad total de víveres:

$\Rightarrow \frac{(\text{n.° soldados})(\text{días})(\text{ración})}{\text{víveres}} = \text{cte.}$

$$\underbrace{\frac{5 \times 10 \times 1}{V}}_{\text{Inicialmente}} = \underbrace{\frac{5 \times 6 \times 1}{V_1}}_{\text{hasta el sexto día}} = \underbrace{\frac{4 \times d \times 1/2}{\left(\frac{V - V_1}{2}\right)}}_{\text{murió 1 y tiene la mitad del resto.}}$$

$\Rightarrow \frac{50}{V} = \frac{30}{V_1} = \frac{4d}{V - V_1}$; por propiedad de razones:

$$\frac{50-30}{V-V_1}=\frac{20}{V-V_1}=\frac{4d}{V-V_1} \Rightarrow 20=4d$$

$\therefore$ d = 5 días

58. Se construyen dos vías paralelas de una carretera, trabajando en cada sección 80 obreros. Al cabo de 50 días el primer grupo ha hecho 3/8 de su trabajo y el segundo grupo 5/7 de su parte. En los siguientes 70 días se debe terminar lo que falta de la primera sección, para ello pasan cierta cantidad de obreros de la segunda a la primera sección. ¿Cuántos días antes de terminar la primera sección se terminará la segunda, si en esta última no se contratan obreros adicionales?

Resolución:

La eficiencia de los obreros de cada sección es diferente:

$$\frac{(\text{n.° obreros})(\text{n.° días})(\text{eficiencias})}{\text{obra}}=\text{cte.}$$

$$\Rightarrow \frac{80\times50\times n_1}{3/8}=\frac{80\times50\times n_2}{5/7} \Rightarrow \frac{n_1}{21}=\frac{n_2}{40}$$

$\Rightarrow n_1 = 21k;\ n_2 = 40k$

En la primera sección:

ingresan a trabajar "x" obreros del 2.° grupo:

$$\underbrace{\frac{80\times50(21k)}{3/8}}_{\text{inicial}}=\underbrace{\frac{[80(21k)+x(40k)]70}{5/8}}_{\text{para terminar}}$$

Resolviendo x = 8

En la segunda sección:

$$\frac{80\times50(40k)}{5/7}=\frac{(80-8)(t)(40k)}{2/7} \Rightarrow t=22{,}2 \text{ días}$$

Los primeros demoran 70 días

Los segundos demoran 22,2 días

$\therefore$ 70 − 22,2= 47,8 días

59. Un perro que está situado en el punto A, sale en persecución de un zorro que está situado a 30 m de A. Cada salto del perro es de 2 m, mientras que el del zorro es de 1 metro; además cuando el perro da 2 saltos el zorro da 3, ¿a qué distancia de A capturará el perro al zorro?

Resolución:

Perro → (A) ———— 30 cm ———— Zorro →

$$\text{Avanza (perro)}=\underbrace{\text{n.° saltos (perro)}}_{(2k)}\times\underbrace{\text{longitud salto (perro)}}_{(2\text{ metros})}$$

$\Rightarrow A_P = 4k$ ...(1)

$$\text{Avanza (zorro)}=\underbrace{\text{n.° saltos (zorro)}}_{(3k)}\times\underbrace{\text{longitud salto (zorro)}}_{(1\text{ metro})}$$

$A_Z = 3k$ ...(2)

Para que lo alcance: $A_P = A_Z + 30$

Reemplazando (1) y (2): $4k = 3k + 30 \Rightarrow k = 30$

$\therefore$ En (1): $A_P = 4(30) = 120$ m

60. Veinte obreros pueden hacer una obra en 60 días, se desea hacer las 7/80 partes de la obra, para ello se comienza a despedir un obrero por día a partir del segundo día. ¿En cuántos días se hará dicho avance?

Resolución:

El primer día trabajan:	20 obreros.
El segundo día trabajan:	19 obreros.
El tercer día trabajan:	18 obreros.
⋮	⋮
El enésimo día trabajan:	(21 − n) obr.

$$\Rightarrow \frac{20\times60}{W_T}=\frac{20\times1}{W_1}=\frac{19\times1}{W_2}=\frac{18\times1}{W_3}\cdots\frac{(21-n)1}{W_n}$$

$$\Rightarrow \frac{1200}{W_T}=\frac{20+19+18+\ldots+(21-n)}{\underbrace{(W_1+W_2+W_3+\ldots+W_n)}_{\frac{7}{80}W_T}}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{80}(1200)=\underbrace{20+19+18+\ldots+(21-n)}_{n\text{ sumandos}}$$

$$\Rightarrow 105=\underbrace{20+19+18+17+16+15}_{6\text{ sumandos}}$$

$\therefore$ n = 6 días

61. Un grupo de obreros ha realizado el 70% de cierta obra hasta el 9.° día ¿En cuántos días más se concluirá la obra, si a partir de ese momento se duplica el número de obreros contratando gente que es 50% menos eficiente?

Resolución:

De los datos: $\frac{D\times\theta}{R\times n\times t}=k$

$$\frac{70\%}{100\%(n)(9)}=\frac{30\%}{[100\%(n)+50\%n]x}$$

$$\frac{\frac{70}{100}}{\frac{100}{100}(n)(9)}=\frac{\frac{30}{100}}{\left(\frac{100}{100}n+\frac{50}{100}n\right)x} \Rightarrow \frac{7}{9n}=\frac{3}{\frac{3}{2}n(x)}$$

$\therefore x=\frac{18}{7}=2\frac{4}{7}$ días

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2001 - II)

Sabiendo que $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{D}{d}$ y además:

$(A + a)(B + b)(D + d) = M^3$, calcular: $D\sqrt[3]{\frac{AB}{D^2}} + d\sqrt[3]{\frac{ab}{d^2}}$

A) M B) $\sqrt[3]{M}$ C) $\sqrt[3]{\frac{M}{2}}$

D) M^3 E) M^2

Resolución:

Del problema: $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{D}{d} = k \Rightarrow ABD = abdk^3$ ...(1)

Sabemos: $\frac{x}{y} = k \Rightarrow \frac{x+y}{y} = k + 1$

Aplicando: $\frac{A+a}{a} = \frac{B+b}{b} = \frac{D+d}{d} = k + 1$

$\Rightarrow (A + a)(B + b)(D + d) = abd(k + 1)^3$

$M^3 = abc(k + 1)^3$ ...(2)

Luego: $F = D\sqrt[3]{\frac{AB}{D^2}} + d\sqrt[3]{\frac{ab}{d^2}} = \sqrt[3]{ABD} + \sqrt[3]{abd}$ ...(α)

De (1) y (2): $\sqrt[3]{ABD} = \sqrt[3]{abd}\,k \Rightarrow \sqrt[3]{abd} = \frac{\sqrt[3]{ABD}}{k}$ ...(3)

$M = \sqrt[3]{abd}(k + 1) \Rightarrow \sqrt[3]{abd} = \frac{M}{k+1}$ ...(4)

Igualando (3) y (4): $\sqrt[3]{ABD} = M\frac{k}{k+1}$ ...(5)

(4) y (5) en (α): $F = M\frac{k}{k+1} + M\frac{1}{k+1}$ $\therefore F = M$

Clave: A

PROBLEMA 2 (UNI 2007 - I)

Supongamos que A varía directamente proporcional a X y Z, e inversamente proporcional a W. Si A = 154 cuando X = 6; Z = 11; W = 3, determine A, cuando X = 9; Z = 20; W = 7.

A) 120 B) 140 C) 160
D) 180 E) 200

Resolución:

Sea: $\left.\begin{array}{l} A \text{ DP } X \\ A \text{ DP } Z \\ A \text{ IP } W \end{array}\right\} \frac{A(W)}{X(Z)} = k \text{ (cte.)}$

Analizando: A = 154; X = 6; Z = 11; W = 3

En la relación anterior: $\frac{154(3)}{6(11)} = 7 \Rightarrow k = 7$

Luego: $\frac{A(W)}{X(Z)} = 7$.

Para los valores pedidos: X = 9; Z = 20; W = 7,

tendremos: $\frac{A(7)}{9(20)} = 7$ $\therefore A = 180$

Clave: D

PROBLEMA 3 (UNI 2008 - II)

De las magnitudes z, w, x, se sabe que z es directamente proporcional a x^2 y w es inversamente proporcional a x^2 y w es inversamente proporcional a x^2.

Si: N = z + w y

x = 1 implica que N = 6; x = 0,5 implica que N = 9

Determine N, si $x = \sqrt{2}$

A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

Resolución:

Datos: $z \text{ DP } x^2 \Rightarrow \frac{z}{x^2} = k_1 \Rightarrow z = k_1x^2$

$w \text{ IP } x^2 \Rightarrow wx^2 = k_2 \Rightarrow w = \frac{k_2}{x^2}$

Elaboramos la siguiente tabla:

	z	w	N
x = 1	k_1	k_2	6
x = 0,5	$k_1/4$	$4k_2$	9
$x = \sqrt{2}$	$2k_1$	$k_2/2$	?

Por condición del problema: N = z + w

De la tabla: $k_1 + k_2 = 6$ ...(1)

$\frac{k_1}{4} + 4k_2 = 9$ ...(2)

De (1) y (2): $k_1 = 4 \wedge k_2 = 2$

Nos piden: $N = 2k_1 + \frac{k_2}{2} = 2(4) + \frac{2}{2} = 9$

Clave: C

PROBLEMA 4 (UNI 2014 - I)

Las magnitudes x e y son tales que (y − 4) y $(x^2 - 4)$ son inversamente proporcionales. Si el par (−1; −2) satisface esa relación, determine la ecuación de proporcionalidad.

A) $y = \frac{18}{x^2-4} + 4$ B) $y = \frac{-18}{x^2+4} - 4$ C) $y = \frac{18}{x^2-4} - 4$

D) $y = \frac{18}{x^2-4} + 6$ E) $y = \frac{-18}{x^2-4} + 12$

Resolución:

Dato: $(y - 4)$ IP $(x^2 - 4)$

Respecto a sus valores se cumple:

$(y - 4)(x^2 - 4) = k'$

Para el par ordenado: $(-1; -2) \Rightarrow x = -1 \wedge y = -2$

Reemplazando: $\underbrace{(-2 - 4)}_{-6}\underbrace{[(-1)^2 - 4]}_{-3} = k' \Rightarrow k' = 18$

$(y - 4)(x^2 - 4) = 18$ $\therefore y = \frac{18}{x^2-4} + 4$

Clave: A

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Sean las magnitudes A y B, tales que: A es IP a B^2. Si, cuando A aumenta 720 unidades, B varía en su quinta parte. Hallar valor inicial de A.

A) 1420 B) 1280 C) 1360
D) 1240 E) 1720

2. El ahorro mensual de un empleado es DP a la raíz cuadrada de su sueldo. Si cuando su sueldo era de S/.1600, su ahorro era de S/.120. ¿Cuál debe ser su sueldo para que su ahorro aumente la mitad?

A) S/.3600 B) S/.2500 C) S/.3136
D) S/.3364 E) S/.3025

3. El precio de un ladrillo es proporcional a su peso e IP a su volumen. Un ladrillo de densidad 1,5 g/cm^3 cuesta S/.10. ¿Cuánto costará un ladrillo de 600 cm^3 que pesa 1,2 kg?

A) S/.11/3 B) S/.10/3 C) S/.2
D) S/.8/3 E) S/.7/3

4. Sabiendo que: $(A^2 + B^2)$ es DP a $(A^2 - B^2)$, siendo la constante de proporcionalidad 13/5, entonces A DP B y su constante de proporcionalidad es:

A) 1/2 B) 1 C) 3/2
D) 5/2 E) 2

5. Se sabe que: $(N + 1)$ es DP a A y $(N^2 - 1)$ es DP a B, si cuando $A = 5$; $B = 10$; $N = 9$. Hallar el valor de B, cuando $A = 6$.

A) 15 B) 18 C) 12
D) 16 E) 16,5

6. Se tienen 3 magnitudes: A; B y C. Donde: A DP $(B^2 + C^2)$ con constante k_1, además, A es IP a B/C con constante k_2. Hallar k_1/k_2, cuando $B = 3$ y $C = 2$.

A) 2/9 B) 2/29 C) 2/39
D) 2/49 E) 2/59

7. A es DP al cubo de B, el cuadrado de B es DP a la raíz cuadrada de C y C es IP al cuadrado de D. Si, cuando $A = 3$; $D = 4$, hallar A cuando $D = 2\sqrt[3]{18}$.

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

8. En el recorrido de un taxi se observa que el cuadrado del tiempo de permanencia del chofer en el auto varía en forma DP al consumo de gasolina e IP a la velocidad, y la velocidad varia en forma IP al peso del pasajero. Para un pasajero robusto consume 4 galones de gasolina en un recorrido que duró 8 horas. ¿Cuánto de gasolina se consumirá en un viaje que dura 1/4 de día en otro pasajero cuyo peso es los 3/4 del anterior?

A) 3 gal B) 4 gal C) 6 gal
D) 8 gal E) 12 gal

9. La longitud de un resorte es 8 cm; si soporta un peso de 50 g su longitud es 10 cm. ¿Cuál será su longitud si soporta un peso que es dos veces mayor que el anterior y si la elongación es DP al peso que soporta?

A) 12 cm B) 20 cm C) 14 cm
D) 30 cm E) 18 cm

10. Se cumple que N es IP a M^x, calcular $(n + m + x)$ si:

N	10	5/4	$20\sqrt{2}$	80	10/27
M	2	4	$\sqrt{2}$	n	m

A) 12 B) 10 C) 8
D) 6 E) 4

11. Las magnitudes A y B son DP para todos sus valores A excepto cuando B está entre 4 y 8 donde son inversamente proporcionales. Hallar el valor de A cuando B es 24; si cuando A es 4, B es 2 y las magnitudes son continuas.

A) 4 B) 8 C) 12
D) 16 E) 24

12. El voltaje debido a una esfera conductora con una carga "Q" es un punto fuera de la esfera, y a una distancia "d" del centro de la esfera es directamente proporcional a "Q" pero inversamente proporcional a "d". ¿Qué sucede con el voltaje, si "Q" se duplica y "d" se hace la mitad?

A) Se duplica B) Se hace la mitad
C) Se cuadruplica D) No varía
E) N. D.

13. Si: $A \alpha B^2$; $B^{1/2} \alpha C$ y $C^{1/2} \alpha D^{1/8}$, ¿cómo se relacionan las magnitudes A y D?

A) $A \alpha D$ B) $A \alpha 1/D$ C) $A \alpha D^2$
D) $A \alpha D^4$ E) $A \alpha D^8$

14. La magnitud A es proporcional con las magnitudes B y C; a la vez, es IP a D. Además: B es DP a E^2; C es IP a E^3; D es IP a E^4. Hallar el valor de A, cuando $E = 8$; si cuando $E = 4$, $A = 32$.

A) 32 B) 256 C) 27
D) 128 E) 1024

15. Sabiendo que la magnitud A es DP al cuadrado de la magnitud B. Determinar en qué fracción de su valor aumenta A si B aumenta en un medio de su valor.

A) 7/4 B) 5/2 C) 1/2
D) 5/4 E) 3/2

16. Si dos cantidades A y B son inversamente proporcionales con constante de proporcionalidad igual a K. ¿Cuánto vale K, si la constante de proporcionalidad entre la suma y diferencia de A y 1/B vale 6?

A) 7/5 B) 4/5 C) 5/4
D) 7/8 E) 3/4

17. El tiempo que demora una persona en armar un rompecabezas es DP al cuadrado del número de fichas e IP a su habilidad. Si 2 amigos arman un rompecabezas de 500 piezas en 3 horas, ¿cuánto tiempo demorarán en armar un rompecabezas de 1000 piezas 4 personas, sabiendo que la habilidad de éstas es igual a la de las primeras?

A) 4,5 h B) 3 h C) 18 h
D) 6 h E) 36 h

18. Un vendedor hurta en el peso ampliando una balanza de brazos desiguales que miden 20 cm y 22 cm. Una mujer compra 4,4 kg de azúcar y el tendero pone las pesas sobre el platillo correspondiente al brazo menor de la balanza, luego la mujer compra otros 4,4 kg del mismo producto y obliga al comerciante a poner las pesas en el otro platillo. En los 8,8 kg, ¿cuánto dio de más o de menos el comerciante?

A) 40 gramos más B) 30 gramos más
C) 40 gramos menos D) 30 gramos menos
E) No dio más ni menos

19. Dos veteranos de guerra tienen concedidos pensiones que son DP a las raíces cuadradas del número de balazos que recibieron. Si el primero recibió 24 balazos más que el segundo y las pensiones están en la relación de 91 a 65, ¿Cuántos balazos recibió el segundo?

A) 25 B) 20 C) 15
D) 60 E) 30

20. Si (x + y) varía como $\left(z+\frac{1}{z}\right)$; (x − y) varía como $\left(z-\frac{1}{z}\right)$ y cuando z = 2 ; x = 3, y = 1.

Halla x cuando z = 4.

A) 4,9 B) 5,9 C) 6,9
D) 7,9 E) 8,9

21. Se ha descubierto que el trabajo hecho por un hombre en una hora varía en razón de su salario por hora e inversamente a la raíz cuadrada del número de horas que trabaja por día. Se puede acabar un artículo en 6 días, cuando trabaja por 9 horas diarias a 300 soles por hora. ¿Cuántos días tardaría en terminar el mismo artículo cuando trabaja 16 horas diarias a 450 soles por hora?

A) 9 B) 6 C) 3
D) 8 E) N A.

22. El precio de los diamantes es DP al cuadrado de su peso. Al soltarlos se rompen en 3 pedazos. El peso del primero es los 2/3 del segundo; el segundo los 3/5 del tercero. Si la piedra tenía un valor de \$5000, ¿cuál es la pérdida de su valor?

A) \$1900 B) \$3100 C) \$3800
D) \$6200 E) N. A.

23. Si "x" varía a razón directa a "y" e inversa al cuadrado de "z". Cuando x = 10 entonces y = 4 y z = 14. Hallar "x" cuando y = 16 y z = 7.

A) 180 B) 160 C) 154
D) 140 E) 120

24. Se sabe que la fuerza de atracción entre 2 cuerpos varía en forma DP al producto de sus masas e IP al cuadrado de la distancia entre ellos. Si la distancia entre dos cuerpos aumenta en 20% ¿qué sucede con la fuerza de atracción entre ellos?

A) Aumenta en 25% B) Disminuye en 23/8%
C) Disminuye en 69,4% D) Disminuye en 30,55%
E) Disminuye en 29%

25. Si A varía en forma DP con B y C; y C varía en forma DP con F^3, cuando A = 160 entonces B = 5, F = 2. Si B = 8 y F = 5, ¿cuánto será A?

A) 4000 B) 3800 C) 3500
D) 3200 E) 2400

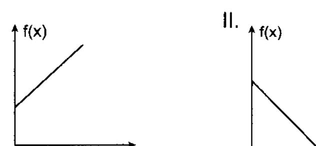
26. El precio de un cuaderno varía proporcionalmente al número de hojas e IP al cuadrado del número de cuadernos que se compran. Si cuando se compran 10 cuadernos de 50 hojas, cada uno de estos vale S/.4,20 la unidad. ¿Cuántos cuadernos de 80 hojas saldrán al precio de S/.10,50?

A) 10 B) 20 C) 30 D) 5 E) 8

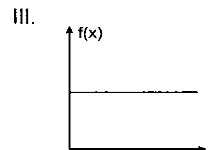
27. La resistencia eléctrica de un conductor es proporcional a su longitud L e inversamente proporcional al cuadrado de su diámetro D. ¿Qué sucede con la resistencia si L disminuye en su cuarta parte y D aumenta en su mitad?

A) Aumenta en 2/3 B) Disminuye en 2/3
C) Aumenta en 1/4 D) Disminuye en 1/4
E) N. A.

28. ¿Cuál de las siguientes gráficas indica una función de proporcionalidad directa o inversa?



III.



A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y II E) Ninguna de las 3

29. Se sabe que el precio de un diamante varía en forma DP con el cuadrado de su peso. Si una joya se divide en 4 partes iguales, ¿a qué porcentaje de su valor inicial queda reducido el valor de dicha joya?

A) 25% B) 12,5% C) 75%
D) 50% E) 30%

30. Dos cantidades son inversamente proporcionales a una tercera. ¿Cómo son entre sí estas cantidades?

A) Iguales
B) Recíprocas
C) Inversamente proporcionales
D) Directamente proporcionales
E) No se puede afirmar alguna relación

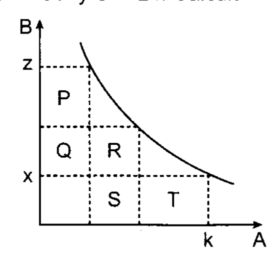
31. Sean A y B dos magnitudes tales que:
A IP B^2 (si $B \leq 24$) $\wedge$ A DP B^2 (si $B \geq 24$)
Si A = 360 cuando B = 8, ¿cuánto será el valor de A cuando B sea 600?

A) 25 B) 250 C) 2500
D) 25 000 E) 2000

32. Se tienen las ruedas A, B, C y D, donde A y B tienen un eje común, B y C engranan, C y D tienen un eje común. Si la rueda A da 75 revoluciones por segundo y se observa que la rueda D gira 25 revoluciones por segundo. Determinar el número de dientes de la rueda B si ésta tiene 20 dientes menos que la rueda C.

A) 10 B) 20 C) 30
D) 15 E) 5

33. La gráfica muestra un fenómeno inversamente proporcional entre las magnitudes A y B; además P, Q, R, S, T representan el valor de cada superficie siendo: P = 36 y S = 24. Calcular R.



A) 24 B) 15 C) 12
D) 48 E) N. A.

34. ¿Qué diámetro se debe dar a una polea para que pueda girar a una velocidad de 150 r. p. m., si otra polea de 0,60 m de diámetro accionada por la misma correa de transmisión da 80 r. p. m.?

A) 0,42 m B) 0,35 m C) 0,32 m
D) 0,52 m E) N. A.

35. La presión que ejerce un gas sobre el recipiente que lo contiene varía en razón inversa al volumen que ocupa. Calcular la presión ejercida por un gas en un recipiente esférico, sabiendo que la misma cantidad de gas en otro recipiente, cuyo radio es al del anterior como 3 es a 2, la presión sería 162 cm Hg.

A) 546 B) 585 C) 595
D) 645 E) N. A.

36. Si A es DP a B e IP a $\sqrt{C}$, en un determinado momento A vale 720. ¿Qué valor tomará A si B aumenta en un 80% y C disminuye en un 36%?

A) 1720 B) 1820 C) 1620
D) 1420 E) N. A.

37. Para dos magnitudes A y B, se cumple si: $0 < A \leq B$, entonces (A – B) DP C. Si $B \leq A$, entonces C DP $\frac{1}{(A-B)}$. Calcular B,dada la siguiente tabla:

A	B + 4	B + 12
C	12	B + 8

A) 22 B) 24 C) 26
D) 28 E) 29

38. Si el precio de un diamante es DP al cuadrado de su peso, ¿cuánto se ganará o perderá en un diamante que vale S/.720 que se parte en dos pedazos uno el doble del otro?

A) No se gana ni se pierde
B) Se gana S/.320
C) Se pierde S/.320
D) Se gana S/.240
E) Se pierde S/.240

39. El precio de un diamante es proporcional al cuadrado de su peso. Un diamante que se compró en S/.79 380 se fracciona en "n" partes, tales que sus pesos son entre sí como 1; 2; 3; ...; n; perdiéndose S/.68 208. Hallar "n".

A) 9 B) 8 C) 6
D) 7 E) N. A.

40. Se tiene tres magnitudes A, B y C tales que: A^2 es DP a B (C es constante) y A es IP a C^2 (B es constante). Si cuando A = 8; B = 36; C = 3, hallar el valor de B, cuando A = 3 y C = 6.

A) 81 B) 74 C) 15
D) 23 E) N. A.

41. La presión del viento sobre una superficie plana vertical es DP al área de la superficie y al cuadrado de la velocidad del viento. Si la presión sobre un metro cuadrado es un kilogramo cuando la velocidad del viento es 24 km/h, encontrar la presión sobre un anuncio de 2 por 8 m, durante una tormenta en la que la velocidad del viento fue 96 km/h.

A) 24 kg B) 345 kg C) 256 kg
D) 96 kg E) 64 kg

42. La velocidad de un tren es DP a la velocidad del viento e IP a la carga que transporta. Si la velocidad del viento es 80 km/h y el tren transporta 2 t, este viaja a 180 km/h. ¿En cuánto disminuye la velocidad del tren si su carga aumenta en media tonelada y la velocidad del viento disminuye 10 km/h?

A) 50 km/h B) 52 km/h C) 54 km/h
D) 56 km/h E) No disminuye

43. La siguiente tabla presenta las variaciones de las magnitudes A y B.

A	18	27	30	15	b
B	36	81	100	a	64

hallar: $\sqrt{a+b}$.

a) 10 b) 11 c) 7 d) 13 e) 15

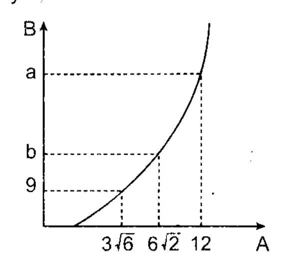
44. La siguiente tabla presenta las variaciones de las magnitudes P y Q.

P	36	144	324	9	4
Q	6	3	2	12	18

Determinar la relación correcta en P y Q.

A) P DP Q B) $\sqrt{P}$ IP Q^2 C) $\sqrt{P}$ DP Q
D) P IP Q^2 E) No se puede

45. En el diagrama se muestra la variación de las magnitudes A y B, donde A^2 DP B. Hallar el valor de: a + b

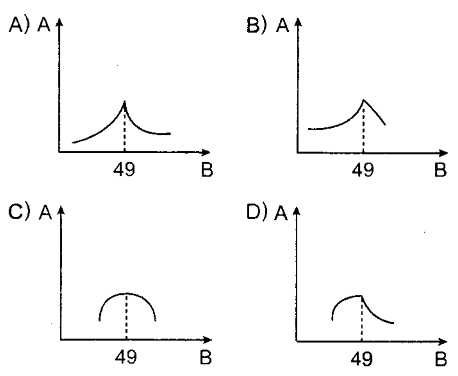


A) 36 B) 39 C) 45
D) 24 E) 18

46. Para las magnitudes A y B se cumple que:

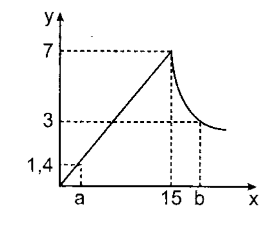
- A DP $\sqrt{B}$; cuando $B \leq 49$; $(B \in \mathbb{Z}^+)$
- A IP B; cuando $B \geq 49$

Determine la gráfica que corresponde a las variaciones de A y B.



E) No se puede determinar.

47. Del siguiente gráfico, hallar: a + b



A) 84 B) 63 C) 35
D) 38 E) 105

48. Las magnitudes A, B y C presentan las siguientes variaciones:

A	1	8	1/8
B	4	256	1/16
C	1/2	1	1/4

Se puede afirmar que:

I. A^2 DP B (cuando C = cte.)
II. A DP C^3 (cuando B = cte.)
III. C IP B (cuando A = cte.)

¿Son verdaderas?

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y III E) I y II

49. El gasto de una persona es DP a su sueldo, siendo el resto ahorrado. Un empleado cuyo sueldo es de S/.900, ahorra S/.90. ¿Cuál será su sueldo, cuando su gasto sea de S/.1260?

A) S/.1400 B) S/.1134 C) S/.1600
D) S/.1500 E) S/.1300

50. Si A α B y C α (A – B). Si cuando A aumenta 5 unidades, C aumenta 1 unidad y B aumenta 2 unidades. Determinar el valor de C, cuando A = 50.

A) 10 B) 12 C) 16
D) 20 E) 25

51. Se sabe que la fuerza deformadora de un resorte es DP a la elongación. Si para una fuerza de 64 N, el resorte sufre una elongación de 1,44 m, ¿cuánto se elongará el resorte, si se aplica una fuerza de 10 kg? (1 kg = 9,8 N)

A) 2,25 m B) 2,025 m C) 0,225 m
D) 2,520 m E) 2,205 m

52. Las magnitudes A^2 y B son IP. Si cuando A vale 20, es a B como 10 es a 9. ¿Qué valor toma A cuando B vale 72?

A) 18 B) 16 C) 10
D) 12 E) 15

53. Según la Ley de Boyle, la presión de un gas es inversamente proporcional al volumen que contiene determinada cantidad de gas. ¿A qué presión está sometido un gas, si al disminuir esta presión en 8 atmósferas, el volumen de dicho gas se triplica?

A) 10 atm B) 11 atm C) 12 atm
D) 13 atm E) 14 atm

54. Se tienen 2 magnitudes A y B que son IP de tal manera que cuando A disminuye en 30 unidades, B varía en sus 3/5. ¿Cómo varía B, cuando A aumenta en 20 unidades?

A) Aumenta 20% B) Disminuye 20%
C) Aumenta 40% D) Disminuye 40%
E) No varía

55. La pérdida de carga de agua que circula por un tubo es proporcional a la longitud del mismo y varía en razón inversa de su diámetro. Si en un tubo de 10 m de longitud y 5 cm de diámetro, la pérdida de carga fue de 15 cm, ¿cuál fue la pérdida de carga de un tubo de 51 m de largo y 17 cm de diámetro?

A) 22,5 cm B) 23 cm C) 24,5 cm
D) 25 cm E) 26 cm

56. Se tienen 2 magnitudes A y B, tales que la raíz cúbica de A es IP a B. Si cuando A = 8, B = 6. Hallar A, si B = 2.

A) 64 B) 216 C) 512
D) 1000 E) 343

57. El peso de un elefante blanco es DP a sus años. Si un elefante pesara 360 kg, su edad sería 32 años. ¿Cuántos años tendrá un elefante, sabiendo que su peso es 324 kg?

A) 28 años, 240 días B) 27 años, 240 días
C) 28 años, 243 días D) 28 años, 192 días
E) 28 años, 292 días

58. Se sabe que el caudal de un río es DP a la velocidad con que fluye el agua y a su sección transversal. ¿En qué relación se encuentran los caudales de 2 ríos que por ellos fluye el agua con velocidades que son entre sí como 2 es a 5 y que la sección de la primera es el 125% de la segunda?

A) 1/10 B) 5/8 C) 1/2
D) 3/2 E) 4/5

59. El precio de venta de un libro es DP al costo unitario de los materiales e IP a la raíz cuadrada de su tiraje. Si, para un tiraje de 3600 ejemplares y un costo de S/.20 el precio de venta fue de S/.42, ¿cuál será el precio del libro para un tiraje de 2500 y un costo de S/.30?

A) S/.75,6 B) S/.80 C) S/.72,5
D) S/.70 E) S/.81

60. La longitud de una varilla a 25 °C es 1 m y a 125 °C mide 1,005 m. ¿Cuánto medirá a una temperatura de 105 °C, sabiendo que la variación de la longitud es DP a la variación de temperatura?

A) 1,0025 m B) 1,0125 m C) 1,0004 m
D) 1,004 m E) 1,025 m

61. El precio de un terreno de forma cuadrada varía en forma DP con el cubo de su perímetro e IP con la raíz cuadrada de la distancia que lo separa de Lima. Si cuando el lado del terreno mide "a" metros y está separado "d" km de Lima su precio es "p". ¿Cuánto costará un terreno cuyo perímetro es el doble del anterior y está a "d/4" km de Lima?

A) 32 p B) 16 p C) 8 p
D) 9 p E) 10 p

62. El área cubierta por la pintura es proporcional al número de galones de pintura que se compran. Si para pintar 200 m^2 se necesitan 25 galones, ¿qué área se pintará con 15 galones?

A) 80 m^2 B) 100 m^2 C) 120 m^2
D) 150 m^2 E) 180 m^2

63. El número de cuadernos es proporcional al número de resmas que se tenga de papel y al número de obreros que trabajan. Si para hacer 100 cuadernos, se utilizaron 15 resmas y se emplearon 20 obreros, ¿cuántos obreros se emplearon para hacer 150 cuadernos con 18 resmas de papel?

A) 20 B) 25 C) 30
D) 35 E) 40

64. Una persona descubre una piedra preciosa cuyo precio es DP al cubo de su peso. Al soltarla se frac-

ciona en 3 partes: la primera es las 2/3 de la segunda y las 3/5 de la tercera. Si la piedra tenía un valor de $3125, ¿cuál fue la pérdida de su valor?

A) $2334 B) $1556 C) $1167
D) $2736 E) N. A.

65. ¿Cuál es el peso de un diamante que vale $3920, si uno de 4 quilates cuesta $1280 y el precio es proporcional al cuadrado de su peso? (Tómese un quilate equivalente a 0,2 g)

A) 1 g B) 1,1 g C) 1,2 g
D) 1,3 g E) 1,4 g

66. Timo y Raúl riegan un campo. Si cada uno hubiera regado la mitad. Timo trabajaría un día menos mientras que Raúl dos días más. ¿Cuántos días demorarán en regar el campo?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

67. En una feria el precio de la butifarra es D.P. al precio de la carne y de la lechuga es, IP al precio del pan. Los fines de semana el precio de la carne aumenta un 8% y la lechuga disminuye en igual tanto por ciento mientras que el pan disminuye en un 31% ¿Cómo varía el precio de la butifarra?

A) Aumenta en 42% B) Aumenta en 36%
C) Disminuye en 41% D) Disminuye en 40%
E) Aumenta en 44%

68. En una fábrica de polos se disponían de 40 días para hacer 480 polos con 12 máquinas trabajando 8 horas por día. Luego de haber trabajado durante 20 días ocurrió un corto circuito, por lo que se malograron, 4 máquinas y las que quedan se las hace trabajar dos horas más por día. Terminado el plazo ¿cuántas chompas falta hacer?

A) 30 B) 40 C) 50 D) 60 E) 38

69. Veinte obreros pueden hacer una obra en 23 días; luego de dos días de iniciado se retiraron 6 obreros y 9 días después se contrataron "n" obreros. Determine "n", si la obra se terminó con dos días de retraso.

A) 7 B) 6 C) 8 D) 9 E) 5

70. Ana, Betty, Carmen cosecharon un maizal y trabajaron 6; 5; 15 días respectivamente durante 10; 8 y 4 horas por día. Si se reparten S/.136, ¿cuánto le toca a Betty?

A) 40 B) 30 C) 42 D) 50 E) 51

71. Un grupo de obreros se comprometen en hacer una obra en 28 días, luego de 8 días de trabajo se retiran 6 obreros. Determine cuantos días antes de que finalice el plazo del compromiso se debe contratar 15 obreros, para que la obra se entregue en el plazo fijado.

A) 6 B) 9 C) 10 D) 5 E) 8

72. Sesenta obreros deben y pueden hacer una obra en 23 días. Luego de 9 días de iniciado se retiran 20 obreros, trabajando así 7 días luego de los cuales llegaron "a" obreros de cuádruple rendimiento que los anteriores. Calcule "a", si la obra se entregó a tiempo.

A) 6 B) 7 C) 10 D) 9 E) 11

73. Una brigada de 30 obreros pueden realizar una zanja de 60 metros en 30 días. Luego de hacer 18 metros se incorporan 5 obreros más. ¿En cuánto tiempo se hizo la obra?

A) 25 B) 26 C) 27 D) 30 E) 31

74. Veinte obreros pueden hacer una zanja en 40 días, después de 8 días trabajo se accidentan 6 obreros y no pueden ser reemplazados hasta cuatro días después, si la obra se entregó en el plazo especificado y la eficiencia de los obreros accidentados era como 35, ¿cuál era la eficiencia de los reemplazantes?

A) 42 B) 40 C) 50 D) 46 E) 51

CLAVES

1. B	11. C	21. C	31. D	41. E	51. E	61. B	71. E
2. A	12. C	22. B	32. A	42. C	52. C	62. C	72. C
3. D	13. A	23. B	33. B	43. C	53. C	63. B	73. C
4. C	14. B	24. D	34. C	44. D	54. B	64. D	74. B
5. A	15. D	25. A	35. E	45. A	55. A	65. E	75. E
6. C	16. A	26. E	36. C	46. D	56. B	66. C	76. A
7. E	17. D	27. B	37. D	47. D	57. E	67. E	77. E
8. A	18. A	28. D	38. C	48. E	58. C	68. B	78. C
9. C	19. D	29. A	39. A	49. A	59. A	69. A	79. E
10. B	20. B	30. C	40. A	50. A	60. D	70. A	80. E

Regla de tres | 12 capítulo

Al-Biruni nació el 15 de septiembre de 973 en la ciudad corasmia de Kath (en el actual Uzbekistán) y murió en Gazni (en el actual Afganistán), el 13 de diciembre de 1048 (a los 75 años). Fue un matemático, astrónomo, físico, filósofo, viajero, historiador y farmacéutico persa, uno de los intelectuales más destacados del mundo islámico.

También se lo conoció como Alberuni. Escribió cerca de 150 obras sobre historia, astronomía, astrología, matemáticas y farmacología, de las cuales apenas ha sobrevivido una quinta parte de ellas.

A la edad de 17 años fue capaz de calcular la latitud de Kath, gracias a la altitud máxima alcanzada por el Sol, y a la edad de 22 ya había escrito varias obras cortas sobre la ciencia de la cartografía. A la edad de 27 sus escritos incluían temas como el estudio del paso del tiempo (cronología) y los astrolabios, el sistema decimal, la astrología y la historia. También calculó el radio de la esfera terrestre.

Hizo contribuciones matemáticas en campos como: la aritmética teórica y práctica, la suma de series, el análisis combinatorio, la regla de tres, los números irracionales y la teoría de las razones (cocientes) numéricas.

Fuente: Wikipedia

DEFINICIÓN

La regla de tres, es una operación por medio de la cual, se busca el cuarto término de una proporción, de la cual se conocen los otros tres. La regla de tres puede resolverse por medio de las propiedades de la proporcionalidad o por el método de reducción a la unidad.
La regla de tres puede ser: simple y compuesta.

REGLA DE TRES SIMPLE

La regla de tres es simple, cuando se consideran sólo dos magnitudes, las cuales pueden ser directa o inversamente proporcionales.

Simple directa

La regla de tres simple es directa, cuando las dos magnitudes son DP.

Ejemplo:

Un móvil que se desplaza a velocidad constante, recorre 900 m en 45 s. ¿En qué tiempo recorrerá 1500 m?

Resolución:

Usando proporcionalidad. Identificando las magnitudes: espacio y tiempo.

Analizando las magnitudes: a mayor espacio recorrido, el tiempo empleado es mayor.
Luego: espacio DP tiempo

Por proporcionalidad: $\frac{\text{Espacio}}{\text{Tiempo}} = \text{cte.}$

Reemplazando: $\frac{900}{45} = \frac{1500}{t} \Rightarrow t = 1500\left(\frac{45}{900}\right) = 75 \text{ s}$

Método práctico

1.^{er} método. Si las magnitudes son DP, su producto en aspa es constante.

Tenemos:

Espacio (m)	Tiempo (s)
900	45
1500	x

$900x = 45(1500) \quad \therefore x = 75 \text{ s}$

2.° método. Si las magnitudes son DP, el valor desconocido de una de las magnitudes se iguala al valor conocido y se le multiplica por la inversa de la fracción formada por los valores de la otra magnitud.

Se tiene:

Espacio (m)	Tiempo (s)
900	45
1 500	x

$x = 45\left(\frac{1500}{900}\right) = 75 \quad \therefore x = 75 \text{ s}$

Simple inversa

La regla de tres simple es inversa, cuando las dos magnitudes son IP.

Ejemplo:

Un ciclista debe recorrer cierta distancia, tal que si lo hace a 60 km/h emplea 3 h. ¿Qué tiempo emplea, si el viaje lo hace a 75 km/h?

Resolución:

Usando proporcionalidad. Magnitudes que participan: velocidad y tiempo
Análisis: A mayor velocidad, el tiempo será menor.
Luego: Velocidad IP Tiempo
Se cumple: (Velocidad)(Tiempo) = cte.

Reemplazando: $60(3) = 75t \Rightarrow t = \frac{60(3)}{75} = 2{,}4 \text{ h}$

Método práctico

1.^{er} método. Si las magnitudes son IP, su producto en línea es constante.
Tenemos:

Velocidad (km/h)	Tiempo (h)
60	3
75	t

$60(3) = 75t \quad \therefore t = 2{,}4 \text{ h}$

2.° método. Si las magnitudes son IP, el valor desconocido de una de las magnitudes se iguala al valor conocido y se le multiplica por la fracción formada por los valores de la otra magnitud.

Se tiene:

Velocidad (km/h)	Tiempo (h)
60	3
75	t

$t = 3\left(\frac{60}{75}\right) \quad \therefore t = 2{,}4 \text{ h}$

REGLA DE TRES COMPUESTA

La regla de tres compuesta se caracteriza porque participan más de 2 magnitudes.
Las magnitudes que participan en una regla de tres compuesta son: número de obreros, horas diarias, número de días, cantidad de obra, rendimiento, dificultad, número de raciones, etc.
La regla de tres compuesta, tiene por objeto hallar el valor de una de las "n" magnitudes que participan.

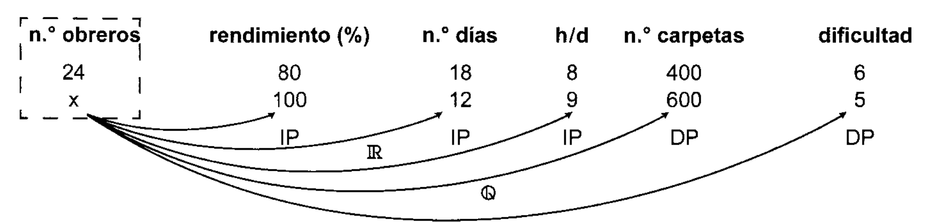
Ejemplo:

Un grupo de 24 obreros, al 80% de su capacidad, en 18 días, a razón de 8 horas diarias de trabajo pueden hacer 400 carpetas, siendo su dificultad como 6. ¿Con cuántos obreros, al 100% de su capacidad, en 12 días, a razón de 9 horas diarias de trabajo, pueden hacer 600 carpetas, siendo su dificultad como 5?

Resolución:

Usando proporcionalidad. La magnitud, donde se encuentra la incógnita se compara con cada una de las demás, resultando en cada caso, si son DP o IP, enseguida las magnitudes se dividen o se multiplican, según correspondan.

Tenemos:



Se cumple: $\dfrac{(\text{n. obreros})(\text{rendimiento})(\text{n. d as})(\text{n. h/d})}{(\text{n. carpetas})(\text{dificultad})} = \text{cte.}$

Reemplazando: $\dfrac{24(80)(18)8}{400(6)} = \dfrac{x(100)(12)(9)}{600(5)} \quad \therefore\ x = 32$

Método de las rayas. Las magnitudes que intervienen, son clasificadas en 3 partes:

CAUSA	CIRCUNSTANCIA	EFECTO
Realizadores de la obra o acción y condiciones que tienen para realizarla. **Ejemplo:** Obreros, máquinas, animales, habilidad, esfuerzo, rendimiento, etc.	Condiciones en el tiempo para realizar la obra. **Ejemplo:** Días, horas diarias, raciones diarias, etc	La obra en sí, lo realizado y los inconvenientes o condiciones que pone el medio para realización del trabajo. **Ejemplo:** Medidas de la obra, dificultades, resistencias al medio, etc.

CAUSA		CIRCUNSTANCIA		EFECTO	
n.° obreros	**rendim.**	**n.° días**	**h/d**	**n.° carpetas**	**dific.**
24	80	18	8	400	6
x	100	12	9	600	5

El producto de los valores de una de las rayas será igual al producto de valores de la otra.

Luego: $24(80)(18)(8)(600)(5) = x(100)(12)(9)(400)6 \quad \therefore\ x = 32$

Nota

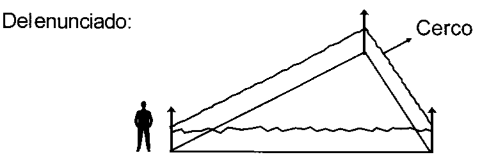
En algunos problemas de regla de tres, se deben hacer cálculos geométricos previos, así como: el perímetro, área o volumen.

Ejemplos:

1. Un obrero quiere cercar un terreno en la forma de un triángulo. ¿Qué debemos considerar?

Resolución:

Del enunciado:



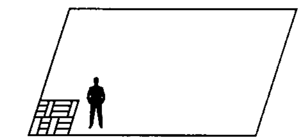
Vemos que la obra será realizada en los lados del terreno.

∴ Se considera el perímetro del terreno.

2. Un obrero debe colocar parqué en una habitación rectangular.
¿Qué debemos considerar?

Resolución:

Del enunciado:



En este caso la obra es realizada en todo el interior de la habitación.

∴ Se considera el área de la habitación.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Dos hombres y 4 niños pueden hacer una obra en 6 días, pero con 2 hombres más pueden hacer el mismo trabajo en 4 días. ¿En cuántos días haría dicha obra un hombre trabajando solo?

Resolución:

El número de obreros es IP al número de días.

n.° obreros		**n.° días**
2H + 4n	———	6
4H + 4n	———	4
		IP

Hallamos la relación del trabajo entre hombres y niños.

$4H + 4n = (2H + 4n)\left(\frac{6}{4}\right) \Rightarrow 8H + 8n = 6H + 12n$

$\Rightarrow$ 2H = 4n (el trabajo de 2 hombres lo hacen 4 niños).

Reemplazamos a los niños:

n.° obreros		**n.° días**
$2H + \underbrace{4n}_{2H} = 4H$	———	6
1H	———	x
IP		

x = 6(4) = 24 $\therefore$ Un hombre lo hará en 24 días.

2. La máquina M_1 y M_2 tienen la misma cuota de producción semanal operando 30 h y 35 h respectivamente. Si M_1 se malogra, luego de trabajar 18 h debiendo hacer M_2 el resto de la cuota. ¿Cuántas horas adicionales debe trabajar M_2?

Resolución:

M_1 y M_2 hacen la misma cuota de producción.

$M_1 = 30$ h ; $M_2 = 35$ h

M_1: Cuota hecha en 18 h $= \frac{18}{30}$

M_2: Adicionalmente hará:

$\frac{12}{30}$ (Lo que no pudo hacer M_1)

tiempo		**cuota**
35 h	———	1
x	———	$\frac{12}{30}$

$x = 35\left(\frac{12}{30}\right) = 14$

$\therefore$ M_2 trabajará 14 horas adicionales.

3. Un albañil pensó hacer un muro en 15 días pero tardó 6 días más por trabajar dos horas menos cada día. ¿Cuántas horas trabajó diariamente?

Resolución:

Sea "x" el número de horas diarias de trabajo.

	n.° días	**h/d**
Lo pensó hacer:	15	x
Lo hizo:	21	(x − 2)
	IP	

$x - 2 = x\left(\frac{15}{21}\right) \Rightarrow x = 7$

$\therefore$ Trabajó 5 horas diariamente.

4. César al comprar una docena de lapiceros recibe 3 de regalo y al vender una decena, da 2 de regalo. Si en total, César compró 1944 lapiceros, ¿cuántos lapiceros vendió César?

Resolución:

En la compra: (recibe 3 de regalo)

1 doc. < > 12 lap. compr.	———	15 lap. recibidos
1944 lap. compr.	———	x lap. recibidos
DP		

$x = 15\left(\frac{1944}{12}\right) = 2430$ lap. recib.

En la venta: (da 2 de regalo) (puede entregar todos los que ha recibido)

1 decena < > 10 lap. vend.	———	12 lap. entreg.
y lap. vend.	———	2430 lap. entreg.
		DP

$y = 10\left(\frac{2430}{12}\right) = 2025$

$\therefore$ César vendió 2025 lapiceros.

5. Se hacen disolver 240 g de azúcar en 5 litros de agua. ¿Cuántos litros de agua deberán añadirse a esta mezcla para que un litro de la nueva mezcla no tenga sino 8 g de azúcar?

Resolución:

Se añaden x L de agua:

mezcla (L)		**azúcar (g)**
(5 + x)	———	240
1	———	8
		DP

$(5 + x)8 = 240 \Rightarrow x = 25$

$\therefore$ Se añaden 25 L de agua.

6. La hierba crece en el prado con igual rapidez y espesura. Se sabe que 60 vacas se la comerían en 25 días y 40 en 45 días. ¿Cuántas vacas se comerían la hierba en 75 días?

Resolución:

De las vacas que están en el prado, «n» de ellas comerán exclusivamente el crecimiento de la hierba, y las restantes la cantidad inicial de pasto.

I) 60 vacas, 25 días $\begin{cases} \text{Crecimiento del pasto: n} \\ \text{Cantidad inicial: (60 – n)} \end{cases}$

II) 40 vacas, 45 días $\begin{cases} \text{Crecimiento del pasto: n} \\ \text{Cantidad inicial: (40 – n)} \end{cases}$

III) x vacas, 75 días $\begin{cases} \text{Crecimiento del pasto: n} \\ \text{Cantidad inicial: (x – n)} \end{cases}$

Comparando las cantidades:
De (I) y (II):

n.° vacas		**n.° días**
60 – n	———	25
40 – n	———	45
		IP

$$(40 - n) = (60 - n)\left(\frac{25}{45}\right) \Rightarrow n = 15$$

Hallamos "x": **n.° vacas** — **n.° días**

De (I) y (II)

60 – 15 = 45	———	25
x – 15	———	75

$$x - 15 = 45\left(\frac{25}{75}\right) \Rightarrow x = 30 \quad \therefore \text{ Son 30 vacas.}$$

7. Veintisiete náufragos tenían agua para 30 días y comida para 20 días. Después de pasar 6 días, mueren 9 de los náufragos. ¿Para cuántos días habrá agua pero no comida para los que quedan?

Resolución:

Los días que habrá agua:

Después de 6 días:

27 náufragos tendrían agua para 24 días
18 náufragos tienen agua para x días

$\Rightarrow 27(24) = 18x \Rightarrow x = 36$

Hay agua para 36 días.

Los días que habrá comida:

Después de 6 días:

27 náufragos tendrían comida para 14 días
18 náufragos tienen agua para y días

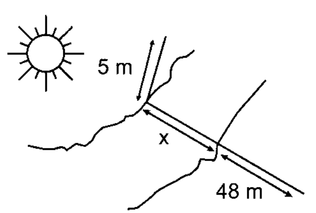
$\Rightarrow 27(14) = 18y \Rightarrow y = 21$

Hay comida para 21 días.

$\therefore$ Habrá agua pero no comida: 36 – 21 = 15 días.

8. Un bastón de 84 cm de largo proyecta 25,2 m de sombra. Hallar el ancho de un río si se colocó una estaca de 5 m en una de sus orillas y cayendo 48 m de su sombra en tierra, pero en la otra orilla.

Resolución:



bastón		**sombra**
84 cm	———	25,2 m
5 m < > 500 cm	———	(x + 48) m

El tamaño del bastón y la longitud de la sombra son DP:

$$x + 48 = 25{,}2\left(\frac{500}{84}\right) \Rightarrow x + 48 = 150$$

$\Rightarrow x = 102$ m $\quad\therefore$ El ancho del río es 102 m.

9. La cantidad de gasolina que tiene un auto al partir es igual a 5/8 de la capacidad del tanque. Si después de recorrer 15 km le quedan 7/12 del tanque, ¿cuántos kilómetros puede recorrer con el tanque lleno?

Resolución:

Consideramos la distancia recorrida y el consumo de gasolina.

consumo		**dist. recorrida (km)**
$\frac{5}{8} - \frac{7}{12} = \frac{1}{24}$	———	15
1	———	x

$x = 15(24) = 360$

$\therefore$ Con el tanque lleno recorre 360 km.

10. Un hombre y dos mujeres pueden hacer una obra en 10 días. Determinar el tiempo necesario para que 2 hombres y una mujer puedan hacer un trabajo 4 veces considerable, sabiendo que el trabajo de un hombre y el de una mujer están en la misma relación que los números 3 y 2.

Resolución:

Consideramos como magnitudes al número de obreros, el número de días y la cantidad de obra.

n.° obreros		**n.° días**		**cant. obra**
1H + 2M	———	10	———	1
2H + 1M	———	x	———	4
IP				DP

Pero: $\frac{H}{N} = \frac{3a}{2b}\begin{cases} H = 3a \\ M = 2a \end{cases}$

Por regla de tres: $x = 10\frac{\overbrace{(1H + 2M)}^{7a}}{\underbrace{(2H + 1M)}_{8a}}4 \Rightarrow x = 35$

$\therefore$ Emplean 35 días.

11. Quince máquinas pueden hacer un trabajo en 24 días. ¿Cuántas máquinas adicionales cuya eficiencia es 60% de las anteriores se necesitarán para hacer un trabajo que es el 80% mayor en el mismo tiempo?

Resolución:

Como el rendimiento y el número de máquinas son IP se tendrá:

n.° máquinas	n.° días	cant. obra
15	24	100%
15 + 0,60x	24	180%
		DP

$15 + 0,6x = 15\left(\frac{180}{100}\right) \Rightarrow x = 20$

∴ Son 20 máquinas adicionales.

12. Seis obreros han tardado 12 días para cavar la mitad de una zanja. ¿Cuánto tiempo demorarán si se aumentan 2 obreros más, 50% más eficientes, para cavar la otra mitad de la zanja?

Resolución:

n.° obreros	n.° días	cant. obra
6	12	1/2
$\underbrace{6 + 2(1,5)}_{9}$	x	1/2
I.P.		

$x = 12\left(\frac{6}{9}\right) = 8$ ∴ Tardarán 8 días.

13. Cuarenta obreros trabajando 10 horas diarias, pueden terminar en 30 días una obra cuya dificultad es como 3. ¿Cuántos obreros, cuyas eficiencias son 5/7 de los anteriores, se requiere para que terminen en 28 días, un trabajo similar, pero de dificultad como 4, trabajando 8 horas diarias?

Resolución:

n.° obreros	rendi.	n.° días	h/d	dif.
40	7	30	10	3
x	5	28	8	4

Luego: $40(7)(30)(10)4 = x(5)(28)(8)3$

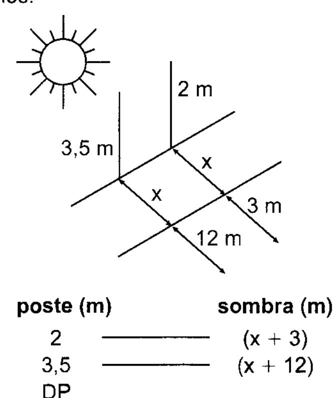
$\Rightarrow x = 100$

∴ Se necesitarán 100 obreros.

14. Hallar el ancho de un río, sabiendo que para medirlo se usan 2 estacas colocadas en una orilla de él y se miden simultáneamente las sombras que hacen en tierra en el otro lado, con los siguientes resultados: con la estaca de 2 metros de alto se midieron 3 m de sombra en tierra y para una estaca de 3,5 m se midieron 12 m de sombra en tierra.

Resolución:

Tenemos:



poste (m)	sombra (m)
2	(x + 3)
3,5	(x + 12)
DP	

Como la longitud del poste y la de su sombra son DP se tiene:

$x + 12 = (x + 3)\frac{3,5}{2} \Rightarrow x = 9$

∴ El ancho del río es 9 m.

15. Un navío partió con una tripulación de 80 hombres, llevando víveres para 20 días. Después de 8 días de navegación, se dio albergue a 40 viajeros, procedentes del naufragio de otro buque. ¿Cuántos días más pudo durar la navegación, dando ración completa a todos los tripulantes y viajeros?

Resolución:

La fracción del tiempo es la misma fracción de víveres que han consumido.

	n.° hombres	n.° días	víveres
Inicialmente:	80	20	1
En 8 días:	120	x	12/20
Luego:	IP		DP

$x = 8\left(\frac{80}{120}\right)\left(\frac{12}{8}\right) \Rightarrow x = 8$

∴ Los víveres durarán 8 días más.

16. Veinticinco obreros hacen 5/8 de una obra en 10 días; a partir de este momento, se contratan "n" obreros más cada día, terminándose 2 días antes de la fecha en que terminarían los 25 obreros, si hubieran continuado la obra solos. Hallar "n".

Resolución:

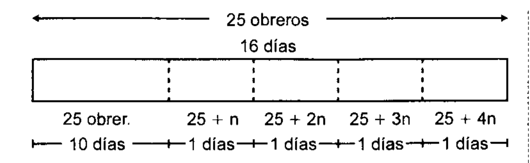
Hallamos el tiempo inicial para que terminen la obra:

Sabemos que:

$\frac{5}{8}$ de obra ——— 10 días

1 obra ——— x días $\Rightarrow x = 10\left(\frac{8}{5}\right) = 16$ días

Luego, consideramos la contratación de "n" obreros cada día.



Como el número de obreros es IP al número de días se cumple:

$25(16) = 25(10) + (25 + n) + (25 + 2n) + (25 + 3n) + (25 + 4n)$

$\Rightarrow n = 5 \quad \therefore$ El valor de "n": 5.

17. César es el doble de rápido que Martín y éste es el triple de rápido que Iván. Si entre los tres, pueden terminar una tarea de matemática en 18 h, ¿en cuántas horas Martín e Iván harán la misma obra?

Resolución:

Del enunciado: C = César; M = Martín; I = Iván

Consideramos la rapidez de los obreros:

$$\left.\begin{matrix} C = 2M \\ M = 3I \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} I = 1 \\ M = 3 \\ C = 6 \end{matrix}$$

Luego:

	rapidez	n.° h
C, M, I:	10 ——	18
M, I:	4 ——	x
	IP	

Luego: $10(18) = 4x \Rightarrow x = 45$

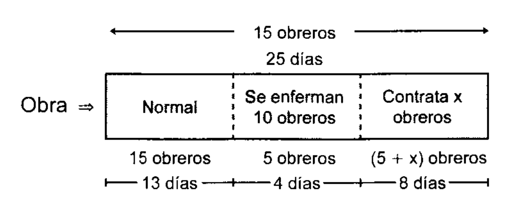
$\therefore$ Martín e Iván lo terminan en 45 h.

18. Una cuadrilla de 15 obreros puede terminar un trabajo en 25 días; al cabo de 13 días de labor se enferman 10 de los obreros y 4 días más tarde, se comunica al contratista para que entregue el trabajo en la fecha fijada previamente. ¿Cuántos obreros adicionales tendrá que tomar para cumplir con tal exigencia?

Resolución:

Haciendo un diagrama:

Inicialmente:



Como el número de obreros es IP con el número de días, se cumple:

$15(25) = 15(13) + 5(4) + (5 + x)8 \Rightarrow x = 15$

$\therefore$ Se contratan 15 obreros.

19. Un ejército de 450 hombres tienen víveres para 50 días a razón de 2 raciones diarias; al cabo de 30 días reciben 50 soldados con víveres para 20 días a razón de 3 raciones diarias. Si se juntan los víveres y consumen a razón de 6 raciones diarias, calcular para cuántos días alcanzan los víveres.

Resolución:

Primer ejército:

Total de raciones:	450(50)(2) =	45 000 raciones
Consumo de 30 días:	450(30)(2) =	27 000 raciones
	quedan:	18 000 raciones

Segundo ejército:

Total de raciones: $50(20)(3) = 3000$ raciones

Los dos ejércitos:

n.° soldados: 500 n.° raciones diarias: 6

n.° días: x

Se cumple: $18\,000 + 3000 = (500)(6)x \Rightarrow x = 7$

$\therefore$ Los víveres durarán para 7 días.

20. Para pintar la fachada de una casa de 150 m², se han empleado 10 personas, que demorarán 20 días de 8 horas de trabajo. ¿Cuántas horas de trabajo diario habrá que aumentar para que 20 personas, 50% menos hábiles respecto de las primeras, pinten una fachada de 225 m² en 16 días?

Resolución:

n.° pers.	rend.	n.° días	h/d	obra
10	100%	20	8	150
20	50%	16	(8+x)	225

Luego: $10(100)(20)(8)225 = 20(50)(16)(8 + x)150$

$\Rightarrow x = 7 \quad \therefore$ Se aumenta 7 horas de trabajo diario.

21. Quince hombres y 10 mujeres pueden pintar 20 m² en 40 días; después de 10 días de trabajo, se retiran 5 hombres y 5 mujeres. Calcular con cuántos días de retraso se terminará de pintar la pared de 20 m², si, en un mismo tiempo, un hombre realiza el doble de lo que hace una mujer.

Resolución:

Sabemos que, desde el punto de vista de trabajo: 1 H < > 2 M

Consideramos el trabajo hecho por mujeres:

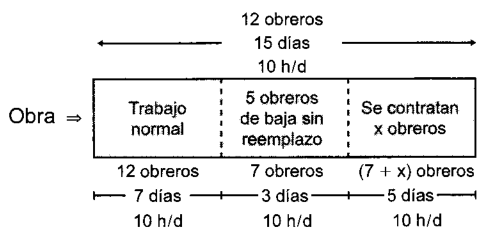
	n.° obreros	n.° días	obra (m²)
	15H + 10M	40	20
En 10 días:	$\underbrace{15H}_{30M} + 10M = 40M$	10	$\frac{1}{4}(20) = 5$
Se retiran 5 H y 5 M:	$\underbrace{10H}_{20M} + 5M = 25M$	x	15
	IP		DP

$$x = 10\left(\frac{40}{25}\right)\left(\frac{15}{5}\right) = 48$$

Vemos que, el tiempo total empleado es:
10 + 48 = 58 días.
∴ Los días de retraso: 58 − 40 = 18 días.

22. Un grupo de 12 obreros pueden acabar un trabajo en 15 días trabajando 10 h/d. Después de trabajar 7 días, 5 obreros se dan de baja y no son reemplazados sino al cabo de 3 días. ¿Cuántos obreros habría de contratarse para acabar el trabajo en el tiempo previsto?

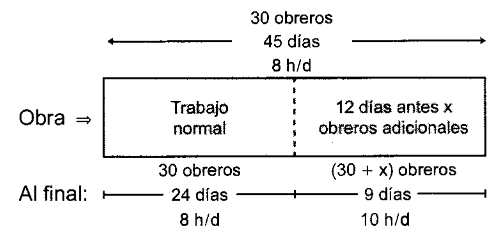
Resolución:
Haciendo un diagrama:
Inicialmente:



Luego como las magnitudes que intervienen son IP se cumple:
12(15)10 = 12(7)10 + 7(3)10 + (7+x)(5)10
⇒ x = 8 ∴ Se contratan 8 obreros.

23. Se pensó terminar una obra en 45 días, empleando 30 obreros, laborando 8 h/d. Luego de 24 días de trabajo, se pidió terminar la obra 12 días antes del plazo fijado. ¿Cuántos obreros más se necesitarán, si se aumentó en 2 h la jornada de trabajo?

Resolución:
Haciendo un diagrama:
Inicialmente:



Luego como las magnitudes que intervienen son IP se cumple:
(30)(45)8 = (30)(24)8 + (30+x)(9)(10) ⇒ x = 26
∴ Se necesitan 26 obreros adicionales.

24. Un contratista se compromete a construir dos secciones de un ferrocarril que ofrecen las mismas dificultades desde el punto de vista de trabajo. En cada sección se emplea 80 obreros y al cabo de 50 días se observa que mientras los primeros han hecho los 3/8 de trabajo, los otros han construido los 5/7 del suyo. ¿Cuántos obreros de la segunda sección deberán pasar a la primera para que ésta quede terminada conforme a lo convenido en 120 días?

Resolución:
Hallamos la relación de los rendimientos de los dos grupos.

	cant. obra	rendi.
1.ª cuadrilla	3/8	R_1
2.ª cuadrilla	5/7	R_2

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{3/8}{5/7} = \frac{21}{40}$$

Pasan a la 1.ª cuadrilla, x obreros de la 2.ª
Considerando a los obreros con su respectivo rendimiento.

	n.° obreros	n.° días	cant. obra
1.ª cuadrilla:	80(21)	50	$\frac{3}{8}$
grupo mixto:	80(21) + 40x	70	$\frac{5}{8}$
		IP	DP

$$80(21) + 40x = 80(21)\left(\frac{50}{70}\right)\left(\frac{5}{3}\right) \Rightarrow x = 8$$

∴ Pasan 8 obreros de la 2.ª cuadrilla.

25. Sabiendo que 20 hombres pueden hacer una pista de 80 km en 12 días. Después de cierto tiempo de trabajo se decide aumentar la longitud en 40 km, para lo cual se contratan 10 obreros más acabando la obra a los 15 días de empezada. ¿A los cuántos días se aumentó el personal?

Resolución:

	n.° homb.	n.° días	pista (km)
	20	12	80
En "d" días:	20 ——	d	$\left(\frac{d}{12}\right)80$
	30 ——	15 − d	$\left(1 - \frac{d}{12}\right)80 + 40$
			$120 - \left(\frac{20}{3}\right)d$

Por el método de las rayas:

$$20d\left(120 - \frac{20}{3}d\right) = 30(15 - d)80\left(\frac{d}{12}\right) \Rightarrow d = 9$$

∴ El personal se aumentó a los 9 días.

26. Una obra, cuya dificultad es como 7, se puede hacer con 14 obreros, con 30% de rendimiento en 10 días, de 12 horas de trabajo. ¿En cuántos días, de 14 horas de trabajo, se hará una obra cuyo volumen es el doble del anterior, con una dificultad como 21, 15 obreros con un rendimiento del 60%?

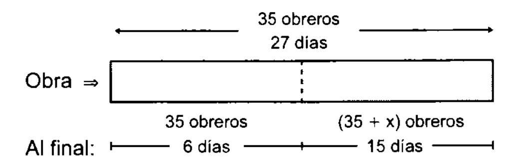
Resolución:
Por el método de las rayas:

n.° ob.	rendi.	n.° días	h/d	obra	dif.
14	30%	10	12	1	7
15	60%	x	14	2	21

Luego: $14(30)(10)(12)(2)21 = 15(60)(x)(14)(1)7$
$\Rightarrow x = 24$ $\quad\therefore$ Se tardarán 24 días.

27. Treinta y cinco obreros pueden hacer una obra en 27 días; al cabo de 6 días de trabajo se les unió un cierto número de obreros de otro grupo, de modo que en 15 días más terminaron la obra. ¿Cuántos obreros eran del segundo grupo?

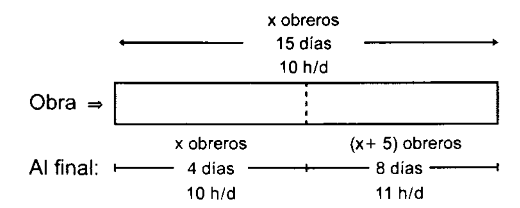
Resolución:
Haciendo un diagrama:
Inicialmente:



Se cumple: $35(27) = 35(6) + 15(35 + x) \Rightarrow x = 14$
$\therefore$ Son 14 obreros del segundo grupo.

28. Un grupo de obreros hacen una obra en 15 días, trabajando 10 h/d; al 4.° día deciden terminar la obra 3 días antes de lo establecido, por lo que aumentan en 1 h el trabajo diario y el número de obreros en 5. ¿Cuántos obreros trabajaron inicialmente?

Resolución:
Haciendo un diagrama:
Inicialmente:



Luego: $x(15)(10) = x(4)(10) + (x + 5)(8)(11)$
$\Rightarrow x = 20$ $\quad\therefore$ Inicialmente trabajan 20 obreros.

29. Un grupo de 20 obreros se comprometen hacer una zanja de 12 m de largo, 9 m de ancho y 4 m de profundidad en 18 días. Al término del octavo día se les pide que la profundidad de la zanja sea de 6 m. ¿Con cuántos obreros tendrán que reforzarse para hacer lo que falta de la obra ampliada, en el tiempo fijado?

Resolución:
La fracción del tiempo de trabajo es la misma fracción de obra que han avanzado.

Es decir, en 8 días han hecho $\frac{8}{18}$ de la zanja.

	n.° obreros	obra (m³)	n.° días
	20	(12)(9)(4)	18
En 8 días:	20	$\underbrace{\frac{8}{18}(12)(9)(4)}_{192}$	8
Refuerzan x ob.	(20 + x)	$\underbrace{\frac{10}{18}(12)(9)(4) + (12)(9)(2)}_{456}$ DP	10 IP

$$\Rightarrow 20 + x = 20\left(\frac{456}{192}\right)\left(\frac{8}{10}\right) \Rightarrow x = 18$$

$\therefore$ Se refuerza con 18 obreros.

30. Se necesita 16 hombres o bien 12 mujeres para coser 240 pantalones con doble costura en 10 días trabajando 8 h diarias. ¿Cuántas mujeres se deben añadir a 12 hombres que van a coser 300 pantalones de triple costura en 12 días trabajando 10 h diarias?

Resolución:
El trabajo de 16 hombres lo hacen 12 mujeres. Hallamos la relación desde el punto de vista del trabajo:
$\Rightarrow$ 4 hombres < > 3 mujeres

n.° obreros	n.° pantal.	n.° costura	n.° h
16 hom. o 12 muj.	240	2	10.8
$\underbrace{\underbrace{12\text{ hom.}}_{9\text{ muj.}} + x\text{ muj.}}_{(x+9)\text{ muj.}}$	300	3	12(10)
	DP	DP	IP

$$\text{Se cumple: } x + 9 = 12\left(\frac{300}{240}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\frac{(10\times 8)}{(12\times 10)} \Rightarrow x = 6$$

$\therefore$ Se contratan 6 mujeres.

31. Dos obreros pueden realizar un trabajo en 15 días; si uno de ellos se demora 16 horas más que el otro, trabajando solo, ¿en qué tiempo haría la obra trabajando solo el otro?

Resolución:
Sean los obreros A y B.

El tiempo que emplea en hacer la obra, por separado:
A = (x+16) días; B = x días; A y B = 15 días

Por reducción a la unidad:

$$\frac{1}{x+16} + \frac{1}{x} = \frac{1}{15} \Rightarrow x = 24 \text{ días}$$

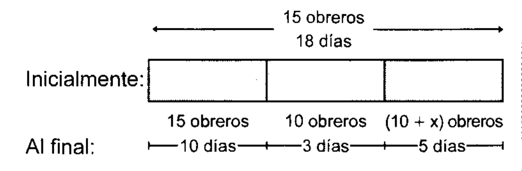
Tiempo que emplea cada obrero:
A = 40 días; B = 24 días
$\therefore$ El otro obrero emplea 24 días.

32. Un grupo de 15 obreros se han comprometido a realizar una obra en 18 días; trabajan juntos 10 días, al término de los cuales, se retiran 5, no

encontrándose reemplazo hasta después de 3 días en que se incorpora una cantidad adecuada de obreros para terminar la obra en el plazo fijado. Si a los obreros que se incorporaron le pagan 50% más que a los otros, ¿cuánto es el jornal de cada obrero antiguo si el último día se pagó en jornales

Resolución:

Haciendo un gráfico:



Se cumple: Obra inicial = Obra final

$15(18) = 15(10) + 10(3) + (10 + x)5$

$\Rightarrow x = 8$ obreros

Sea "p" el pago del jornal de cada obrero antiguo:

Del jornal en el último día:

$10p + (8)150\% \quad p = 2090$

$p = S/.95$

$\therefore$ El jornal de cada obrero antiguo: S/.95.

33. Diez obreros pueden hacer una obra en 12 días trabajando 6 horas diarias. Después de iniciados los trabajos se quiere terminar en sólo 8 días, disminuyendo 1/6 de la obra y aumentando a 8 horas diarias de trabajo. ¿Cuántos días trabajaron 8 horas diarias?

Resolución:

	n.° obreros	**cant. obra**	**n.° días**	**n.° h/d**
	10	1	12	6
A los "x" días:	10	$\frac{x}{12}$	x	6
Lo que falta:	10	$\left(\frac{5}{6}-\frac{x}{12}\right)$	(8 − x)	8
	DP		DP	DP

$$\frac{5}{6}-\frac{x}{12}=\left(\frac{x}{12}\right)\frac{(8-x)}{x}\left(\frac{8}{6}\right)$$

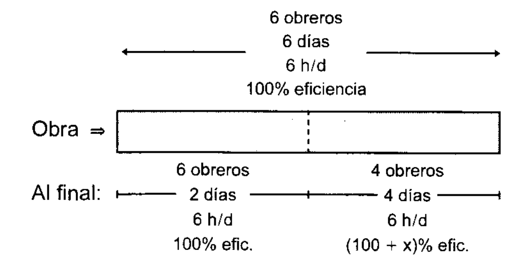
Reduciendo: $10 - x = \frac{4}{3}(8 - x) \Rightarrow x = 2$

$\therefore$ Trabajaron 8 h/d: 8 − 2 = 6 días.

34. Seis obreros se comprometieron en hacer una obra en 6 días, trabajando 6 horas diarias. Si después de 2 días de trabajo, se retiran 2 obreros, ¿en qué porcentaje debe aumentar la eficiencia de cada uno de los obreros restantes, para que puedan entregar la obra en el plazo fijado?

Resolución:

Haciendo un gráfico:



Se cumple: Obra inicial = Obra final

$6(6)(6)100 = 6(2)(6)100 + 4(4)(6)(100+x)$

$\Rightarrow x = 50 \quad \therefore$ La eficiencia aumenta 50%.

35. Una guarnición de soldados tiene víveres para 80 días, si consumen 120 g por hombre y por día; pero ese día ocurre una batalla donde mueren 1/3 de los soldados. ¿En cuánto debe disminuir la ración diaria si se quiere que los víveres alcancen 70 días más de lo previsto?

Resolución:

Del enunciado:	**n.° soldados**	**n.° días**	**ración**
Inicialmente:	S	80	120
	$\frac{2}{3}$S	150	(120 − x)

Usando el método de las rayas:

$S(80)(120) = \frac{2}{3}S(150)(120 - x)$

Simplificando: $96 = 120 - x \Rightarrow x = 24$

$\therefore$ La ración diaria disminuye: 24 g.

36. Una guarnición de 200 hombres tiene víveres para 30 días a razón de 5 raciones diarias. ¿Cuántas raciones diarias le tocaría a cada hombre, si deben durar 5 días menos, pero el número de hombres se incrementa en el 100%?

Resolución:

Tenemos:	**n.° solds.**	**n.° días**	**racs.**
Inicialmente:	200	30	5
H aumentan 100%	200(2)	25	x

Usando el método de las rayas:

$\Rightarrow 200(30)(5) = 200(2)(25)x \Rightarrow x = 3$

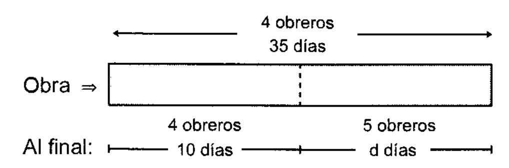
$\therefore$ A cada hombre le tocaría 3 raciones diarias.

37. Cuatro obreros se comprometen a realizar una obra en 35 días. Si después del décimo día llega un obrero más, ¿cuántos días antes del plazo terminarán?

Resolución:

Haciendo un gráfico:

Inlclalmente:



Como, n.° obreros IP n.° días:

Se cumple: Obra inicial = Obra final
$4(35) = 4(10) + 5d \Rightarrow d = 20$ días

Tiempo total: $10 + 20 = 30$ días
∴ La obra se termina 5 días antes.

38. Ocho hombres construyen 8 departamentos en un tiempo de 8 meses, trabajando con un cierto esfuerzo. ¿Cuántos hombres de la misma habilidad que los anteriores, pero que trabajen con el doble de esfuerzo, se necesitarán para construir el doble del departamento, en un tiempo 50% menor que el anterior?

Resolución:

Tenemos:	n.° hombres	n.° meses	n.° dept.	esfuerzo
	8	8	8	1
	x	4	16	2
		IP	IP	DP

Por regla de tres: $x = 8\left(\frac{8}{4}\right)\left(\frac{8}{16}\right)\left(\frac{2}{1}\right) \Rightarrow x = 16$

∴ Se necesitarán 16 hombres.

39. Ocho obreros pueden preparar una cancha de fulbito de 12 m de ancho y 25 m de largo en 5 días, trabajando 10 h/d. Si 4 de los obreros aumentaran su rendimiento en 25%, ¿en qué tiempo podrán hacer otra cancha de fulbito de 18 m de ancho y 24 m de largo, trabajando 2 h menos cada día?

Resolución:

n.° obreros	obra	n.° días	h/d
8	12(25)	5	10
$\underbrace{4+4(1,25)}_{9}$	18(24)	x	8
IP		DP	IP

$x = 5\left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{18\times24}{12\times25}\right)\left(\frac{10}{8}\right) = 8$ ∴ En 8 días.

40. Dos cuadrillas de obreros pueden hacer una misma obra por separado. La primera de 18 hombres, lo puede hacer en 20 días, trabajando 8 h/d; la segunda de 15 hombres, lo puede hacer en 18 días, trabajando 10 h/d. Si el contratista forma un grupo mixto: 8 hombres de la primera con 15 de la segunda para que trabajen 10 h/d, ¿en cuántos días terminarán dicha obra?

Resolución:

Las dos cuadrillas tienen distinto rendimiento:

	n.° ob.	n.° días	h/d	rend.
1.ª cuadrilla	18	20	8	R_1
2.ª cuadrilla	15	18	10	R_2

$\Rightarrow (18)(20)(8)R_1 = (15)(18)(10)R_2$

$\frac{R_1}{R_2} = \frac{15}{16}$ $\begin{cases} R_1 = 15 \\ R_2 = 16 \end{cases}$

Hallamos el tiempo que emplearía el grupo mixto. El número de obreros es IP al rendimiento.

	n.° hombres	n.° días	h/d
1.ª cuadrilla	18(15)	20	8
grupo mixto:	$\underbrace{8(15) + (15)16}_{24(15)}$	x	10

Luego: $18(15)(20)(8) = 24(15)(x)(10) \Rightarrow x = 12$

∴ El grupo mixto emplearía 12 días.

41. Si 27 obreros pueden hacer una obra en 18 días, al cabo de 6 días se incorporaron un grupo de obreros para entregar dicha obra en 8 días antes de lo establecido. Halle el número de obreros que se incorporaron.

Resolución:

Los obreros que llegan (x) trabajan 4 días (18 – 6 – 8) y hacen lo que debieron de trabajar 27 obreros en los 8 días que han adelantado:

$4x = 27(8) \Rightarrow x = 54$ obreros

42. Un grupo de obreros deben y pueden terminar una obra en 13 días, trabajando 6 horas diarias. Después de 3 días de trabajo se determinó que la obra quedara terminada 4 días antes del plazo inicial y para eso se contrataron 5 obreros más y todos trabajaron 8 horas diarias, terminando la obra en el nuevo plazo fijado. Halle el número inicial de obreros.

Resolución:

La obra que se adelanta, debió de ser hecha por los x obreros en 4 días trabajando 6 h/d

Esta obra es hecha por:
(a) x obreros en los 6 días que falta, trabajando 2 h/d más; y (b) 5 obreros, en 6 días, 8 h/d

$\Rightarrow x(4)(6) = x(6)(2) + 5(6)(8)$

∴ $x = 20$ obreros

43. Un lote de terreno está formado por 12 hectáreas de terreno A y 18 hectáreas de terreno B. Un agricultor experimentado siembra en 3 días una hectárea de terreno A, mientras que un novato lo hace en 5 días. ¿En cuántos días sembrarán todo el terreno, trabajando juntos, sabiendo que el terreno B tiene una dureza que es doble que el terreno A?

Resolución:

Del enunciado, en 1 día:

Hace el agricultor: 1/3
Hace el novato: 1/5
Luego: juntos hacen 1/3 + 1/5 = 8/15

$$\frac{\text{trabajo diario} \times \text{n.° días}}{\text{dificultad de la obra}} = \text{cte}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{(1/3)3}{1}}_{\text{agricultor}} = \underbrace{\frac{(8/15)x}{12+(18\times 2)}}_{\text{trabajando juntos}}$$

$\therefore$ x = 90 días

44. Diez peones se demoraron 15 días de 7 h/d de trabajo en sembrar un terreno de 25 m de largo por 2 m de ancho. ¿Cuántos días de 8 horas diarias de trabajo se demorarán en sembrar otro terreno de 40 m de largo por 2 m de ancho 15 peones doblemente hábiles?

Resolución:

$$\frac{\text{n.° peones} \times \text{n.° días} \times \text{n.° h/d} \times \text{habil.}}{\text{área}} = \text{cte}$$

$$\frac{(10)(15)(7)(1)}{25(2)} = \frac{(15)(x)(8)(2)}{40(2)} \quad \therefore x = 7$$

45. Cincuenta obreros pueden hacer 75 km de carretera en la costa trabajando 40 días en jornadas de 9 horas por día. ¿Cuántos días tardarán si se añaden 100 obreros más con una eficiencia 50% mayor que los 50 obreros mencionados anteriormente, para hacer 300 km de una carretera en la selva donde el grado de dificultad es 3 veces del que se tiene en la costa trabajando en jornadas de 8 horas por día?

Resolución:

$$\frac{(50)(40)(9)}{75(1)} = \frac{(50 + 100 \times 150x)(x)(8)}{300(3)}$$

$\therefore$ x = 135 días

46. Dieciocho obreros pueden realizar una obra en 20 días pero al cabo de 5 días, 8 estos obreros se retiraron y después de 7 días más, todos son reemplazados por un cierto número de obreros para entregar la obra en el plazo establecido. Halle este número de obreros.

Resolución:

Con 18 obreros, harían el trabajo normal, pero se necesita x obreros más para compensar lo que dejaron de hacer 8 obreros

(8 días)(x obreros) = (7 días)(8 obreros) $\Rightarrow$ x = 7
Se contrata 18 + 7 = 25 obreros

47. A un obrero por x días de trabajo de 10 horas diarias le pagan S/.430. ¿Cuántos días ha trabajado si otro obrero por trabajar 15 días de 14 horas diarias y doblemente hábil que el anterior recibe S/.1505?

Resolución:

$$\frac{\text{n.° días} \times \text{n.° h/d} \times \text{habilidad}}{\text{sueldo}} = \text{cte.}$$

$$\Rightarrow \frac{x(10)(1)}{430} = \frac{15(14)(2)}{1505} \quad \therefore x = 12$$

48. Un barco ha transportado 32 sacos de papas en 8 días, trabajando 8 horas diarias. ¿En cuántos días transportará 50 sacos de doble peso que los anteriores, reduciendo la distancia en un 20% y trabajando 2 horas diarias más?

Resolución:

$$\frac{\text{n.° días} \times \text{n.° horas/diarias.}}{\text{n.° sacos} \times \text{peso} \times \text{distancia}} = \text{cte}$$

$$\frac{8(8)}{32(1)d} = \frac{x(10)}{50(2)(80\%d)} \quad \therefore x = 16 \text{ días}$$

49. Dieciocho obreros de un mismo rendimiento se comprometen a hacer una obra en 30 días, pero cuando hacen las 2/5 parte de la obra, 10 de ellos abandonan. ¿Qué rendimiento con respecto a los primeros deben tener los 8 nuevos que se contraten para terminar la obra en el plazo pedido?

Resolución:

10(100%) = 8(x%)
Donde x = 125
Los nuevos deben de tener 25% más

50. La farmacia A vende sus productos ofreciendo dos descuentos sucesivos del 25% y 20% del precio de costo. Mientras que la farmacia B vende otorgando 2 descuentos sucesivos del 30% y 30%, pero considerando estos porcentajes con respecto al precio de venta. ¿Cuál de las farmacias ofrece una mayor rebaja al cliente?

Resolución:

Descuento en A:

$$D_A = \left(25 + 20 - \frac{25 \times 20}{100}\right)\%P_C \Rightarrow D_A = 40\%P_C$$

Descuento en B:

$$D_A = \left(30 + 30 - \frac{30 \times 30}{100}\right)\%P_V$$

$\Rightarrow D_B = 51\%P_V = 51\% (P_C + g)$
D_B: 51%P + 51%G
Se observa $D_B > 2D_A$
En B hay mayor rebaja

51. Del total de artículos que tiene un comerciante para la venta el 20% de ellos los vende ganando el 20%, otro 30% los vende ganando el 30%, otro 40% los vende ganando el 10%. ¿Cuál fue su porcentaje de ganancia en la venta de los artículos restantes, si al final obtuvo una ganancia total de 21%?

Resolución:

Sea T el total de artículos.

$G_1 = 20\% (20\%T) = 4\%T$
$G_2 = 30\% (30\%T) = 9\%T$
$G_3 = 10\% (40\%T) = 4\%T$
$G_4 = x\% \underbrace{(10\%T)}_{\text{resto}} = x\% \, 10\%T$

$G_{TOTAL} = 21\%T = 4\%T + 9\%T + 4\%T + x\% \, 10\%T$
Se obtiene: $x = 40$
Porcentaje de ganancia: 40%

52. Si gastara el 30% del dinero que tengo y ganara el 28% de lo que me quedaría, perdería S/.156, ¿cuánto tengo?

Resolución:
Tengo: C; Gasto: 30%C; Queda: 70%C
Pero gana: 28% (70%C) = 19,6%C
Se pierde: 30%C − 19,6%C = 156 $\therefore$ C = 1500

53. El m% del n% de una cantidad es su 10% y el n% de 1000 excede en 300 a su m%. Halle el m% de (n + 450)

Resolución:
Primero: m% (m%c) = 10%c
Luego: mn = 1000 ...(I)
También:
n%1000 − m%1000 = 300
Donde n − m = 30 ...(II)
De (I) y (II): n = 50; m = 20
Se pide 20%(50 + 450) = 100

54. Cierto alumno, después de medir un examen, observa que: lo que respondió es 50% más que los que no respondió, y lo que falló es 50% menos que los que no falló. Si todas las preguntas tienen igual valor y por lo que no responde tiene una bonificación de 20% del valor de la pregunta y por los errores recibe un castigo del 10% del valor de la pregunta, ¿cuál es su nota en la escala vigesimal?

Resolución:
Sea T el total de preguntas
Respondió = (100 + 50)% no respondió
(R) (N)

$\Rightarrow R = 150\%N \Rightarrow \frac{R}{3} = \frac{N}{2} \left.\right\} \begin{matrix} R = 3k \\ N = 2k \end{matrix}$

Donde T = R + N = 5k

También
Falló = (100 − 50)% no falló
(F) (G)

$F = 50\%G \Rightarrow \frac{F}{1} = \frac{G}{2} = \frac{\overbrace{F+G}^{R = 3k}}{1+2}$

Luego F = k, G = 2k
Puntaje:
No falló: (2k)V
No respondió: (2k)(20%V)
Falló: −(k)(10%V)
Puntaje Final:
2kV + 40%kV − 10%kV = 230%kV
Nota 20 se asigna al máximo puntaje, esto es: (5k)V.
Se tiene: nota
5kV ——— 20
2,3kV ——— x
$\therefore$ x = 9,2

55. En una universidad se decide rebajar las pensiones de enseñanza de los estudiantes de menores recursos económicos en un 20% y aumentar un 30% al resto. Si el monto total de pensiones queda disminuido en un 10% con esta política. ¿Qué porcentaje de la pensión total representa la pensión pagada por los estudiantes de menores recursos económicos?

Resolución:
Sea P la pensión indicada
a: n.° de estudiantes de menores recursos
b: Resto de estudiantes
Se cumple:
80%Pa + 130%Pb = 90%P(a + b)
De donde: a = 4b
Se pide:

$$\frac{\text{Pensión de est. de menores rec.}}{80\%P(4b)} = x\% \frac{\left(\text{Pensión total}\right)}{90\%P(5b)}$$

x = 71,11 $\Rightarrow$ Representa 71,11%

56. Una cuadrilla de 20 obreros debe hacer una obra en 50 días, laborando 8 horas diarias. Al cabo de 10 días a la mitad de los obreros les da el cólera y luego de 10 días, la mitad de los que estaban trabajando también se ven afectados por este virus, después de 20 días, se contratan un número igual al de obreros que fue afectado por el mal y los que habían quedado también contrajeron el virus por 10 días. ¿Cuántos obreros en 10 días hacen lo que falta de la obra?

Resolución:
Por las líneas o rayas (como las H/D son las mismas no alteran el problema)

obreros	días	obra
20	50	1
20	10	Y

Al cabo de 10 días se habrá avanzado parte de la obra (Y)
20(50)(Y) = 20(10)(1)
$\Rightarrow$ 5Y = 1 $\therefore$ Y = 1/5 ...(I)

Como a la mitad les da el cólera: se van 10 y estos trabajan durante 10 días y habrán hecho otra parte de la obra (Z)

obreros	días	obra
20	50	1
10	10	Z

$(20)(50)Z = (10)(10)1$

$\Rightarrow 10Z = 1 \quad \therefore Z = 1/10$ ...(II)

Esta vez la mitad de lo que estaban trabajando se enferman (5) y trabajan durante 20 días, habiendo avanzado otra parte de la obra (W)

obreros	días	obra
20	50	1
5	10	W

$(20)(50)W = 5(20)(1)$

$\Rightarrow 10W = 1 \quad \therefore W = 1/10$ ...(III)

Luego se reemplazan los afectados por el mal (15) reemplazándose a los que habían quedado (5) trabajando diez días y haciendo otra parte de la obra (X)

obreros	días	obra
20	50	1
15	10	X

$(20)(50)X = (15)(10)1$

$\Rightarrow 20X = 3 \quad \therefore X = 3/20$ ...(IV)

Finalmente se hizo de la obra: I + II+ III + IV

O sea: $1/5 + 1/10 + 1/10 + 3/20 = 11/20$; en otras palabras quedan por hacer. 9/20 de ella, planteando entonces:

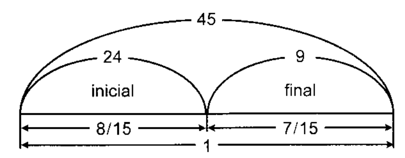
obreros	días	obra
20	50	1
R	10	9/20

$(20)(50)(9/20) = R(10)(1) \quad \therefore R = 45$

57. Se pensó terminar una obra en 45 días, empleando 30 trabajadores, laborando 8 horas diarias. Luego de 24 días de trabajo, se pidió concluir la obra 12 días antes del plazo fijado. ¿Cuántos trabajadores más de doble capacidad se deben contratar, si se aumentó en 2 horas la jornada de trabajo?

Resolución:

Graficando:



1era Situación. Se hallará lo que se avanzó en esos cuatro días (X)

obreros	h/d	días	obra
30	8	45	1
30	8	24	y

$(30)(8)(45)y = (30)(8)(24)1$

$\Rightarrow 45y = 24 \quad \therefore y = 8/15$

Situación Final. Como se debe terminar 12 días antes, solo quedarían $45 - 24 - 12 = 9$ días de plazo, planteando por aspas o rayas.

obreros	h/d	días	obra
30	8	45	1
30 + 2x	10	9	7/15

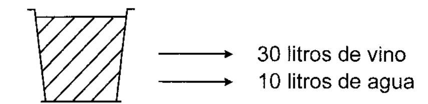
$(30)(8)(45)(7/15) = (30 + 2x)(10)(9)(1)$

$\Rightarrow 56 = 30 + 2x \quad \therefore x = 13$

58. Un recipiente contiene 30 litros de vino mezclado con 10 litros de agua. La mezcla cuesta S/.1200. ¿Cuánto de agua se debe adicionar para que el litro de la mezcla disminuya en S/.6?

Resolución:

Sea el gráfico



Total de litros = 40, pero como el costo total es 1200, por lo tanto, cada litro costará 30; por condición del problema se agregan x litros de agua planteando tenemos que:

agua	costo
10	30
(10 + x)	24
(+)	(−)

$\Rightarrow (10)(30) = (10 + x)24$

$25 = 20 + 2x$

$x = 2,5$ litros

59. 20 hombres trabajaron durante 30 días a 6 horas diarias para levantar un edificio de 25 m de altura, 12 m de largo y 10 m de ancho. Al terminar este edificio, la cuadrilla con 4 hombres menos, pasó a construir otro edificio de 20 m de alto, 14 m de largo y 10 m de ancho trabajando 7 horas diarias y con el doble de dificultad. ¿Cuántos días necesitaron para construirlo?

Resolución:

Por el método de las líneas

obreros	h/d	días	obra	dific.
20	6	30	(25)(12)(10)	1
16	7	x	(20)(14)(10)	2

$(20)(6)(30)(20)(14)(10)2 = (16)(7)(x)(25)(12)(10)1$

$\therefore x = 60$

60. 4 grupos de hormigas numéricamente iguales consumen el pan de una despensa en 10 días, pero al transcurrir el cuarto día, tres de los grupos pelean por lo que uno de ellos queda exterminado y los otros dos se reducen a la cuarta parte. ¿Cuántos días después de la pelea se acabó la comida?

Resolución:

Planteando inicialmente

hormigas	días	despensa
4K	10	1
4K	4	Y

Como los grupos de hormigas son iguales, se ha llamado a estos K, ahora bien; como en los 4 primeros días estuvieron juntas, averiguaremos cuanto de la despensa se han comido (Y):

$4K(10)Y = 4K(4)1 \Rightarrow 5Y = 2 \quad \therefore\ Y = 2/5$

(4^{to} día) ... se pelean tres grupos y queda exterminado uno de ellos y los otros dos reducidos a su 1/4 parte; entonces quedan

K + (K/4)2 (no pelearon)

Planteando finalmente:

hormigas	días	despensa
4K	10	1
4K/2	X	3/5

$4K(10)(3/5) = (3/2)(K)(X)(1) \quad \therefore\ x = 16$

61. Una obra puede ser hecha por 20 obreros en 15 días, después de 4 días de trabajo se accidentan 5 obreros, los que quedan siguieron trabajando por x días, luego del cual se contratan 22 obreros adicionales, cuyas eficiencias son la mitad con respecto a los primeros, cumpliendo de esta manera con el plazo fijado. Hallar x.

Resolución:

obreros	días	obra
20(2)	15	1
20(2)	4	4/15
15(2)	x	y
15(2) + 22(1)	11 − x	11/15 − y

$$\Rightarrow \underset{(I)}{\frac{(20)(2)15}{1}} = \underset{(II)}{\frac{15(2)x}{y}} = \underset{(III)}{\frac{[15(2)+22(1)](11-x)}{\frac{11}{15}-y}}$$

De (I) y (II):

x = 20y

Reemplazando en (II) y (III):

$$\Rightarrow \frac{15(2)(20y)}{y} = \frac{52(11-20y)}{\frac{11}{15}-y}$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{10} \Rightarrow x = 20\left(\frac{3}{10}\right) = 6$$

62. Si un alumno resuelve una prueba a razón de 3 preguntas por minuto. ¿En cuánto debe aumentar su velocidad (pregunta/minuto) para resolver una prueba de 480 preguntas en 2 horas?

Resolución:

Sea x el número de preguntas que debe de aumentar para que se cumpla:

Problemas resueltos	Tiempo (min)
480	120
3 + x	1

$$\Rightarrow 3 + x = 480\left(\frac{1}{120}\right) \quad \therefore\ x = 1$$

63. Un grupo de obreros han hecho una zanja en cierto número de días. Se desea hacer una ampliación de la zanja, para lo cual el largo se aumentó en 20%, el ancho en 25% y la altura se aumentó en x%. Hallar x sabiendo que para hacer dicha ampliación con el mismo número de obreros, en el mismo tiempo anterior, cada uno de los obreros aumentó su rendimiento en 25%.

Resolución:

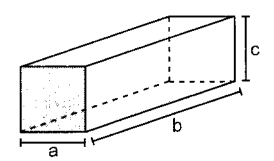
Sea el rendimiento inicial de los obreros: 100

⇒ Al aumentar un 25% se tendrá como nuevo rendimiento:

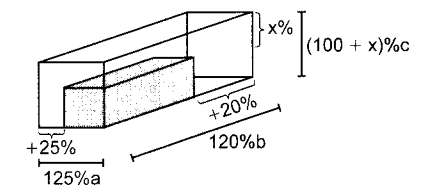
100 + 25%(100) = 125

De la zanja:

Inicialmente volumen de la zanja: abc ...(I)



Luego se realiza la ampliación de la zanja:



Nuevo volumen = (125%a)(120%b)(100 + x)%c ...(II)

El volumen trabajado después de la ampliación se halla restando (II) y (I):

= (125%a) (120%b) (100 + x)%c − abc

= (0,5 + 1,5x%)abc

rendimiento	volumen
100	abc
125	(0,5 + 1,5x%)abc

$\Rightarrow (0{,}5 + 1{,}5x\%)abc = abc\left(\frac{125}{100}\right) \quad \therefore x = 50$

64. Para transportar una carga de 320 kg a 336 km de distancia se ha pagado S/.540. Hallar el costo de transportar 609 kg de la misma carga a 1280 km.

Resolución:

carga (kg)	distancia (km)	costo (S/.)
320	336	540
609	1280	x

$\Rightarrow x = 540\left(\frac{609}{320}\right)\left(\frac{1280}{336}\right) \quad \therefore x = S/.3915$

65. La hierba crece en el prado con igual rapidez y espesura. Se sabe que 60 vacas se la comerían en 25 días y 40 vacas en 45 días. ¿Cuántas vacas se comerán toda la hierba en 75 días?

Resolución:

Sea a la cantidad de hierba que se encuentra en el prado inicialmente; b es la cantidad que crece diariamente en forma constante.

⇒ Así, en 25 días habrá 25b más y en 45 días habrá 45b más.

vacas	días	cantidad de hierba
60	25	a + 25b
40	45	a + 45b

$\Rightarrow (a + 45b) = (a + 25b)\left(\frac{40}{60}\right)\left(\frac{45}{25}\right) \Rightarrow a = 75b$

En 75 días:

vacas	días	cantidad de hierba
60	25	(75b) + 25b
x	75	(75b) + 75b

$\Rightarrow x = 60 \quad \therefore x = 30$

66. Dos varones y 3 mujeres pueden hacer un trabajo en 6 horas y 3 varones y 2 mujeres pueden hacer 1/3 de dicha obra en $2,\hat{6}$ horas. ¿En cuántas horas harán la mitad de dicha obra 4 varones y 1 mujer?

Resolución:

a: eficiencia del varón; b: eficiencia de la mujer

$2,\hat{6}$ horas $= 2\left(\frac{6}{9}\right)$horas $= \left(\frac{24}{9}\right)$horas

trabajadores	obra	tiempo (h)
(2a + 3b)	1	6
(3a + 2b)	1/3	24/9

$\Rightarrow (3a + 2b) = (2a + 3b)\left(\frac{1/3}{1}\right)\left(\frac{6}{24/9}\right)$

Se obtiene: b = 6a

Se desea conocer:

trabajadores	obra	tiempo (h)
2a + 3(6a)	1	6
4a + 1(6a)	1/2	x

$\Rightarrow x = 6\left(\frac{20a}{10a}\right)\left(\frac{1/2}{1}\right) \quad \therefore x = 6h$

67. Un reservorio de 8 m de radio y 12 m de altura abastece a 75 personas durante 20 días. ¿Cuál debe ser el radio de un reservorio de 6 m de altura que debe abastecer a 50 personas durante 2 meses?

Resolución:

Altura (m)	Área base (m²)	Personas	Días
12	$\pi(8)^2$	75	20
6	πx^2	50	60

$\Rightarrow \pi x^2 = \pi(8)^2\left(\frac{12}{6}\right)\left(\frac{50}{75}\right)\left(\frac{60}{20}\right) \quad \therefore x = 16 \text{ m}$

68. En el país X la unidad de longitud es el nuevo metro, se sabe que un nuevo metro está dividido en 120 nuevos centímetros y cada nuevo centímetro está dividido en 50 nuevos milímetros. Si en el país X la medida de un árbol es de 8 nuevos metros, 40 nuevos centímetros y 30 nuevos milímetros; y en nuestro país es a metros, b centímetros y c milímetros. Hallar a + b + c, sabiendo que 5003 nuevos metros equivalen a 13 800 metros.

Resolución:

1 nuevo metro: $\overline{m}$

1 nuevo centímetro: $\overline{cm} = \frac{\overline{m}}{120}$

1 nuevo milímetro: $\overline{mm} = \frac{\overline{cm}}{50}$

Pero: $\overline{mm} = \frac{1}{50}\left(\frac{\overline{m}}{120}\right) = \frac{\overline{m}}{6000}$

El árbol mide:

$x = 8\,\overline{m}\,40\,\overline{cm}\,30\,\overline{mm}$

Se tendrá:

$x = 8\,\overline{m}\,40\left(\frac{\overline{m}}{120}\right)30\left(\frac{\overline{m}}{6000}\right)$

$x = \left(8 + \frac{40}{120} + \frac{30}{6000}\right)\overline{m} = \frac{5003}{600}\overline{m}$

Se conoce la equivalencia:

$5003\,\overline{m}$ ——— 13 800 m

$\frac{5003}{600}\overline{m}$ ——— h

$\Rightarrow h = 13\,800\left(\frac{5003}{600}\right)\left(\frac{1}{5003}\right)$

$h = \frac{138}{6} = 23$ m 0 cm 0 mm

Se pide: 23 + 0 + 0 = 23

69. Si en 120 kilos de aceite comestible hay 5 kilos de aceite puro de pescado y el resto aceite de soya. ¿Cuántos kilos de aceite de soya hay que agregar a estos 120 kilos para que en cada 5 kilos de la mezcla haya solo 1/8 de kilogramo de aceite de pescado?

Resolución:

Como no se agrega aceite de pescado, se mantendrá los 5 kg iniciales:

mezcla (kg)	aceite de pescado (kg)
5	1/8
120 + x	5

$\Rightarrow 120 + x = 5 \quad \therefore\ x = 80$ kg

70. Una obra puede ser hecha por 10 hombres en 15 días, 6 días después de iniciada la obra 4 de ellos aumentaron su eficiencia en 20% y el resto baja en x%. Hallar x si la obra se terminó en 16 días.

Resolución:

obreros	días	obra
10(100%)	15	1
10(100%)	6	6/15
4(120%) + 6(100 − x)%	10	9/15

$$\Rightarrow \frac{10(100\%)6}{6/15} = \frac{[4(120\%) + 6(100 - x)\%]10}{9/15}$$

$\therefore\ x = 30$

71. Se disuelven 360 gramos de azúcar en 8 litros de agua. ¿Cuántos litros de agua se deben agregar, para que un litro de esta nueva mezcla solo contenga, 18 gramos de azúcar?

Resolución:

Los 360 g de azúcar no varían al agregar x litros de agua.

mezcla (L)	azúcar (g)
1	18
8 + x	360

$\Rightarrow 8 + x = 1\left(\frac{360}{18}\right) \quad \therefore\ x = 12$ L

72. Tres hombres trabajando 8 horas diarias han hecho 80 m de una obra en 10 días. ¿Cuántos días necesitarán 5 hombres trabajando 6 horas diarias para hacer 60 m de la misma obra?

Resolución:

hombres	h/d	obra(m)	días
3	8	80	10
5	6	60	x

$\Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{(3)(8)(60)}{(5)(6)(80)} \quad \therefore\ x = 6$ días

73. Se contrató una obra para ser terminada en 30 días, empleando 15 obreros. Después de 8 días de trabajo, se acordó que la obra quedase terminada 12 días antes del plazo estipulado y así se hizo. ¿Cuántos obreros más debieron emplearse?

Resolución:

Si la obra, se efectúa en 30 días y ya transcurrieron 8, entonces se habrá efectuado 8/30 de la misma, faltando 1 − 8/30 = 22/30.

Si la obra se debe terminar 12 días antes del plazo estipulado y ya transcurrió 8 días entonces se debe trabajar durante 30 − 8 − 12 = 10 días para terminar.

Por tanto:

días	obreros	obra
30	15	1
10	15 + x	22/30

$$\Rightarrow \frac{15 + x}{15} = \frac{30(22/30)}{10(1)}$$

$\Rightarrow 15 + x = 33 \quad \therefore\ x = 18$

74. En una construcción laboran 36 obreros para que en 24 días trabajando 5 h/d lo construyan, pero luego de 10 días los obreros disminuyen su rendimiento en 25%, el encargado de la obra después de 4 días decide aumentar en una hora la jornada y que todos los obreros sean reemplazados por otros nuevos obreros con un rendimiento del 100%. Calcular la cantidad de obreros reemplazantes.

Resolución:

Los obreros reemplazantes solo hacen lo que falta de la obra:

ob.	días	h/d	rend.	obra
36	24	5	100	1
36	10	5	100	10/24
36	4	5	75	y
x	10	6	100	14/24 − y

$$\Rightarrow \underset{(\text{I})}{\frac{36(10)(5)(100)}{\frac{10}{24}}} = \underset{(\text{II})}{\frac{36(4)(5)(75)}{y}} = \underset{(\text{III})}{\frac{x(10)(6)(100)}{\frac{14}{24} - y}}$$

De (I) y (II): $y = 1/8$

Reemplazando en (II) y (III), al resolver: $\Rightarrow x = 33$

75. Para hacer 540 metros de una obra, 27 trabajadores emplean 16 días trabajando 12 horas diarias. ¿Cuántos días necesitarán 18 trabajadores para hacer 450 metros de la misma obra, trabajando solo 10 horas diarias?

Resolución:

Ordenando los datos se tiene:

obra (m)	trabajadores	días	h/d
540	27	16	12
450	18	x	10

$\Rightarrow \frac{x}{16} = \left(\frac{450}{540}\right)\left(\frac{27}{18}\right)\left(\frac{12}{10}\right) \quad \therefore\ x = 24$ días

76. Un grifo que arroja 120 litros cada 6 minutos llena un tanque de agua en 4 horas 30 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará en llenar el mismo tanque, conjuntamente con otro grifo que arroja 20 litros en 1 minuto 15 segundos?

Resolución:

En un minuto, el primer grifo arroja 120/6 = 20 L y el segundo, 20/1,25 = 16 L

Luego los dos grifos juntos en un minuto arrojan 36 L. Entonces:

caudal (L/min)	tiempo (h)
20	$4\left(\frac{1}{2}\right)$
36	x

$\Rightarrow x=\left(\frac{9}{2}\right)\left(\frac{20}{36}\right)\left(\frac{5}{2}\right)h \quad \therefore x = 2\text{ h }30\text{ min}$

77. Un contratista puede ejecutar una obra, con cierto número de obreros en 3 días; pero emplearía un día menos si tuviera 6 obreros más. ¿Cuántos días podrá ejecutar dicha obra si cuenta con 9 obreros?

Resolución:

Sea x el número de obreros. Entonces:

obreros	días
x	3
x + 6	2

De donde: $x + 6 = \frac{3x}{2} \Rightarrow x = 12$

Cuando se tiene 9 obreros:

obreros	días
12	3
9	y

De donde: $y = 3\left(\frac{12}{9}\right) = 4$ días

78. Dos hombres pueden hacer cuatro camisas, en un tiempo doble que cuatro mujeres pueden hacer 6, y si dos hombres hacen dos camisas en 8 horas. ¿En qué tiempo en horas y minutos se hacen dos camisas, si empiezan dos mujeres y a la mitad de la obra, una es reemplazada por un hombre?

Resolución:

Rendimientos:

De 1 hombre = h; de 1 mujer = m

rendimiento	camisas	tiempo
2h	4	2t
4m	6	t

$\Rightarrow 4m = 2h\left(\frac{6}{4}\right)\left(\frac{2t}{t}\right) \Big\} \ \frac{m}{3} = \frac{h}{2}$

$\Rightarrow m = 3k;\ h = 2k$

Se van a confeccionar 2 camisas:

I. Se realiza la mitad: 1 camisa

rendimiento	camisas	horas
2(2k)	2	8
2(3k)	1	t_1

$\Rightarrow t_1 = 8\left(\frac{4k}{6k}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{3}$ horas

Luego: $t_1 = 2\left(\frac{2}{3}\right)(60\text{ min}) = 2\text{ h }40\text{ min}$

II. Se realiza la otra mitad: 1 camisa

rendimiento	camisas	horas
2(2k)	2	8
(2k) + (3k)	1	t_2

$\Rightarrow t_2 = 8\left(\frac{4k}{5k}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{16}{5}$ horas

Luego:

$t_2 = 3\left(\frac{1}{5}\right)(60) = 3\text{ h }12\text{ min}$

Tiempo total:

$t_1 + t_2 = 5\text{ h }52\text{ min}$

79. Una cuadrilla de 40 obreros se compromete a construir en 24 días cierta obra. Al cabo de 18 días ha hecho 5/11 de la obra. ¿Cuántos obreros tendrán que reforzar la cuadrilla para terminar la obra en el tiempo fijado?

Resolución:

Como se ha hecho 5/11 de la obra; falta para terminarla 6/11

obreros	días	obra
40	18	5/11
40 + x	6	6/11

$\Rightarrow 40 + x = 40\left(\frac{18}{6}\right)\left(\frac{\frac{6}{11}}{\frac{5}{11}}\right) \quad \therefore x = 104$

80. Un reloj se adelanta minuto y medio cada 24 horas. Después de 46 días 21 h 20 minutos, ¿cuánto se adelantó el reloj?

Resolución:

Como: 46 d 21 h 20 min $= \frac{3376}{3}$ h

Planteamos:

horas	min (adelanto)
24	3/2
$\frac{3376}{3}$	x

$\Rightarrow x=\left(\frac{3376}{3}\right)\left(\frac{3/2}{24}\right) \quad \therefore x = \frac{211}{3}$ min

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2001 - II)

Un contratista dice que debe terminar un tramo de una autopista en a días, si le proporciona un cierto tipo de máquinas, pero con c máquinas adicionales de dicho tipo, puede hacer el trabajo en b días (a − b = 1). Si el rendimiento de las máquinas es el mismo, entonces el número de días que empleará una máquina para hacer el trabajo es:

A) a^2bc B) ab^2c C) abc^2
D) abc E) (a + b)c

Resolución:

Del problema tenemos:

m : máquinas harán la obra en a días
m + c : máquinas harán la obra en b días
1 : máquina hará la obra en d días

A más máquinas (de la misma eficiencia) se necesitarán menos días para hacer la obra.
Entonces máquinas y días son inversamente proporcionales:

(n.° de máquinas) (n.° de días) = cte.

Luego: ma = (m + c)b = (1)(d)
De lo anterior: m(a − b) = bc
Por ato del problema: a − b = 1, entonces: m = bc
Luego: abc = d

Clave: D

PROBLEMA 2 (UNI 2003 - I)

Para cumplir con el pedido de un lote de artículos de exportación se trabajó durante 16 días de la siguiente manera: el primer día trabajaron 9 obreros, el segundo 13 obreros, el tercero 17 obreros y así sucesivamente. Si todos los días se hubiese trabajado con 15 obreros, 20% menos eficientes, entonces el número de días en la que se habría acabado el pedido, es:

A) 69 B) 63 C) 56 D) 52 E) 48

Resolución:

Determinando la fórmula de proporcionalidad:
Más obreros menos días (inversa, producto cte.)
Más eficiencia menos días (inversa, producto cte.)

(eficiencia)(n.° de obreros)(n.° de días) = cte.

Aplicando:

$$100\%\underbrace{(9\times1+13\times1+17\times1\ldots)}_{16\text{ sumandos}}=80\%(d)(15)$$

$$\underbrace{9+13+17+\ldots}_{16\text{ sumandos}}=12d$$

La cantidad de obreros en el primer miembro forman una PA cuyo $t_n = 4n + 5$; entonces en el día 16 hay:

4(16) + 5 = 69 obreros
Luego:
9 + 13 + 17 + ... + 69 = 12d
(9 + 69)16/2 = 12d
d = 52

Clave: D

PROBLEMA 3 (UNI 2004 - I)

En una obra se observa que faltando 54 días para su culminación fueron despedidos 10 obreros; pero a 12 días para la culminación debe contratarse x obreros para cumplir con el plazo estipulado. Determinar la suma de cifras de x.

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Resolución:

Los 10 obreros despedidos hubieran hecho la parte de la obra que les tocaba en 54 días. Pero faltando 12 días, dicha parte lo harán los x obreros contratados. Es decir:
(n.° de días) IP (n.° de obreros)
(54)(10) = 12x
x = 45

Luego: $\sum$ de cifras = 9

Clave: D

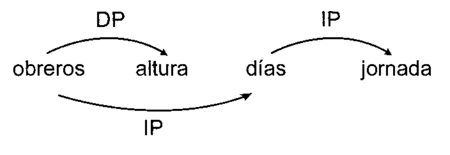
PROBLEMA 4 (UNI 2004 - II)

Para construir un puente de 600 m se ha contratado 30 obreros para trabajar 12 días en jornadas de 10 horas. Pero una nueva decisión técnica exige que el puente sea de 900 m, para ello se contrata 6 obreros más. ¿En cuántos días se construirá el puente con los 36 obreros en jornadas de 6 horas diarias?

A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35

Resolución:

Analizando las magnitudes:



Luego: $\dfrac{(\text{obreros})(\text{días})(\text{jornada})}{(\text{altura})} = \text{cte.}$

Aplicando: $\dfrac{(30)(12)(10)}{600} = \dfrac{(36)(d)(6)}{900}$ $\therefore$ d = 25

Clave: C

PROBLEMA 5 (UNI 2006 - I)

Un grupo de A albañiles ha trabajado en una obra D días a razón de H horas diarias; un segundo grupo de a (a < A) albañiles ha trabajado la misma obra d (d < D) días de h (h > H) horas diarias. En total recibieron J nuevos soles. Entonces el primer y el segundo grupo recibieron, respectivamente, en nuevos soles:

A) $\frac{J}{3}; \frac{2J}{3}$

B) $\frac{adHJ}{adh + ADH}; \frac{aDhJ}{adh + ADH}$

C) $\frac{adHJ}{adH + ADh}; \frac{aDhJ}{adH + ADh}$

D) $\frac{adhJ}{adh + ADH}; \frac{ADHJ}{adh + ADH}$

E) $\frac{2adhJ}{3(adh + ADH)}; \frac{ADHJ}{adh + ADH}$

Resolución:

El primer grupo de albañiles recibe: P_1 soles
El segundo grupo recibe: P_2 soles
El pago total es: $P_1 + P_2 = J$,

Siendo
P_1: pago del primer grupo; P_2: pago del segundo grupo

Se cumple: $\frac{P_1}{ADH} = \frac{P_2}{adh} = \frac{J}{ADH + adh}$

Por consiguiente: $P_1 = \frac{ADHJ}{ADH + adh}$

$P_2 = \frac{adhJ}{ADH + adh}$

Clave: D

PROBLEMA 6 (UNI 2009 - II)

Juan y Pedro pueden pintar un auditorio en 5 días, Juan y Carlos lo pueden hacer en 6 días, y Pedro con Carlos lo pueden hacer en 5 días. ¿En cuántos días puede Pedro pintar el auditorio?

A) $8\frac{4}{7}$ B) $9\frac{2}{7}$ C) $9\frac{3}{7}$ D) $9\frac{4}{7}$ E) $9\frac{5}{7}$

Resolución:

Sean:
J = número de días en que Juan pinta el auditorio
P = número de días en que Pedro pinta el auditorio
C = número de días en que Carlos pinta el auditorio

Nos piden: P

Por dato, se tiene: $\frac{1}{J} + \frac{1}{P} = \frac{1}{5}$ ...(1)

$\frac{1}{J} + \frac{1}{C} = \frac{1}{6}$ ...(2)

$\frac{1}{P} + \frac{1}{C} = \frac{1}{5}$ ...(3)

Sumando (1), (2) y (3)

$\frac{1}{J} + \frac{1}{C} + \frac{1}{P} = \frac{17}{60} \Rightarrow \frac{1}{P} = \frac{7}{60}$

$\Rightarrow P = \frac{60}{7} \quad \therefore P = 8\frac{4}{7}$

Clave: A

PROBLEMA 7 (UNI 2010 - II)

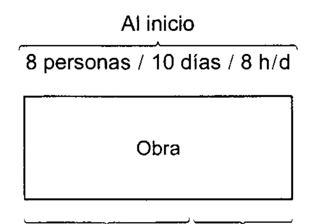
Para pintar el Estadio Nacional se contratan 8 personas que afirman que pueden terminar la obra en 10 días, laborando 8 horas diarias. Al terminar el quinto día de trabajo se decide incrementar la jornada a 10 horas diarias y contratar más personas para culminar el resto de la obra en 2 días. Calcule la cantidad de personas que se deben contratar en forma adicional.

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

Resolución:

Nos piden: cantidad de personas que se deben contratar en forma adiciona.

Sea x dicha cantidad



Luego:

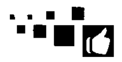
8 personas	(8 + x) personas
5 días	2 días
8 h/d	10 h/d

Se contratan x personas

Como:
n.° de obreros IP n.° de días IP n.° de h/d = k = cte.

$\Rightarrow (8)(5)(8) = (8 + x)(2)(10) \Rightarrow x = 8$

Clave: A



PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En una plaza hay 1 500 hombres provistos de víveres para 6 meses. ¿Cuántos habrá que despedir, para que los víveres duren dos meses más, dando a cada hombre la misma ración?

A) 360 homb. B) 350 homb. C) 375 homb.
D) 340 homb. E) 320 homb.

2. Hugo, Luis y Paco han hecho 234 m de una zanja, el rendimiento de Hugo es el 120% del de Luis y el de Paco es el 140% del de Luis. ¿Cuántos metros hizo Paco?

A) 79 B) 92 C) 95
D) 91 E) 94

3. Un grupo de hombres tienen víveres para un viaje de varios días. Hallar dicho número de hombres sabiendo que si la tripulación se aumenta en 6 hombres, la duración del viaje se reduce a las 2/3 de la duración inicial del viaje.

A) 9 B) 10 C) 12
D) 15 E) 18

4. Una fábrica tiene petróleo suficiente para 20 días, consumiendo dos barriles diarios. ¿Cuántos barriles menos se debe consumir diariamente para que el petróleo alcance para 30 días?

A) 1/3 B) 1/2 C) 2/3
D) 2/5 E) 3/4

5. Un reloj que da las horas por campanadas puede dar 3 campanadas en 5 s, ¿en qué tiempo dará 13 campanadas?

A) 21 s B) 27 s C) 24 s
D) 30 s E) N. A.

6. Un reloj se atrasa 10 min cada día. ¿Dentro de cuántos días volverá a marcar la hora exacta?

A) 72 d B) 96 d C) 80 d
E) 75 d E) 60 d

7. Se hacen disolver 250 g de azúcar en 5 L de agua. ¿Cuántos litros de agua deben añadirse a esta mezcla para que en un litro de la nueva mezcla existan 8 g de azúcar?

A) 26,24 L B) 26,42 L C) 26,25 L
D) 26,26 L E) 25,26 L

8. Juan es el triple de rápido que Pedro. Si juntos pueden hacer cierto trabajo en 9 días. ¿en cuántos días hace el trabajo Juan trabajando solo?

A) 10 días B) 11 días C) 12 días
D) 13 días E) 14 días

9. Un reloj da tantas campanadas como las horas que marca. Si en dar las 5 horas tarda 10 s, ¿cuánto tardará en dar las 8 horas?

A) 16 s B) 15 s C) 17,5 s
D) 18 s E) 14,5 s

10. Héctor compra artículos a 3 por S/.100 y los vende a 5 por S/.200. ¿Cuántos artículos debe vender para ganar S/.2000?

A) 450 B) 250 C) 200
D) 300 E) 360

11. La habilidad de 2 obreros es como 5 a 17. Cuando el primero haya hecho 250 metros de una obra, ¿cuánto habrá hecho el otro?

A) 750 m B) 850 m C) 150 m
D) 170 m E) 87 m

12. Sabiendo que un buey atado a una cuerda de 5 m de largo, tarda 5 días en comerse todo el pasto a su alcance, ¿cuánto tardaría si la cuerda fuera de 10 m?

A) 15 d B) 10 d C) 20 d
D) 5 d E) 17 d

13. Si 21 obreros tardan 10 horas para hacer una obra, ¿cuántos obreros se necesitarán para hacer la misma obra en 15 días?

A) 10 B) 13 C) 15 D) 14 E) 11

14. Ocho obreros pueden hacer una obra en 20 días. Después de 5 días de trabajo se retiran 3 obreros. ¿Con cuántos días de atraso se entregará la obra?

A) 8 d B) 9 d C) 7 d
D) 5 d E) 15 d

15. A una esfera de reloj se le divide en 1500 partes iguales, a cada parte se le denominará "nuevo minuto", cada "nueva hora" está constituida por 100 "nuevos minutos". ¿Qué hora indicará el nuevo reloj, cuando el antiguo indique las 3 horas 48 minutos?

A) 2 h 80 min B) 2 h 45 min C) 3 h 45 min
D) 4 h 75 min E) 3 h 80 min

16. La dotación de agua de una población alcanzaban para 200 litros diarios para cada habitante, pero con un incremento de la población de 300 habitantes, la ración percápita es de solamente 170 litros diarios. Calcular la población actual.

A) 1600 B) 2000 C) 2100
D) 1800 E) 1000

17. Si "h" hombres hacen un trabajo en "d" días, h + r lo harán en:

A) $\frac{hd}{h+r}$ B) $\frac{hd}{h-r}$ C) d + r
D) d − r E) $\frac{h-r}{h}$

18. Doce mecánicos hacen una obra en 28 días; si 8 mecánicos aumentan su rendimiento en un 60%, ¿qué tiempo emplearán en hacer la misma obra?

A) 10 d B) 20 d C) 15 d
D) 12 d E) 13 d

19. Sesenta kg de agua salada contienen 5 kg de sal. ¿Qué cantidad de agua se debe dejar evaporar para que 20 kg de la nueva mezcla contenga 10 kg de sal?

A) 50 kg B) 40 kg C) 60 kg
D) 70 kg E) 80 kg

20. Un ejército de 2000 soldados tiene víveres para 1 mes. ¿A cuánto debe disminuir la ración diaria para que los víveres duren 40 días?

A) 3/4 B) 1/4 C) 5/4
D) 1/5 E) 3/2

21. El transporte en carro de 20 toros hasta una distancia de 800 km pesando cada toro 930 kg ha costado S/.4000. ¿Qué distancia se habrá transportado 50 toros de 800 kg cada uno costando el transporte S/.18 000?

A) 980 km B) 1040 km C) 1620 km
D) 1420 km E) 1320 km

22. En una hacienda, 5 trabajadores siembran en 14 días de 10 h un terreno cuadrado de 20 m de lado. ¿Cuántos trabajadores se necesitan para sembrar otro terreno cuadrado de 40 m de lado trabajando 7 h/d durante 20 días?

A) 15 B) 20 C) 25
D) 19 E) 23

23. Un grupo de 50 hombres ha hecho en 18 días de 8 h/d el 60% de una obra. ¿Con cuántos obreros tendrán que reforzarse para hacer el 75% de lo que falta de ia obra en 5 días trabajando 9 h/d?

A) 10 B) 20 C) 30
D) 40 E) 50

24. Un grupo de 33 obreros pueden hacer una obra en 30 días, y luego de 6 días de trabajo se le pide que terminen lo que falta de la obra en 18 días. ¿Con cuántos obreros deben reforzarse a partir del séptimo día?

A) 9 B) 11 C) 13
D) 31 E) 19

25. Dos grupos de obreros han hecho una obra; el primer grupo de 40 obreros, ha trabajado 15 días de razón de 8 h/d y han hecho un porcentaje de la obra. ¿Qué porcentaje de la obra han hecho el otro grupo formado por 25 obreros, cuyo rendimiento es el triple que el de las anteriores y han trabajado 12 horas diarias durante 8 días?

A) 59% B) 60% C) 62%
D) 53% E) 56%

26. Un grupo de 24 obreros pueden construir una zanja de 80 m de largo, 2 m de ancho y 1,5 m de profundidad en 16 días trabajando 6 h/d. ¿En cuántos días 20 obreros trabajando 8 h/d pueden hacer una zanja cuyo ancho sea 0,5 m más, 0,5 m menos de profundidad y 40 m más de largo?

A) 15 días B) 18 días C) 20 días
D) 12 días E) 10 días

27. Si 36 peones, en 15 días de 8 h/d pueden sembrar rosas en un terreno cuadrado de 240 m de lado, ¿en cuántos días 24 peones trabajando 10 h/d, podrán sembrar en un terreno cuadrado de 180 m de lado cuya dureza a la cava es los 4/3 del anterior?

A) 13,5 días B) 12 días C) 12,5 días
D) 13 días E) N. A.

28. Un reservorio de 8 m de radio y 12 m de altura abastece a 750 personas durante 20 días. ¿Cuál debe ser el radio de un reservorio de 6 m de altura que debe abastecer a 500 personas durante 2 meses?

A) 16 m B) 15 m C) 14 m
D) 12 m E) 10 m

29. Ocho carpinteros cuya habilidad es como 5 son capaces de hacer 10 mesas y 18 sillas en 24 días. ¿Cuántos carpinteros cuya habilidad es como 7 son capaces de hacer 12 mesas y 20 sillas en 16 días, si se sabe que el hacer 1 mesa es lo mismo que hacer 3 sillas?

A) 10 B) 12 C) 9 D) 8 E) N. A.

30. Se tienen 16 máquinas cuyo rendimiento es del 90% y produce 4800 artículos en 6 días trabajando 10 h/d. Si se desea producir 1200 artículos en 8 días trabajando 9 h/d, ¿cuántas máquinas cuyo rendimiento es del 60% se requieren?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

31. Sabiendo que 50 obreros, trabajando 8 horas diarias pueden hacer una obra en 20 días, ¿en cuántos días 80 obreros, trabajando 5 horas diarias pueden hacer la misma obra?

A) 20 B) 30 C) 40
D) 10 E) 50

32. Quince obreros pueden terminar una obra trabajando 8 horas diarias en 24 días, al cabo de 10 días se despiden 5 obreros; pasados seis días se contratan nuevos obreros. ¿Cuántos obreros se habrá de contratar para terminar la obra en el tiempo fijado?

A) 3 B) 4 C) 9
D) 8 E) 12

33. Dieciocho obreros pueden hacer cierta obra en 20 días, al cabo de 8 días de labor se retiran 8 obreros y después de 6 días se contratan "x" obreros más para terminar la obra sin retraso. Hallar "x" sabiendo que estos obreros son el doble de hábiles que los que se retiraron y que la jornada diaria no cambió.

A) 6 B) 8 C) 16
D) 4 E) 32

34. Veintiún obreros se comprometen en hacer una obra en 25 días de 4 horas diarias; al cabo de 10 días sólo han hecho 2/7 de la obra. ¿Con cuántos hombres tendrán que ser reforzados para terminar la obra en el plazo fijado trabajando 5 horas diarias?

A) 7 B) 5 C) 4
D) 2 E) 10

35. Veinte obreros pueden hacer una obra en 15 días trabajando 10 h/d. Después de iniciado el trabajo se quiere terminar en sólo 13 días, disminuyendo 1/3 de la obra y disminuyendo 6 h/d de trabajo. ¿Cuántos días se trabajó 4 horas por día?

A) 8 B) 5 C) 13
D) 7 E) 6

36. Un grupo de 36 hombres pueden hacer una obra en 40 días trabajando 8 h/d. Si luego de hacer 1/5 de la obra se aumenta en 4 el número de hombres trabajando todos a razón de 9 h/d durante 8 días, al término de los cuales se incrementa nuevamente en 4 el número de hombres, los cuales trabajaron también 9 h/d y terminaron la obra. ¿Cuál es el tiempo total que se empleó en hacer la obra?

A) 15 días B) 14 días C) 32 días
D) 16 días E) 17 días

37. Ochenta agricultores pueden sembrar 1 Ha en 120 días, luego de 40 días de trabajo se retiran 36 agricultores y son reemplazados 20 días después por 20 agricultores más hábiles. ¿Qué rendimiento adicional deben tener estos últimos con respecto a los primeros para terminar la obra en el plazo establecido?

A) 240% B) 120% C) 170%
D) 140% E) 110%

38. Se desea construir un tramo de carretera con dos grupos. La tercera parte de la carretera la realizan un grupo de 10 obreros que trabajan 3 h/d con otro grupo de 15 obreros que trabajan 2 h/d durante 20 días. ¿Cuántos obreros del grupo que trabajan 3 h/d se deben unir a 10 obreros que trabajan 2 h/d para terminar la obra a los 50 días de iniciada la obra?

A) 45 B) 38 C) 20
D) 40 E) 65

39. José puede hacer un trabajo en 50 días y Mario en 40 días. Empiezan juntos el trabajo, luego, al cabo de 10 días José reduce su rendimiento en un 25%. A partir de ese momento, ¿cuántos días demorarán en terminar el resto del trabajo?

A) $15\frac{3}{4}$ d B) $14\frac{4}{5}$ d C) $13\frac{3}{4}$ d
D) $15\frac{1}{7}$ d E) $\frac{11}{7}$ d

40. Doce carpinteros pueden hacer un repostero en 23 días trabajando 3 h/d. Después de 5 días se retiran 2 carpinteros y 6 días después de esto se contratan "x" carpinteros adicionales para terminar a tiempo. Hallar "x".

A) 2 B) 4 C) 5 D) 3 E) 6

41. Una cuadrilla de 60 hombres se comprometieron en hacer una obra en "n" días. Luego de hacer la mitad de la obra 20 obreros aumentan su eficiencia en 25% terminando la obra 3 días antes de lo previsto. Hallar "n".

A) 70 B) 73 C) 75
D) 78 E) N. A.

42. Un trabajo puede ser hecho por 8 hombres en 14 días, trabajando 9 horas diarias. Si 4 hombres aumentaran su rendimiento en 40%, ¿en qué tiempo terminarán el trabajo?

A) 10 días B) $11\frac{2}{3}$ días C) 12 días
D) 11 días E) $12\frac{2}{3}$ días

43. Un grupo de segadores debía segar 2 prados, uno tenía triple superficie que el otro. Hasta el medio día trabajaron la mitad del personal en cada prado. En la tarde solo 3 se quedaron terminando el prado más pequeño, mientras que todo el resto trabajó en el grande; logrando segar hasta la mitad. ¿Cuántos integraban el grupo?

A) 20 B) 10 C) 30
D) 24 E) 31

44. Un pozo de 8 m de diámetro y 18 m de profundidad, fue realizado por 30 obreros en 28 días. Se quiere

aumentar en 2 m el radio del pozo y el trabajo será hecho por 14 hombres. ¿Qué tiempo demorarán?

A) 48 días B) 75 días C) 135 días
D) 20 días E) 45 días

45. Veintisiete obreros se comprometen a terminar en 24 días una obra trabajando 8 h/d; a los 10 días se incorporan 10 obreros que tienen 50% más eficiencia que los anteriores y 5 días después de ellos se retiran 4 de los primeros y 2 de los últimos. ¿Qué tiempo diario tendrían que trabajar después de ello para terminar la obra en el plazo fijado?

A) $4\frac{4}{15}$ h B) $6\frac{2}{15}$ h C) $4\frac{8}{15}$ h
D) $10\frac{2}{9}$ h E) $6\frac{5}{9}$ h

46. Veinte obreros cavan una zanja de 40 m de largo en 12 días. Después de cierto tiempo de trabajo se decide aumentar el largo en 20 m, para lo cual se contratan 10 obreros más cuya habilidad es los 2/3 de los anteriores. Si la obra se acaba a los 15 días de empezada, ¿a los cuántos días se aumentara el personal?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

47. Se contratan a 5 hombres para que desagüen un pantano, transcurrido 12 días han hecho 3/7 del trabajo; como el trabajo marcha lento y es necesario terminarlo en 10 días más, ¿cuántos trabajadores se aumentarán?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

48. Si 20 peones se demoran 21 días de 5 h/d de trabajo en sembrar un terreno cuadrado de 20 m de lado, ¿cuántos días de 8 h/d de trabajo demorarán en sembrar un terreno cuadrado de 40 m de lado y de una dureza 3 veces más que el terreno anterior 30 peones doblemente hábiles?

A) 70 B) 72 C) 74
D) 76 E) 78

49. Una compañía industrial posee 3 máquinas de 84% de rendimiento para producir 1600 envases cada 6 días de 8 horas diarias de trabajo. Si se desea producir 3000 envases en 4 días trabajando 7 horas diarias, ¿cuántas máquinas de 90% se requieren?

A) 8 B) 7 C) 4 D) 6 E) 9

50. Un trasatlántico debe efectuar un viaje de 28 h llevando 210 pasajeros y 30 tripulantes. Al cabo de 14 horas recogen 40 náufragos y el capitán calcula que van a llegar con un retraso de 2 horas. ¿A qué fracción deberá reducir la ración diaria de cada persona a bordo?

A) 1/2 B) 4/5 C) 3/4 D) 1/3 E) 2/5

51. Tres motores, trabajando durante 15 días a razón de 10 horas diarias consumen en total 25 galones de petróleo. ¿Cuántas horas diarias menos deben funcionar los motores sabiendo que se utilizarán 6 motores durante 20 días y sólo se dispone de 18 galones de gasolina?

A) 2,1 B) 4,8 C) 7,3
D) 8,2 E) 5,2

52. Se contrató una obra para ser terminada en 8 días por 6 obreros que deben trabajar 6 h/d. Después de 2 días de trabajo se acordó entregar la obra dos días antes del plazo estipulado, para lo cual se aumentó dos obreros más. ¿Se aumentó o disminuyó las horas diarias?, ¿en cuánto?

A) Aumentó 36' B) Disminuyó 40'
C) Aumentó 45' D) Disminuyó 50'
E) No varía

53. Veintisiete técnicos de cierta fábrica ensamblan 15 radios más 10 televisores en 20 días. Treinta técnicos de otra fábrica que son 20% más hábiles ensamblan 12 radios más 6 televisores en 10 días. ¿Cuántos técnicos 20% menos hábiles que los primeros ensamblarán 15 radios más 15 televisores en 18 días?

A) 50 B) 40 C) 60
D) 75 E) 45

54. Una ejecutiva trabaja como 3 de sus secretarias juntas. Un trabajo lo puede efectuar en "D" días trabajando sólo la ejecutiva. ¿En cuántos días harían este trabajo "a" de sus secretarias?

A) 3D/a B) 3D C) D/a
D) D/2 E) D/a

55. Un grupo de obreros habían hecho en 36 días el 75% de una obra, en ese momento se aumentaron 15 obreros mas y se terminó la obra 5 días antes de lo previsto. El grupo de obreros era de:

A) 21 B) 22 C) 31
D) 48 E) 15

56. Un hombre y una mujer pueden hacer un trabajo en 14 días. Determine el tiempo necesario para que dos hombres y una mujer puedan hacer un trabajo 4 veces considerable, sabiendo que el trabajo de un hombre y el de una mujer están en la relación de 3 a 2.

A) 28 B) 48 C) 42
D) 40 E) 35

57. En la reparación de los daños producidos por un huaico, trabajan 30 operarios y 75 pobladores de la zona afectada; dichos pobladores hicieron 1/5 de las reconstrucciones antes de que llegaran los operarios.

Calcular la relación en la que se encuentran las eficiencias poblador-operario, si se sabe que los operarios llegaron 2 días después del desastre y se fueron luego de 4 días de labores, al cabo de los cuales los daños fueron reconstruidos.

A) 2/5 B) 3/7 C) 4/9
D) 1/5 E) 4/7

58. En una sastrería hay 3 sastres A, B y C. Se sabe que en un mismo tiempo confeccionan 5; 6 y 7 ternos respectivamente y además A y B juntos confeccionan 8 temos en 28 días. ¿En cuántos días confeccionará C doce temos?

A) 22 B) 44 C) 66
D) 77 E) 55

59. Un grupo de obreros deben y pueden terminar una obra en 13 días, trabajando 6 horas diarias. Después de 3 días de trabajo se determinó que la obra quedase terminada 4 días antes del plazo inicial y para lo cual se contrata 5 obreros más y todos trabajan 8 h/d, terminando la obra en el nuevo plazo fijado. El número inicial de obreros es:

A) 18 B) 20 C) 21
D) 22 E) 24

60. Treinta obreros se comprometen hacer una obra en 15 días, trabajando 8 h/d; después de 5 días se les comunica que la obra debe duplicarse; para lo cual se contratan 10 obreros 50% más eficientes que los anteriores y se trabaja a 9 h/d. ¿Con cuántos días de retraso se entrega la obra?

A) $2\frac{1}{2}$ B) $2\frac{3}{4}$ C) $4\frac{5}{7}$
D) $4\frac{22}{23}$ E) $4\frac{22}{27}$

61. Nueve técnicos pueden ensamblar 6 computadoras en 12 días trabajando 8 horas cada día. Si la eficiencia de los ayudantes es 60% menos que la de los técnicos, ¿cuántas computadoras ensamblan 10 ayudantes en 18 días, trabajando 6 horas cada día?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

62. Una guarnición de 1800 hombres tiene víveres para 3 meses a razón de 0,5 kg de comida diaria. Debido a que la guarnición se incrementó en un cierto número de hombres la ración se debe disminuir a 0,4 kg de comida diaria. ¿A cuántos kilogramos debería reducirse dicha ración para que los víveres duren un mes más?

A) 0,35 B) 0,32 C) 0,3
D) 0,28 E) 0,25

63. Cierto número de obreros ha hecho los 7/9 de una obra en 42 días. Si los obreros que terminaron la obra aumentaron su rendimiento en 20%. ¿qué porcentaje de obreros se debe despedir para que el resto termine lo que falta en 25 días?

A) 40 B) 45 C) 50
D) 60 E) 75

64. Un grupo de 50 obreros pueden terminar una obra en 4 semanas. Al cabo de 4 días de trabajo se aumenta cierto número de obreros, de modo que en 18 días más terminaron lo que faltaba de la obra. La cantidad de obreros que se incorporaron es:

A) 20 B) 21 C) 22
D) 23 E) 25

65. Se contrataron 25 obreros para que terminen una obra en 21 días trabajando 8 horas diarias. Luego de 6 días se acordó que la obra quede terminada 5 días antes del plazo establecido. ¿Cuántos obreros más se tuvieron que contratar, sabiendo que se incrementó en 2 h el trabajo diario?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

66. Timo cuya eficiencia 21% puede sembrar un terreno triangular cuya base y altura son 7 m y 12,56 m respectivamente. ¿Cuál será la eficiencia de Edison que siembre un terreno circular cuyo diámetro es 8 m.?

A) 32% B) 24% C) 6%
D) 3% E) 42%

67. Un depósito tiene 7 ductos de desagüe de igual diámetro. Abiertos 3 de ellos, se vacía el depósito en 14 horas. Si se abren los 7 ductos, se vacía en:

A) 4 horas B) 5 horas C) 6 horas
D) 7 horas E) 8 horas

68. La aguja de Vicat; es un instrumento que se utiliza en uno de los ensayos que se le hace al concreto, según esto, cuando la relación cemento-agua es 6 de aguja penetra 12 mm ¿Cuánto penetrará una aguja, si la relación agua-cemento es 1/8?

A) 12 mm B) 49 mm C) 1/4 mm.
D) 768 mm. E) 9 mm.

69. Un obrero puede hacer un panel de concreto en 2 horas 35 minutos. ¿Cuánto tiempo se demora el mismo obrero para hacer otro panel cuyas dimensiones son 2 veces mayor, un quinto más y un sexto de los anteriores?

A) 10 min. 20 s C) 1 h 2 min E) 3 h 45 min
B) 1 h 33 min D) 5 h 10 min

70. 4 obreros trabajando 10 horas diarias han empleado 12 días para hacer una zanja de 400 metros de largo, 2 metros de ancho y 1,25 metros de profundidad. ¿Cuántos días emplearán 24 obreros trabajando 8 horas diarias al abrir otra zanja de 200

metros de largo, 3 metros de ancho y 1 metro de profundidad?

A) 5 días más B) 12 días más C) 6 días más
D) 3 días más E) 1,5 días más

71. Un móvil viaja a 40 Km/ h.
¿Cuántas horas empleará para recorrer "d" km. Si hace "n" paradas de "m" minutos cada una?

A) $\frac{3d+2mm}{12}$ B) $\frac{3d-2mm}{12}$ C) $\frac{d+40mm}{40}$

D) $\frac{3d+2mm}{120}$ E) $\frac{3d-2mm}{120}$

72. Un reloj se atrasa 8 minutos cada 24 horas. Si este marca la hora correcta 7 a.m. el 2 de mayo. ¿Qué hora marcará a la 1 p.m. del **7** de mayo?

A) 11 h 18 min B) 12 h 8 min C) 11 h 40 min
D) 12 h 42 min E) 12 h 18 min

73. 2 hombres y 8 muchachos pueden hacer una obra en 15 días, mientras que un hombre y 2 muchachos hacen la misma obra en 45 días.
Un solo muchacho, ¿en qué tiempo haría la misma obra?

A) 90 días B) 120 días C) 180 días
D) 150 días E) 60 días

74. Doce costureras pueden hacer un tejido en 23 días trabajando 3 horas diarias. Después de 5 días se retiran 2 costureras y 6 días después de esto se contratan x costureras adicionales, para terminar a tiempo.
Hallar el valor de x.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

75. Para pavimentar una vereda de 2 m. de ancho, 10 m. de largo y 0,15 m de espesor se gastó 5000 soles. ¿Cuánto se gastará para pavimentar una vereda de 3 m. de ancho, 150 m. de largo y 0,18 m. de espesor?

A) 75 mil B) 125 mil C) 100 mil
D) 135 mil E) 15 mil

76. Un obrero demora 8 horas para construir un cubo compacto de 5 dm. De arista. Después de 108 horas de trabajo. ¿Qué parte de un cubo de 15 dm. De arista habrá construido?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{5}$

77. Si 40 obreros, trabajando 8 horas diarias, construyen 320 m. de una obra en 10 días, los días que usaron 55 obreros trabajando 6 horas diarias y haciendo 440 m. de la misma obra son:

A) $\frac{1}{13}$ días B) 13,1 días C) 13 días
D) 12 días E) $13\frac{1}{3}$ días

78. Para realizar una obra, se cuenta con dos cuadrillas. La primera tiene cierta cantidad de obreros y puede ejecutar la obra en 4 días, la segunda cuenta con un número de obreros, diferente del anterior y pude concluir la obra en 15 días. Si se emplea 1/3 de la primera y 1/4 de la segunda. ¿En cuánto tiempo terminaron la obra?

A) 12 B) 10 C) 15
D) 8 E) 18

79. El rendimiento de dos hermanos es como 1 a 4. Si juntos hacen un trabajo en 80 días. ¿Cuánto tiempo se demorará el más rápido en hacer solo el trabajo?

A) 64 B) 144 C) 100
D) 96 E) 120

80. Para forrar un cubo de 1 m. de lado se gastó $100. ¿Cuánto se gastará para formar un cubo de 1,5 m. de lado?

A) $225 B) $150 C) $200
D) $250 E) $125

CLAVES

1. C	11. B	21. C	31. A	41. D	51. C	61. A	71. D
2. D	12. C	22. B	32. D	42. B	52. C	62. C	72. E
3. C	13. D	23. C	33. B	43. B	53. A	63. D	73. C
4. C	14. B	24. B	34. A	44. C	54. A	64. E	74. B
5. D	15. D	25. B	35. B	45. A	55. A	65. A	75. D
6. A	16. B	26. B	36. C	46. C	56. E	66. B	76. C
7. C	17. A	27. A	37. D	47. B	57. A	67. C	77. E
8. C	18. B	28. A	38. C	48. A	58. C	68. E	78. B
9. C	19. A	29. A	39. C	49. E	59. B	69. B	79. C
10. D	20. B	30. A	40. D	50. C	60. E	70. E	80. A

Regla de porcentaje

capítulo 13

Wilhelm Schickard nació el 22 de abril de 1592 en la ciudad de Herrenberg y murió en 1635 en Tubinga. Se trata de un matemático alemán famoso por haber construido la primera calculadora automática en el año 1623.

Sus áreas principales de investigación incluían la astronomía, la medicina y la topografía. Además, inventó un buen número de máquinas para diversos fines, entre las que se cuenta una para calcular fechas astronómicas y otra para ayudar a aprender la gramática del hebreo. También realizó contribuciones importantes a la cartografía, desarrollando técnicas que permitieron la realización de mapas mucho más precisos que los existentes en su época. Como matemático, desarrolló métodos que siguieron en uso hasta el siglo XIX. Asimismo, era un buen pintor, un buen tallador y un mecánico aceptable.

Schickard conoció a Johannes Kepler debido a sus intereses comunes y a sus contactos mutuos. Los dos científicos establecieron una correspondencia más o menos constante y para 1619 ya se encontraban discutiendo el trabajo de John Napier con los logaritmos, así como su dispositivo denominado «huesos de Napier», que puede considerarse como una de las primeras tablas de multiplicar de la historia. Al parecer, esto último motivó a Schickard a diseñar una máquina para efectuar cálculos.

Fuente: Wikipedia

DEFINICIÓN

La regla de porcentaje es una operación que dependerá de las partes en que haya sido dividida la unidad principal.

EL "a" POR CIENTO (a%)

El "a" por ciento de una cantidad, son "a" de las 100 partes iguales en la que ha sido dividida dicha cantidad.

Ejemplo:

Determinar el 45% de 720.

Resolución:

$\left(\frac{45}{100}\right)720 = 324$

En general: | El a% de N = $\left(\frac{a}{100}\right)N$ |

REGLA DEL TANTO POR CUANTO

Si una cantidad es dividida en 8; 72; 100; 274; 1000; ..., partes iguales será, respectivamente, el tanto por 8; 72; 100; 274; 1000; ...

Ejemplo:

- 145% $\xrightarrow{\text{se lee}}$ 145 por ciento = $\frac{145}{100}$
- 49% $\xrightarrow{\text{se lee}}$ 49 por ciento = $\frac{49}{100}$

  Pero, la palabra "ciento" representa 100 unidades.
- 324% $\xrightarrow{\text{se lee}}$ 324 por 100 = $\frac{324}{100}$
- ¿Cómo es 15 por 40?

  Resolución:

  Será: $\frac{15}{40}$

En general: | El a por b = $\frac{a}{b}$ |

EQUIVALENCIA ENTRE PORCENTAJE Y FRACCIÓN

Toda expresión en porcentaje se puede escribir equivalentemente como una fracción y viceversa.

Ejemplo:

A continuación las cantidades en porcentaje son expresadas en fracción y viceversa.
De porcentaje a fracción:

- $75\% = \frac{75}{100} <> \frac{3}{4}$
- $240\% = \frac{240}{100} <> \frac{12}{5}$
- $5,\widehat{6}\% = \frac{5,\widehat{6}}{100} = \frac{\frac{51}{9}}{100} <> \frac{17}{300}$
- $24 \text{ por } 36 = \frac{24}{36} <> \frac{2}{3}$
- $7\frac{2}{3}\% = \frac{7\frac{2}{3}}{100} = \frac{\frac{23}{3}}{100} <> \frac{23}{300}$

De fracción a porcentaje:

- $\frac{7}{5} <> \frac{7\times20}{5\times20} = \frac{140}{100} <> 140\%$
- $\frac{9}{7} <> \frac{9\times100}{7\times100} = \frac{900}{7\times100} = \frac{\frac{900}{7}}{100} = \frac{128\frac{4}{7}}{100} <> 128\frac{4}{7}\%$
- $\frac{4}{9} <> \frac{4\times100}{9\times100} = \frac{\frac{400}{9}}{100} = \frac{44,\widehat{4}}{100} <> 44,\widehat{4}\%$

Nota

La forma práctica en que una fracción se convierta en porcentaje es multiplicarla por 100.

OPERACIONES CON PORCENTAJE

La cantidad N, en forma intacta, representa su 100%, mientras que 2N; $\frac{3}{4}$N; etc. representarán 200%N; 75%N, respectivamente.

Ejemplos:

Operaciones con porcentaje, referidas a una misma cantidad N.

1. N + 20%N (Una cantidad aumenta en 20%)

   Resolución:

   100%N + 20%N = 120%N
2. $N - \frac{3}{4}N$ (¿qué porcentaje representa una cantidad si esta disminuye en sus 3/4?)

   Resolución:

   100%N − 75%N = 25%N
3. 145%N + 2N − 71%N.

   Resolución:

   145%N + 200%N − 71%N = 274%N
4. 40% más de N.

   Resolución:

   $\underbrace{N}_{100\%N} + 40\%N = 140\%N$
5. 35% menos de N.

   Resolución:

   $\underbrace{N}_{100\%N} - 35\%N = 65\%N$

DESCUENTOS SUCESIVOS

Es la operación que consiste en hallar el descuento único, que reemplazaría a varios descuentos sucesivos aplicados a una cierta cantidad.

Ejemplo:

Hallar el descuento único que reemplace a tres descuentos sucesivos del 20%; 25% y 30%.

Resolución:

1.^{er} método: falsa suposición
Sea 100 la cantidad inicial.

Hallamos la cantidad final.

Inicialmente: 100 −

1.^{er} descuento: 20%(100) = 20

Queda: 80 −

2.° descuento: 25%(80) = 20

Queda: 60 −

3.^{er} descuento: 30%(60) = 18

Al final queda: 42

Vemos que el descuento único es:

20 + 20 + 18 = 58

O también: $\underbrace{100}_{\text{C. Inicial}} - \underbrace{42}_{\text{C. Final}} = 58$

∴ El descuento único es 58%.

2.° método: considerando la cantidad ya descontada, hallamos directamente el descuento único.

Ejemplo:

Del ejemplo anterior, su descuento único será:

Inicialmente: 100% ∨ 100%N

1.^{er} descuento: 20% de N

Queda: [80% de N] ⇒ Nueva cantidad

2.° descuento: 25% de [ ]

Queda (75% [80% N]) ⇒ Nueva cantidad

3.^{er} descuento: 30% de ( )

Queda: 70% (75% 80% N)

Al final queda:

$$\left(\frac{70}{100}\right)\left(\frac{75}{100}\right)\left(\frac{80}{100}\right)N = \frac{42}{100}N \Rightarrow 42\%N$$

El descuento único será:

100%N − 42%N = 58%N

En general:

El descuento único que reemplace a n descuentos sucesivos del a%, b%, ..., n% viene dado por:

$$D_U = 100\% - (100 - a)\% \, (100 - b)\% \, ...(100 - n)\%$$

AUMENTOS SUCESIVOS

Es la operación que consiste en hallar el aumento único, que reemplazaría a varios aumentos sucesivos aplicados a una cierta cantidad.

Ejemplo:

Hallar el aumento único que reemplace a tres aumentos sucesivos del 25%, 40% y 60%.

Resolución:

1.^{er} método:

Sea 100 la cantidad inicial

Hallamos la cantidad final:

Inicialmente: 100 +

1.^{er} aumento: 25%(100) = 25

Nueva cantidad: 125 +

2.° aumento: 40%(125) = 50

Nueva cantidad: 175 +

3.^{er} aumento: 60%(175) = 105

Nueva cantidad: 280

Vemos que, el aumento único es:

25 + 50 + 105 = 180

o también: $\underbrace{280}_{\text{C. final}} - \underbrace{100}_{\text{C. inicial}} = 180$

∴ Aumento único es 180%.

2.° método:

Considerando la cantidad ya aumentada, hallamos directamente el aumento único.

Ejemplo:

Del ejemplo anterior, su aumento único será:

Inicialmente: 100% ∨ 100%N

1.^{er} aumento: 25% de N

Nueva cantidad: [125%N]

2.° aumento: 40% de [ ]

Nueva cantidad: (140% [125% N])

3.^{er} aumento: 60% de ( )

Nueva cantidad: 160% (140%125% N)

Efectuando:

$$\left(\frac{160}{100}\right)\left(\frac{140}{100}\right)\left(\frac{125}{100}\right)N = \frac{280}{100}N \Rightarrow 280\% \, N$$

Aumento único:

280% N − 100% N = 180% N

En general:

El aumento único que reemplace a "n" aumentos sucesivos del a%, b%;..., n%, viene dado por:

$$A_U = (100+a)\%(100+b) \, ... \, (100 + n)\% - 100\%$$

FORMAS DE VENDER UN ARTÍCULO

La regla de porcentaje es modelada a aplicaciones mercantiles, de donde se deducen las siguientes expresiones:

I. $P_V = P_C + g$

La ganancia "g", si no se dice nada, está referida al precio de costo "P_C".

II. $P_V = P_C - p$

La pérdida "p", si no se dice nada, está referida al precio de costo "P_C".

III. $P_V = P_L - \text{dcto.}$

El descuento, si no se dice nada, está referido al precio de lista "P_L".

Donde:

P_V: precio de venta P_C: precio de costo

P_L: precio de lista o precio fijado g: ganancia

p: pérdida

Además, en algunas transacciones se originan ciertos gastos (transporte, impuestos, etc.), por lo cual se obtiene la ganancia neta, dada por:

$$\boxed{g_{neta} = g_{bruta} - gastos}$$

Donde: g_{neta}: ganancia neta; g_{bruta}: ganancia bruta

Ejemplos:

1. Un artículo se vende ganando el 24% de su costo; si el precio de venta fue \$744, hallar su costo.

Resolución:

Ganancia: 24% del P_C; $P_V = \$744$

Luego: $744 = P_C + 24\%P_C$

$\Rightarrow 744 = 124\%P_C \Rightarrow P_C = \$600$

$\therefore$ El costo del artículo es \$600.

2. Un artículo se vende perdiendo el 8% de su costo; si el precio de venta fue S/.575, hallar su costo.

Resolución:

Ganancia: 8% del P_C; P_V = S/.575

Luego: $575 = P_C - 8\%P_C$

$575 = 92\%P_C \Rightarrow P_C$ = S/.625

$\therefore$ El costo del artículo es S/.625.

3. ¿Qué precio se fijó para la venta de un artículo, si luego de sufrir un descuento del 15%, se vendió en S/.544?

Resolución:

Descuento: 15% del P_L; $P_V = 544$

Luego: $544 = P_L - 15\%P_L$

$544 = 85\%P_L \Rightarrow P_L$ = S/.640

$\therefore$ El precio fijado fue S/.640.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Un boxeador decide retirarse cuando tenga el 80% de triunfos en su carrera. Si lleva realizadas 100 peleas, de las cuales ha perdido el 25% de ellas, ¿cuántas peleas como mínimo debe realizar, para poder retirarse?

Resolución:

Hasta el momento, el boxeador:

Peleas realizadas: 100 $\begin{cases} \text{Perdió: } 25\%(100) = 25 \\ \text{Triunfos: } 100 - 25 = 75 \end{cases}$

El boxeador realiza "x" peleas adicionales, las cuales, debe ganar todas.

Total de peleas: 100 + x — 100%

Total de triunfos: 75 + x — 80%

DP

Luego: $75 + x = (100 + x)\left(\frac{80}{100}\right) \Rightarrow x = 25$

$\therefore$ El boxeador realizará 25 peleas adicionales como mínimo.

2. A un recipiente que contiene cierta cantidad de vino, se le adiciona 240 litros de agua, luego se extrae el 20% de esta mezcla y se reemplaza totalmente por agua y resulta que la cantidad de vino de la nueva mezcla constituye el 48% de la mezcla. ¿Cuántos litros de vino contenía el recipiente?

Resolución:

Vino ↓ Agua ↙

Inicialmente: (V + 240) L

Se extrae 20% de la mezcla y se completa con agua, queda:

De vino: 80%L

De agua: 80%(240) + 20%(V+240) = 20%V + 240

Por dato: Cantidad de vino = 48% mezcla

$80\%V = 48\%(V + 240) \Rightarrow V = 360$ L

$\therefore$ El recipiente contenía 360 L de vino.

3. Un litro de mezcla está formado por 75% de alcohol y 25% de agua, tiene un peso de 960 g. Sabiendo que el litro de agua pesa un kilogramo, se pide calcular el peso de un litro de mezcla que contiene 45% de alcohol y 55% de agua.

Resolución:

Sabemos que: 1 L <> 1000 cm^3

Para el agua: 1 cm^3 < > 1 g

1.ª mezcla: 1 L <> 1000 cm^3

	Peso
Alcohol (75%) = 750 cm^3	710 g
Agua (25%) = 250 cm^3	250 g
Total:	960 g

2.ª mezcla: 1 L <> 1000 cm^3

Alcohol (45%) = 450 cm^3	x g
Agua (55%) = 550 cm^3	550 g

Hallamos el peso de alcohol:

750 cm^3 de alcohol ——— pesan 710 g

450 cm^3 de alcohol ——— pesan x

$x = 710\left(\frac{450}{750}\right) = 426$ g

$\therefore$ La segunda mezcla pesa: 426 + 550 = 976 g

4. Una persona "A" da a vender a otra persona "B" un objeto, esta a su vez le da a otra "C" que luego de venderlo toma el 10% y le entrega el resto a "B" que toma el 20% y le entrega al primero S/.1350. ¿En cuánto se vendió el objeto?

Resolución:

Usando falsa suposición:

Considerando que "C" vendió el objeto en S/.100.

C

Venta: S/.100

Comisión: 10%(100) = S/. 10

Entrega: S/. 90

B

Recibe: S/. 90

Toma: 20%(90) = S/. 18

Entrega: S/. 72 ⇒ **A** recibe S/.72

Comparando:

	P. venta	Recibe
Falsa suposición:	100	72
Real:	x	1350

$$x = \frac{(100)(1350)}{72} = 1875$$

∴ El objeto se vendió en S/.1875.

5. Una maquinaria se revalúa anualmente en un 20% y se deprecia cada año en 10%. Después de 2 años de comprada la maquinaria está valorizada en $46 656. Hallar el costo de la maquinaria.

Resolución:

Revaluación anual: 20% ⇒ 120% de su valor

Depreciación anual: 10% ⇒ 90% de su valor

Sea C el costo inicial de la maquinaria:

En 2 años, revaluación y depreciación simultánea es:

$(120\%)^2(90\%)^2C = 46\ 656$

$\left(\frac{36}{25}\right)\left(\frac{81}{100}\right)C = 46\ 656 \Rightarrow C = \$40\ 000$

∴ El costo inicial de la maquinaria: $40 000.

6. Un individuo decidió invertir cierta cantidad en un negocio y ganó el 20%; el total lo dedicó a otro negocio y perdió el 10%, por último invirtió lo que le quedaba, en otro negocio con un resultado del 8% como ganancia. La ganancia neta en los tres negocios ha sido de S/.4160. ¿Cuál fue la ganancia obtenida en el primer negocio?

Resolución:

Sea T la cantidad inicial.

Hallamos la cantidad final.

Tercer negocio: Ganó 8%

Segundo negocio: Perdió 10%

Primer negocio: Ganó 20%

$108\%\ [90\%\ (120\%T)] = 1{,}1664T$

Ganancia neta: $1{,}1664T - T = 0{,}1664T$

Por dato: $0{,}1664T = 4160$

$T = S/.25\ 000$

∴ Ganancia del primer negocio: 20%(25 000) = S/.5000.

7. Un comerciante vendió las 2/3 partes del cemento que había comprado con un beneficio del 10%; la mitad del resto, al precio de costo y lo que quedó con un porcentaje de pérdida tal que solo pudo obtener en todo el negocio lo que le costó. ¿Cuál fue este tanto por ciento?

Resolución:

Como solo deseamos calcular el porcentaje podemos usar falsa suposición.

Sea S/.120 el costo total del cemento:

1.ª venta: (2/3 del total)

Costo: $\frac{2}{3}(120) = S/.80$

Ganancia: 10%(80) = S/.8

2.ª venta: (1/2 del resto) = $\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{6}\text{ del total}\right)$

Costo: $\frac{1}{6}(120) = S/.20$

No gana ni pierde.

3.ª venta: $\left(\text{Resto: } 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\text{ del total}\right)$

Costo: S/.20; Pierde: x%(20)

Como al final de toda la venta no gana ni pierde, entonces lo que ganó es igual a lo que perdió:

$\Rightarrow 8 = \left(\frac{x}{100}\right)20 \Rightarrow x = 40$

∴ Perdió el 40%.

8. Para obtener fierro de fundición se dispone de un mineral que tiene una ley de fierro de 63%. Si se sabe que en la escoria de la fundición se pierde el 1% del contenido del fierro del mineral y que la producción anual de fierro es de 93 555 toneladas, ¿cuántas toneladas de mineral se usa por año?

Resolución:

Sea T la producción anual del mineral.

Hallamos la cantidad de fierro:

$\underbrace{(100-1)\%}_{\text{Escoria}}\ \underbrace{(63\%T)}_{\text{Pureza}} = 93\ 555 \Rightarrow T = 150\ 000$

∴ Producción anual: 150 000 t.

9. Si la base de un triángulo aumenta en 30% y la altura relativa a dicha base disminuye en 30%, el área del triángulo varía en 54 m². Hallar el área original del triángulo.

Resolución:

Por falsa suposición:

Inicialmente:

$A_o = 100\text{ m}^2 \Rightarrow b = 20\text{ m} \wedge h = 10\text{ m}$

Al final:

$A_f \begin{cases} b = 20 + 30\%(20) = 26\text{ m} \\ h = 10 - 30\%(10) = 7\text{ m} \end{cases}$

$\Rightarrow A_f = \frac{26\times 7}{2} = 91\text{ m}^2$

Variación del área: $100 - 91 = 9\text{ m}^2$

Comparando:	Área	Variación
Suposición:	100 m²	9 m²
Real:	x	54 m²

$\Rightarrow x = \frac{54}{9}100 = 600\ m^2$

$\therefore$ El área original es 600 m^2.

10. Se sabe que el precio fijado para la venta de un artículo es S/.210 más que su precio de costo, pero al momento de venderlo se rebajó el 10%. Si se ganó el 8% del precio de costo, calcular el precio fijado inicialmente.

Resolución:

Del enunciado:

Precio fijado: $P_L = 210 + P_C$

Descuento: $10\%P_L \Rightarrow P_V = P_L - 10\%P_L$

$P_V = 90\%P_L$ ....(1)

Ganancia: $8\%P_C \Rightarrow P_V = P_C + 8\%P_C$

$P_V = 108\%P_C$ ....(2)

Como (1) = (2): $90\%P_L = 108\%P_C \Rightarrow P_L = \frac{6}{5}P_C$

También: $210 + P_C = \frac{6}{5}P_C \Rightarrow P_C = S/.1050$

$\therefore$ Precio fijado inicial: 210 + 1050 = S/.1260.

11. Un fabricante reduce en 4% el precio de venta a los artículos que fabrica para que aumente en 8% la cifra total de sus ingresos. ¿En qué porcentaje tendrán que aumentar sus ventas?

Resolución:

Por falsa suposición:

- Inicialmente: P_V = S/.100 c/u
  Cantidad = 100 artículos
  $\Rightarrow$ Ingresos: 100 × 100 = S/.10 000
- Al final: el P_V se reduce 4% y los ingresos aumentan 8%.
  P_V = S/.96 c/u
  Cantidad = ?
  Ingresos: 108%(10 000) = S/.10 800
  Hallamos el número de artículos:
  $\text{n.° artículos} = \frac{10\,800}{96} = 112{,}5$
  Aumento de las ventas: 112,5 − 100 = 12,5
  $\therefore$ Las ventas aumentaron 12,5%.

12. Dos recipientes A y B contienen vino. El recipiente A está lleno en su mitad, el de B en un tercio de su volumen. Se completan las capacidades de A y B con agua, vertiéndose la mezcla en un tercer recipiente C. Sabiendo, que la capacidad de B es el doble de la de A, determinar el porcentaje de vino que contiene la mezcla C.

Resolución:

Por falsa suposición, del enunciado:

A = 60 L   B = 120 L   C = 60 + 120 = 180 L

Vino: 30 L + Vino: 40 L = Vino: 30 + 40 = 70 L

Agua: 30 L + Agua: 80 L = Agua: 30 + 80 = 110 L

$\therefore$ Porcentaje de vino en C: $\left(\frac{70}{180}\right)100 = 38{,}9\%$

13. Ana le dice a Betty: "Entre tu dinero y el mío hacemos S/.1125, pero si hubieras recibido 30% menos de lo que te corresponde, tendrías lo que yo tendría si recibiera 20% menos". ¿Cuánto tiene cada uno?

Resolución:

Sabemos que: A + B = 1125 ...(1)

También: 80%A = 70%B ...(2)

De (1) y (2): A = S/.525; B = S/.600

$\therefore$ Ana tiene S/.525 y Betty tiene S/.600

14. En una industria se han fabricado 1000 productos, el 60% de ellos han sido fabricados por la máquina A y el resto por la máquina B. Si se sabe que el 5% de lo fabricado por A son defectuosos y el 4% por B, ¿cuántos defectuosos hay en los 1000 productos?

Resolución:

Del enunciado: 1000

De A: 60%(1000) = 600 productos defectuosos

De B: 1000 − 600 = 400 productos defectuosos

Hallamos el total de defectuosos:

D = 5%(600) + 4%(400) $\Rightarrow$ D = 30 + 16 = 46

$\therefore$ Son 46 productos defectuosos.

15. A un artículo cuyo precio de lista es el doble del costo, se le hace una rebaja del 25%. ¿Cuál es el porcentaje de utilidad con respecto al costo?

Resolución:

Sea el costo: P_C = S/.100

$\Rightarrow P_L$ = S/.200

Rebaja: 25%(200) = S/.50

$\Rightarrow P_V$ = 200 − 50 = S/.150

Ganancia = 150 − 100 = S/.50

$\therefore$ El porcentaje de utilidad: 50%

16. Un mayorista vende un producto ganando el 20% del precio de fábrica. Un distribuidor reparte estos productos a las tiendas de comercio, ganando una comisión del 15% del precio al por mayor. La tienda remata el artículo, haciendo un descuento del 10% del precio de compra (del distribuidor). ¿En qué porcentaje se eleva el precio de fábrica del producto?

Resolución:

Usando falsa suposición:

Sabemos acerca del producto:

Mayorista	**Distribuidor**
P_C = S/.100	P_C = S/.120
g = S/.20	g = 15%(120) = S/.18
P_V = S/.120	P_V = S/.138

Tienda

P_C = S/.138

dcto. = 10%(138) = S/.13,8

P_V = S/.124,2

El precio se elevó en: 124,2 − 100 = 24,2

$\therefore$ Porcentaje que se elevó el precio de fábrica 24,2%.

17. Una persona compra 200 objetos A y los vende ganando 10%; con el importe de la venta compró 80 objetos B, y los vendió ganando 15%; con el importe de esta venta compró 828 objetos C, al precio de 99 dólares la docena. Calcular el precio de un objeto A.

Resolución:

Sea P_A, el precio de un objeto A.

Del enunciado: Venta objeto B; Venta de objeto. A; Objetos C

$$\underbrace{115\%[\underbrace{110\%(200P_A)}_{\text{Venta de objeto A}}]}_{\text{Venta objeto B}} = \underbrace{\left(\frac{99}{12}\right)828}_{\text{Objetos C}}$$

$\Rightarrow P_A = S/.27$ $\therefore$ Un objeto A cuesta: S/.27

18. En qué relación se encuentra el precio de lista y el costo de un artículo, sabiendo que aun haciendo dos descuentos sucesivos del 10% y 20%, se obtiene una utilidad del 44% sobre el costo.

Resolución:

Sea: $P_C = S/.100$

Ganancia: 44%(100) = S/.44

$\Rightarrow P_V = 100 + 44 = S/.144$ ...(1)

Hallamos el descuento:

$$D_U = 10 + 20 - \frac{10 \times 20}{100} = 28\%$$

Luego: $P_V = P_L - 28\%P_L = 72\%P_L$ ...(2)

(1) = (2): $144 = 0,72P_L \Rightarrow P_L = S/.200$

$$\therefore \frac{P_L}{P_C} = \frac{200}{100} = \frac{2}{1}$$

19. Un libro se vende recargándosele el "r" por 100 del precio de costo, pero un estudiante al comprarlo le rebajaron el "p" por 100. Si el vendedor no ganó ni perdió, ¿cuánto le rebajaron al estudiante?

Resolución:

Del enunciado:

Sea P_C, el costo del artículo.

Precio de lista: $P_L = P_C + \left(\frac{r}{100}\right)P_C = \left(\frac{100+r}{100}\right)P_C$

Rebaja: $\frac{p}{100}P_L$

Precio de venta: $P_V = P_L - \frac{p}{100}P_L = \left(\frac{100-p}{100}\right)P_L$

Pero, como no se gana ni se pierde:

$$P_V = P_C \Rightarrow \left(\frac{100-p}{100}\right)P_L = P_C$$

También: $\left(\frac{100-p}{100}\right)\left(\frac{100+r}{100}\right)P_C = P_C$

$\therefore$ Resolviendo, la rebaja es: $p = \frac{100r}{100+r}$

20. Un comerciante adquirió cierta mercadería y vendió los 2/5 con una ganancia del 20%, entregó el resto a una persona que trabaja a comisión, que lo vendió con una ganancia del 25% quedándose esa persona con el 10% y entregando el resto al comerciante. Si en todo el negocio obtuvo una ganancia de S/.465, ¿cuánto costó la mercadería?

Resolución:

Usando falsa suposición.

Costo total de la mercadería: S/.100

1.ª venta lo hace el comerciante (2/5 del total)

Costo = $\left(\frac{2}{5}\right)100 = S/.40$

Ganancia = 20%(40) = S/.8

2.ª venta lo hace el vendedor (3/5 del total)

Costo = $\frac{3}{5}100 = S/.60$

Ganancia = 25%(60) = S/.15

Comisión: 10%(60 + 15) = S/.7,5

Luego, ganancia del comerciante:

8 + 7,5 = S/.15,5

	Costo		Ganancia
F.S.	100	——	15,5
Real	x	——	465

$$\Rightarrow x = \frac{100 \times 465}{15,5} = 3000$$

$\therefore$ La mercadería costó S/.3000.

21. Un importador vendía a S/.210 un producto que traía de USA ganando el 20%, cuando el dólar costaba S/.3,50. Ahora, el dólar ha subido a S/.3,52 y además el precio en USA ha aumentado en un 20%. ¿A qué precio deberá vender en la actualidad dicho artículo, para que la ganancia sea del 25%?

Resolución:

Inicialmente: $P_V = P_C + g$

Precio de venta: S/. 210; Ganancia: 20%

$\Rightarrow 210 = P_C + 20\%P_C = 120\%P_C$

$\Rightarrow P_C = S/.175$

Pero: \$1 = S/.3,5 $\Rightarrow$ Costo en USA: $\frac{175}{3,5} = \$50$

Al final: \$1 = S/.3,52

Costo en USA: 50 + 20%(50) = \$60

Costo en Perú: 60(3,52) = S/.211,2

Ganancia: 25%(211,2) = S/.52,8

$\therefore$ Nuevo precio de venta: 211,2 + 52,8 = S/.264

22. Para fijar el precio de venta de un TV se incrementó su costo en 60%, pero al momento de venderlo se hizo un descuento del 20%, observándose que si se hubiera hecho sobre el incremento estaría ganando \$100 de más. ¿En cuánto se vendió el TV?

Resolución:

Sea P_L, el costo del TV.

Precio fijado: $P_L = P_C + 60\%P_C = 160\%P_C$

Descuento: $20\%P_L$

Precio de venta: $P_{V_1} = P_L - 20\%P_L = 80\%P_L$

$\Rightarrow P_{V_1} = 80\%(160\%)P_C$

$\Rightarrow P_{V_1} = 128\%P_C$ ...(α)

Ganancia: $128\%P_C - P_C = 28\%P_C$ ...(1)

Descuento sobre el incremento:

$20\%(60\%P_C) = 12\%P_C$

Precio de venta: $P_{V_2} = \underbrace{P_L}_{160\%P_C} - 12\%P_C = 148\%P_C$

Ganancia: $148\%P_C - P_C = 48\%P_C$ ...(2)

De (1) y (2), se ganaría $100 más.

$\Rightarrow 48\%P_C - 28\%P_C = 100 \Rightarrow P_C = \$500$

Hallamos el precio de venta:

En (α): $P_V = 128\%(500) = \$640$

$\therefore$ El TV se vendió en $640.

23. Una persona compró cierta cantidad de artículos a S/.60 cada uno; si los vendió con una ganancia neta de S/.1200 y los gastos ascendieron al 20% de la ganancia bruta, ¿cuántos artículos compró, si recaudó en total S/.2400?

Resolución:

Del enunciado: Costo unitario: S/.60

Ganancia neta: S/.1200; Gastos: $20\%G_{bruta}$

Sabemos que: $G_{neta} = G_{bruta} - \text{Gastos}$

$\Rightarrow 1200 = G_{bruta} - 20\%G_{bruta} = 80\%G_{bruta}$

$\Rightarrow G_{bruta} = S/.1500$

Pero: Ingreso total = S/.2400

$\Rightarrow$ Costo total = 2400 − 1500 = S/.900

Hallamos el número de artículos comprados:

$\therefore$ Se compraron $\frac{900}{60} = 15$ artículos.

24. Un comerciante compra al contado un artículo con un descuento del 20% del precio de lista. ¿Qué porcentaje del precio fijado en lista representa el precio de venta del comerciante, si él debe ganar el 20% del precio de compra?

Resolución:

Usamos falsa suposición:

Sea: $P_C = S/.100$; $g = 20\%(100) = S/.20$

$\Rightarrow P_V = 100 + 20 = S/.120$

Descuento = $20\%P_L$

Sabemos que: $P_V = P_L - \text{Descuento}$.

$120 = \underbrace{P_L - 20\%P_L}_{80\%P_L} \Rightarrow P_L = S/.150$

Hallamos el porcentaje del P_L que representa el P_V:

$\Rightarrow \left(\frac{x}{100}\right)150 = 120 \Rightarrow x = 80\%$

$\therefore$ Representa el 80% del precio fijado.

25. Al tostar café se pierde el 20% del peso. Un tendero vende café tostado a S/.27,6 el kg ganando el 15% sobre el precio de costo. ¿A qué precio se ha comprado el kg de café sin tostar?

Resolución:

Del enunciado:

Precio de venta de café tostado: S/.27,6 el kg

Ganancia del kg de café tostado: $15\%P_C$

$\Rightarrow P_C + 15\%P_C = 27{,}6; \quad 115\%P_C = 27{,}6$

Costo de café tostado: $P_C = S/.24$ el kg.

Pero, de 1 kg de café crudo nos queda: 0,8 kg de café tostado.

$\therefore$ Costo de 1 kg de café crudo: $0{,}8 \times 24 = S/.19{,}2$

26. Un importador de maquinaria para construcción, carga sobre su mercancía el 25% del precio de costo; si descuenta el 12% del importe de la factura a un comprador, ¿cuál es el porcentaje de ganancia efectiva?

Resolución:

Usando falsa suposición:

Costo de la mercancía: S/.100

Aumento: 25%(100) = S/.25

Precio fijado: 100 + 25 = S/.125

Descuento: 12%(125) = S/.15

El precio de venta: 125 − 15 = S/.110

$\Rightarrow$ Ganancia efectiva: 110 − 100 = S/.10

$\therefore$ Ganancia efectiva: 10%

27. El precio de costo de un artículo es S/.2500. ¿A cuántos soles se debe fijar su precio de venta, si al venderlo se hacen dos descuentos sucesivos del 15% y 20%; con lo cual todavía se está ganando el 44% del 20% del precio de costo?

Resolución:

Tenemos: Precio de costo: S/.2500

Precio de lista: ?

Descuentos: 15% y 20% $\Rightarrow D_U = 32\%$

Ganancia: $44\% \times 20\% \times 2500 = S/.220$

Luego, considerando la ganancia:

$P_V = 2500 + 220 = S/.2720$

Considerando el descuento:

$P_V = P_L - 32\%P_L = 68\%P_L$

$\Rightarrow 68\%P_L = 2720 \quad \therefore P_L = S/.4000$

28. En una universidad particular se rebajan las pensiones de enseñanza a los estudiantes de menores recursos económicos en un 40% y aumentan en 10% al resto. Si el monto total de las pensiones queda disminuido en un 20% con esta política, ¿qué porcentaje de la pensión total, representa la pensión pagada por los estudiantes de menores recursos económicos?

Resolución:

Usando falsa suposición:

Pensión inicial: S/.100; n.° de alumnos: 100

Entonces, el ingreso: S/.10 000

	Pensión	Cantidad	Ingreso
Bajos recursos	S/.60	x	60x
Altos recursos	S/.110	100 − x	110(100 − x)
		Total	11 000 − 50x

Nuevo ingreso: 80%(10 000) = 8000

$\Rightarrow 11\,000 - 50x = 8000 \Rightarrow x = 60$

$\therefore$ El porcentaje de la pensión total: 60%.

29. Se va a rifar un equipo de sonido que costó $288, para lo cual se han impreso 2000 boletos, de los cuales se piensa vender solo el 90%. ¿A cómo se debe vender cada boleto si se piensa obtener una ganancia que sea igual al 20% del monto que se recaudaría?

Resolución:

Del enunciado tenemos: ganancia = 20% del monto

$g = 20\%(288 + g) \Rightarrow g = 20\% \times 288 + 20\%g$

$\Rightarrow 80\%g = 20\%288 \Rightarrow g = \left(\frac{20}{80}\right)288 = \$72$

Recaudación en la rifa: 288 + 72 = $360

Número de boletos vendidos: $90\% \times 2000 = 1800$

El precio de cada boleto: $\frac{360}{1800} = 0{,}2$

$\therefore$ Cada boleto se vende en $0,2

30. Si el lado de un cuadrado aumenta en 20%, su área aumenta en 2640 u^2. ¿En cuánto aumentaría su área, si su lado aumentase en 40%?

Resolución:

Utilizamos falsa oposición.

Inicialmente: $lado_1 = 10 \Rightarrow área_1 = 10^2 = 100$

Aumenta en 20%: $lado_2 = 10 + 20\%(10) = 12$

$\Rightarrow área_2 = 12^2 = 144$ (el área aumentó: 44 u^2)

Aumenta en 40%: $lado_3 = 10 + 40\%(10) = 14$

$\Rightarrow área_3 = 14^2 = 196$ (el área aumentó: 96 u^2)

Hallamos el aumento real:

	Falsa suposición	Real
Aumenta en 20%	44	2640
Aumenta en 40%	96	x

$\Rightarrow x = \frac{96 \times 2640}{44} = 5760$

$\therefore$ El área aumentó en 5760 u^2

31. En una fábrica las máquinas A, B y C producen 3000 calculadoras; "A" produce 30%, "B" el 34% y "C" el 36%. El 10% de lo producido por "C" son defectuosas y el 20% de "B"; si el 14% de la producción son defectuosas, ¿qué porcentaje de lo producido por "A" son sin defectos?

Resolución:

Hallamos la producción de cada máquina:

Máquina "A": $30\% \times 3000 = 900$

Maquina "B": $34\% \times 3000 = 1020$

Máquina "C": $36\% \times 3000 = 1080$

Hallamos el número de calculadoras defectuosas:

Total: $14\% \times 3000 = 420$

Máquina "C": $10\% \times 1080 = 108$

Máquina "B": $20\% \times 1020 = 204$

Máquina "A": $420 - (108 + 204) = 108$

Calculadoras sin defecto de la máquina "A":

$900 - 108 = 792$

En porcentaje: $\left(\frac{792}{900}\right)100 = 88\%$

$\therefore$ El porcentaje sin defectos es: 88%

32. Un comerciante ha comprado cierta cantidad de vino a S/.18 el litro. Ha vendido la tercera parte perdiendo el 10%; la cuarta parte con un beneficio del 20% y el resto con un beneficio del 10% y de este modo ha ganado en total S/.4032. ¿Cuántos litros compró?

Resolución:

Sea P_C el costo total de los litros de vino.

Hallamos los ingresos de las tres ventas:

Primera venta:

$P_{C_1} = \frac{1}{3} P_C \quad \Rightarrow P_{V_1} = 90\%\left(\frac{1}{3}P_C\right) = 30\%P_C$

$p_1 = 10\% \, P_{C_1}$

Segunda venta:

$P_{C_2} = \left(\frac{1}{4}\right)P_C \quad \Rightarrow P_{V_2} = 120\%\left(\frac{1}{4} \times P_C\right) = 30\%P_C$

$g_2 = 20\%P_{C_2}$

Tercera venta:

$P_{C_3} = \left(\frac{5}{12}\right)P_C \quad \Rightarrow P_{V_3} = 110\%\left(\frac{5}{12} \times P_C\right) = \frac{275}{6}\%P_C$

$g_3 = 10\%P_{C_3}$

De la ganancia:

$30\%P_C + 30\%P_C + \frac{275}{6}\%P_C - 100\%P_C = 4032$

$\Rightarrow \frac{35}{6}\%P_C = 4032 \Rightarrow P_C = S/.69\,120$

Hallamos la cantidad de litros: $\frac{69\,120}{18} = 3840$

$\therefore$ Se compraron: 3840 L.

33. El precio de un reloj es 897 euros, el relojero ganó en esta operación el 15%; si el beneficio neto fue 97 euros, hallar los gastos que produce la venta del reloj.

Resolución:

Hallamos el costo y ganancia del reloj:

Sabemos que: $P_V = P_C + g \Rightarrow 897 = P_C + 15\%P_C$

$\Rightarrow 897 = 115\%P_C \Rightarrow P_C = 780$ euros

La ganancia bruta: $g_{bruta} = 897 - 780 = 117$ euros

Además: $g_{neta} = g_{bruta} -$ gastos

$\Rightarrow 97 = 117 -$ gastos $\quad \therefore$ gastos = 20 euros

34. Del dinero que dispongo puedo comprar cierto número de lapiceros de tinta líquida y si este precio variase en 10% podría comprar 10 lapiceros más. ¿Cuántos lapiceros podría comprar?

Resolución:

Sea "p" el precio de cada lapicero y "n" el número de lapiceros que puedo comprar.

Cantidad de dinero que dispongo: $p \times n$

Si el precio varía en 10%, son 10 lapiceros más:

$(p - 10\%p)(n + 10)$

Se cumple: $p \times n = (p - 10\%p)(n + 10)$

$p \times n = 90\%p(n + 10)$

$n = \frac{90}{100}(n + 10) \Rightarrow 10n = 9n + 90 \Rightarrow n = 90$

$\therefore$ Se podría comprar: 90 + 10 = 100 lapiceros

35. Un texto se ofrece recargándole el "a" por "b" de su precio de costo; un alumno de la UNI obtiene una rebaja del "c" por "b" y lo compra. Si el vendedor no ganó ni perdió, hallar el valor de "c".

Resolución:

Sea P_C el precio del costo del texto.
Hallamos el precio que se fija para su venta:

$P_L = P_C + \frac{a}{b}P_C = P_C\left(1 + \frac{a}{b}\right)$ ...(1)

El alumno consigue un descuento del "c" por "b" del precio fijado:

$P_V = P_L - \frac{c}{b}P_L = P_L\left(1 - \frac{c}{b}\right)$ ...(2)

(1) en (2): $P_V = P_C\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 - \frac{c}{b}\right)$

Como el vendedor no gana ni pierde: $P_V = P_C$

Se tiene: $P_C\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 - \frac{c}{b}\right) = P_C$

$\Rightarrow \left(\frac{b+a}{b}\right)\left(\frac{b-c}{b}\right) = 1 \Rightarrow \frac{b-c}{b} = \frac{b}{a+b}$

Luego: $b - c = \frac{b^2}{a+b} \Rightarrow c = b - \frac{b^2}{a+b}$

$\Rightarrow c = \frac{ab + b^2 - b^2}{a+b} = \frac{ab}{a+b}$

$\therefore$ El valor de "c" es: $\frac{ab}{a+b}$

36. ¿Qué tanto por ciento del 40% del 60% del 120% de una cantidad es el 4 por 15 del 72% del 6% de la misma cantidad?

Resolución:

Sea X el porcentaje que se desea calcular y N la cantidad, se cumple:

$X\%(40\%)(60\%)(120\%)N = \left(\frac{4}{15}\right)(72\%)(6\%)N$

Es lo mismo que:

$\left(\frac{X}{100}\right)\left(\frac{40}{100}\right)\left(\frac{60}{100}\right)\left(\frac{120}{100}\right)N = \left(\frac{4}{15}\right)\left(\frac{72}{100}\right)\left(\frac{6}{100}\right)N$

Luego: $\left(\frac{X}{10}\right)4 \times 6 \times 12 = \frac{4}{15}\,72 \times 6$

$\Rightarrow X = \left(\frac{72}{15}\right)\left(\frac{10}{12}\right) \Rightarrow X = 4 \quad \therefore$ El 4%

37. Si el precio de un artículo aumenta en 20%, ¿en qué porcentaje disminuye la cantidad de artículos, si se cuenta con la misma suma de dinero?

Resolución:

Sea S/.100 el precio de cada artículo y 100 la cantidad de artículos:

Suma total de dinero: 100×100 = S/.10 000

El nuevo precio de cada artículo:

$100 + 20\%(100)$ = S/.120

Nueva cantidad de artículos:

$\frac{10\,000}{120}$ = S/.$83,\widehat{3}$ cada uno

La cantidad de artículos disminuyó:

$100 - 83,\widehat{3} = 16,\widehat{6}$

$\therefore$ El porcentaje que disminuyó: $16,\widehat{6}$

38. Un teatro tiene capacidad para 450 personas. Cierto día ingresó cierta cantidad de personas a media función pagando el 85%, con lo cual el ingreso del teatro se vió afectado en 6%. Al otro día, cuando se inicia la función, solo había 5/6 de la cantidad habitual, entonces a media función la rebaja es de 24%. ¿En qué porcentaje se ve afectada la recaudación?

Resolución:

Consideramos el precio de la función S/.100

Luego, el ingreso normal: 100×450 = S/.45 000

Hallaremos "n" el número de personas que pagó el 85% del precio normal de la función:

(pagaron S/.100) + (pagaron S/.85) = I(6%)

$100(450 - n) + 85n = (100 - 6)\% \times 45\,000$

$\Rightarrow n = 180$

Los que pagaron el precio normal (S/.100):

$450 - 180 = 270$

Al día siguiente, el precio se rebajó 24% y asistieron los 5/6 de la cantidad habitual.

- Asistencia con el precio normal: $\left(\frac{5}{6}\right)270 = 225$
- Asistencia con el precio rebajado: $450 - 225 = 225$

Nuevo ingreso: $100 \times 225 + 85 \times 225 = 41\,625$

Se dejó de recibir : $45\,000 - 41\,625 = 3375$

$\therefore$ En porcentaje: $\left(\frac{3375}{45\,000}\right)100 = 7,5\%$

39. Un comerciante compró un artefacto eléctrico. Con la finalidad de venderlo; fija el precio con un aumento del 60% (sin incluir IGV), debido a la inflación incrementará su precio en 5% y 3% en forma sucesiva y venderla finalmente a un cliente, realizando un descuento del 5%. ¿Qué porcentaje del precio de costo pagaría el cliente, si el impuesto general a las ventas (IGV) es del 18%?

Resolución:

Sea P el costo del artefacto, hallamos directamente el porcentaje pedido:

$P_V = (\underbrace{95\%}_{\text{Descuento 5\%}} \times \underbrace{103\% \times 105\%}_{\text{Incremento 3\% y 5\%}} \times \underbrace{160\%P}_{\text{Precio fijado}})\underbrace{(118\%)}_{\text{IGV + 18\%}}$

Efectuando: $P_V = 193,98\%P$

$\therefore$ El porcentaje pedido: 193,98%

40. Lo que gana y gasta mensualmente una persona está en la relación de 13 a 8. ¿En qué porcentaje deberá disminuir sus gastos mensuales para que su ahorro mensual aumente en 14,4%?

Resolución:

Suponiendo que ahorra 100:

$$\frac{\text{Gana}}{13} = \frac{\text{gasta}}{8} = \frac{\overbrace{\text{Gana} - \text{gasta}}^{\text{Ahorro}}}{13-8} = \frac{100}{5}$$

Se obtiene: gana = 260; gasta = 100
Ahora debe aumentar su ahorro en 14,4%
Nuevo ahorro = (100 + 14,4)% × 100 = 114,4
Como no varía lo que gana, el nuevo gasto g será:
260 − g = 114,4
⇒ g = 145,6

$$\Rightarrow \% \text{ disminuido} = \frac{(160 - 145,6)}{160} \times 100\%$$

∴ Porcentaje disminuido: 9%

41. En una universidad nacional se matricularon 15 000 estudiantes. Si el 87% de las mujeres y el 12% de los hombres se retiran, el 12% de los que quedan serían mujeres, ¿cuántos varones se han retirado?

Resolución:

Sea H: número de hombres
M: número de mujeres
⇒ H + M = 15 000

	Retiran	Quedan
Mujeres	87%	13%
Hombres	12%	88%

Además:

$$12\%(\underbrace{13\%M + 88\%H}_{\text{quedan}}) = \underbrace{13\%M}_{\text{mujeres que quedaron}}$$

⇒ 12%(88%H) = (100 − 12)%(13%M)

$$\Rightarrow \frac{H}{13} = \frac{M}{12} = \frac{H+M}{13+12} = \frac{15\,000}{25}$$

Se obtiene: H = 7800 ∧ M = 7200
∴ Se retiran: 12%(7800) = 936 hombres

42. Un libro se vende recargándose el r% del precio de costo, pero al comprarlo un estudiante tuvo una rebaja del p%. Si el vendedor no ganó ni perdió, hallar p.

Resolución:

Sea P_C el costo del libro.
Se recarga r%, se desea vender a (100 + r)%P_C
Al comprarlo, se rebaja el p%, vendiéndose a:
(100 − p)%(100 + r)%P_C = P_C

No gana ni pierde, luego: $\left(1 - \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{r}{100}\right) = 1$

$$\Rightarrow 1 - \frac{p}{100} = \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{100}\right)} = \frac{100}{100+r}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{100}{100+r} = \frac{p}{100} \quad \Rightarrow p = \frac{100r}{100+r}$$

Dando forma:

$$p = \frac{1}{\frac{100}{100r} + \frac{r}{100r}} = \frac{1}{\frac{1}{r} + 0,01} \quad \therefore\ p = \frac{1}{0,01 + \frac{1}{r}}$$

43. Al vender un artículo se puede ganar el 30% de su precio de costo o el 30% de su precio de venta, ganándose en un caso 54 soles más que en el otro. Hallar el precio de costo del artículo.

Resolución:

Sea P_C el costo del libro
Primera forma: gana 30% del costo
$P_{V_1} = P_C + 30\%P_C = 130\%P_C$

$$\Rightarrow P_{V_1} = \frac{13}{10}P_C \qquad \ldots(1)$$

Segunda forma: gana el 30% de la venta
$P_{V_2} = P_C + 30\%P_{V_2} \Rightarrow 70\%P_{V_2} = P_C$

$$\Rightarrow P_{V_2} = \frac{10}{7}P_C \qquad \ldots(2)$$

Se observa que: $P_{V_2} > P_{V_1}$
En el segundo gana 54 soles más, luego:

$$P_{V_2} - P_{V_1} = \frac{10}{7}P_C - \frac{13P}{10}P_C = 54$$

$$\Rightarrow \frac{9}{70}P_C = 54 \qquad \therefore\ P_C = S/.420$$

44. Un artefacto cuesta S/.2250. Se le descuenta x% y luego x soles, obteniéndose S/.1310. ¿Cuánto resultará si primero se descuentan x soles y luego el x%?

Resolución:

Sea P = 2250 el precio del artefacto, luego:
Descuenta x% ⇒ Queda: (100 − x)%P
Descuenta x soles ⇒ Queda: (100 − x)%P − x

$$\Rightarrow \left(\frac{100-x}{100}\right)2250 - x = 1310$$

⇒ 2250 − 22,5x − x = 1310
⇒ x = 40
Primero se descuenta 40 soles y luego 40%
∴ 60%(2250 − 40) = S/.1326

45. Al vender un artículo en 2200 soles se ganó el 10% del precio de costo más el 5% del precio de venta. ¿A cómo se debe vender dicho artículo para ganar el 20% del precio de costo más el 20% del precio de venta?

Resolución:

Inicialmente se vende a un precio P_1 = 2200
$P_1 = 2200 = P_C + 10\%P_C + 5\%(2200)$
⇒ 95%(2200) = 110%P_C
⇒ P_C = 1900
Se desea vender a otro precio P_2, de modo que:
$P_2 = 1900 + 20\%(1900) + 20\%P_2$
⇒ 80%P_2 = 120%(1900)
∴ P_2 = S/.2850

46. El costo de fabricación de un producto está compuesto de: costo de materia prima (M); costo de mano de obra (N) y gastos generales (P), los cuales cumplen M/4 = N/3 = P/1. Calcular el porcentaje de ganancia (G) que obtiene el fabricante considerando las siguientes informaciones:

I. Si M aumentara un 25% y el precio de venta no varía, entonces la ganancia se reduciría un 40%.
II. Si N aumentara un 50% y el precio de venta no varía, entonces la ganancia se reduciría un 60%.
III. Si P aumentara un 100% y M disminuyera un 25%, manteniendo el precio de venta, entonces la ganancia no varía.

Resolución:

De acuerdo con los datos del problema:

$\frac{M}{4} = \frac{N}{3} = \frac{P}{1} = k \Rightarrow M = 4k; N = 3k; P = k$

Costo total = M + N + P = 8k

$P_V = P_C + G = (8k) + G$

I. M aumenta 25% $\Rightarrow$ M' = 125%(4k)
$\Rightarrow$ M' = 5k
Costo $total_2$ = 5k + 3k + k = 9k
Mantiene P_V = 9k + 60%G = 8k + G
$\Rightarrow$ k = 40%G $\Rightarrow$ 8k = 320%G
Donde: $G = \frac{100}{320}(8k)$ = 31,25% costo

II. N aumenta 50% $\Rightarrow$ N' = 150%(3k)
$\Rightarrow$ N' = 4,5k
Costo $total_3$ = 4k + 4,5k + k = 9,5k
Mantiene P_V = 9,5k + 40%G = 8k + G
$\Rightarrow$ 1,5k = 60%G $\Rightarrow$ G = 31,25% costo

III. Si el precio de venta y la ganancia no varían, entonces lo que varía sería el costo y no se encontraría el porcentaje de ganancia.
$P_V = costo_1 + G = costo_2 + G$
$\therefore$ G = 31,25%

47. La oferta en un centro comercial es ofrecer al cliente tres descuentos sucesivos del 10%, 20% y 25% y aun así se logra ganar el 10%. Si el departamento de compras adquiere un artículo en S/.540, ¿a qué precio se debe ofrecer dicho artículo?

Resolución:

Sea P el precio que se debe ofrecer (precio de lista)
Descuento del 10% $\Rightarrow$ vende 90%P
Descuento del 20% $\Rightarrow$ vende 80%(90%P) = 72%P
Descuento del 25% $\Rightarrow$ vende 75%(72%P) = 54%P
$\Rightarrow$ 54%P = 540 + 10%(540)
$\therefore$ P = S/.1100

48. Calcular el precio de venta de un artículo si se tienen los siguientes datos:

I. La ganancia y el precio de costo están en la relación de 1 a 3.
II. Se conoce o la ganancia o el precio de costo.
III. La ganancia es un porcentaje del precio de costo.

Resolución:

Se desea conocer el precio de venta:

I. $\frac{G}{P_C} = \frac{1}{3} \Rightarrow G = k \wedge P_C = 3k;$
$P_V = P_C + G \Rightarrow P_V = 4k$

II. Si se conoce G (o P_C) se determina k, luego se conoce P_V.

Ejemplo:

$G = 200 = k \Rightarrow P_V = 4(200)$
$\Rightarrow P_V = 800$

III. $G = x\%P_C$
¿Qué tanto por ciento?
No indica valor apropiado para encontrar P_V

$\therefore$ Los datos I y II juntos son suficientes.

49. El precio de lista de un artículo es S/.1200, al venderlo se hacen dos descuentos sucesivos del 10% y 15%. Si en esta venta se está ganando el 20%, ¿cuál es el costo del artículo?

Resolución:

$P_L = 1200$

$P_V = \underbrace{85\%[\underbrace{90\%(1200)}_{\text{Descuento 10\%}}]}_{\text{Descuento 15\%}} = P_C + \underbrace{20\%P_C}_{\text{Ganancia 20\%}}$

$\therefore P_C$ = S/.765

50. Un comerciante compra cierta mercadería y vende 1/3 de ella ganando el 14%, la mita ganando el 13% y para que la ganancia total sea el 14,5% vende el resto a S/.2800. ¿Cuánto le costó la mercadería?

Resolución:

Sea M el costo de la mercadería, donde M = 6k

Vende $\frac{1}{3}(6k) = 2k \Rightarrow$ gana 14%(2k)
$\Rightarrow G_1 = 28\%k$

Vende $\frac{1}{2}(6k) = 3k \Rightarrow$ gana 13%(3k)
$\Rightarrow G_2 = 39\%k$
$\Rightarrow G_1 + G_2 + G_3 = 14,5\%(6k)$
$\Rightarrow 28\%k + 39\%k + G_3 = 87\%k$
$\Rightarrow G_3 = 20\%k$

Por otro lado, resta vender: 6k − 2k − 3k = k
Luego, en la tercera venta: k + 20%k = 2800
$\Rightarrow$ k = 7000/3
Finalmente, el costo de la mercadería:
M = 6(7000/3) $\therefore$ M = S/.14 000

51. El costo de un artículo es 8000 soles, para fijar su precio de venta se aumentó su costo en 25%. Al vender dicho artículo se hizo un descuento del k% y luego otro descuento de k soles. Si dicho artículo se vendió en 7980 soles, ¿a cómo se hubiera vendido dicho artículo, si se hubiese invertido el orden de los descuentos?

Resolución:

P_f = 8000 + 25%(8000) = 10 000
Primero se descuenta k%, luego nos queda:
(100 − k)%(10 000)
También un descuento de k soles:

$\frac{(100-k)}{100}10\,000 - k = 7980 \Rightarrow k = 20$

Segundo, se invierte el orden de los descuentos:

$(10\,000 - 20)80\% = 7984$

$\therefore P_V = S/.7984$

52. Para vender un producto se incrementa en 20% la venta, cuando se vende se rebaja un n%, de tal manera que no se altere la ganancia. Hallar n.

Resolución:

Sea P_V el precio de venta

Luego se incrementa 20%: $120\%P_V$

Se rebaja n%: $(100 - n)\%120P_V$

Como no se altera la ganancia:

$\Rightarrow (100 - n)\%120P_V = P_V$

$\Rightarrow \left(1 - \frac{n}{100}\right)\left(\frac{120}{100}\right) = 1 \quad \therefore n = \frac{50}{3}$

53. Si al precio de un objeto se le recarga el 20%, resulta igual al precio de otro, descontado en un 30%. Si el primero cuesta 17 500 soles, ¿cuál es el precio del segundo?.

Resolución:

Sea P el precio del segundo objeto, luego:

$\underbrace{120\%(17\,500)}_{\text{Recarga 20\%}} = \underbrace{70\%P}_{\text{Descuento 30\%}} \Rightarrow P = 30\,000$

$\therefore$ Precio de segundo objeto: S/.30 000

54. Un comerciante fijó el precio de un TV en S/.1250. Para poder venderlo a un cliente realizó tres descuentos sucesivos del 2%; 3% y 5%, si al final ganó el 20% del precio de costo, hallar dicho precio de costo.

Resolución:

Precio fijado: S/.1250

Realiza tres descuentos:

$\overbrace{(95\%)}^{\text{desc. 5\%}} \; \overbrace{(97\%)}^{\text{desc. 3\%}} \; \overbrace{(98\%)}^{\text{desc. 2\%}}(1250) = 1128{,}84$

Como al final gana 20%, se tiene:

$P_V = 120\%P_C = 1128{,}84$

$\therefore P_C = S/.940{,}7$

55. Para alentar a sus clientes un comerciante decide realizar 3 descuentos sucesivos de 10%; 5% y 8%, pero debido a la inflación realizó 2 aumentos sucesivos de 7% y 3%, si finalmente ganó el 25% del precio de venta, entonces el porcentaje del precio fijado que representa el precio de costo es aproximadamente igual a:

Resolución:

P_f: precio fijado para su venta

Se realiza 3 descuentos sucesivos:

$\underbrace{90\%}_{\text{desc. 10\%}} \; \underbrace{95\%}_{\text{desc. 5\%}} \; \underbrace{92\%}_{\text{desc. 8\%}}P_f = 78{,}66\%P_f$

Realiza 2 aumentos sucesivos:

$\underbrace{103\%}_{\text{Aum. 3\%}} \; \underbrace{107\%}_{\text{Aum. 7\%}}(78{,}66\%P_f) \approx 86{,}7\%P_f$

Se gana el 25% del precio de venta:

$(86{,}7\%P_f) = P_C + 25\%(86{,}7\%P_f)$

$\Rightarrow 75\%(86{,}7\%P_f) = P_C$

$\therefore 65\%P_f \approx P_C$

56. Si el precio de un mototaxi que era S/.10 000 se rebajó n% y a continuación n soles más, entonces el cliente pagaría S/.7980, pero si se permutan los descuentos, ¿cuánto se pagó?

Resolución:

Precio: S/.10 000

Rebaja n%: $(100 - n)\% \times 10\,000$

Rebaja n soles: $(100 - n)\% \times 10\,000 - n$

$\Rightarrow (100 - n)\% \times 10\,000 - n = 7980$

$\Rightarrow \frac{(100-n)}{100} \times 10\,000 - n = 7980$

$\Rightarrow 10\,000 - 100n - n = 7980 \Rightarrow n = 20$

Si cambia el orden de los descuentos, se obtendrá:

Rebaja 20 soles: $10\,000 - 20 = S/.9980$

Rebaja 20%: $\underbrace{80\%}_{\text{Queda}}(9980) = 7984$

$\therefore$ Se pagó S/.7984

57. Se venden dos artículos en 555 soles cada uno, ganando el 15 por 75 de su costo en uno de ellos y perdiendo el 10 por 70 de su costo en el otro. ¿Qué cantidad se ganó o se perdió?

Resolución:

Sea P_1 el costo dél primero, luego se tiene que gana el 15 por 75 del costo:

$P_V = P_1 + \frac{15}{75}P_1 = \frac{6}{5}P_1$

$\Rightarrow P_V = 555 = \frac{6}{5}P_1$

$\Rightarrow P_1 = 462{,}5 \wedge G = 92{,}5$

En el primero gana: S/.92,5 ...(I)

Pierde el 10 por 70 del costo en el segundo:

$P_V = P_2 - \frac{10}{70}P_2 = \frac{60}{70}P_2$

$\Rightarrow P_V = 555 = \frac{6}{7}P_2$

$\Rightarrow P_2 = 647{,}5 \wedge P = 92{,}5$

En el segundo pierde S/.92,5 ...(II)

$\therefore$ De (I) y (II): no gana ni pierde

58. Con el dinero que tiene Juan podría comprar cierto número de camisas, pero podría comprar 6 camisas más si al precio de las camisas le hicieran 2 descuentos sucesivos del 20% y 25%. ¿Cuántas camisas en total podría comprar si a las camisas solo le hicieran un descuento del 10%?

Resolución:

Por dato, se tiene 2 descuentos sucesivos:

$\underbrace{80\%}_{\text{desc. 20\%}} \times \underbrace{75\%}_{\text{desc. 25\%}} = 60\%P$

Si P = S/.100; se tiene:

	Inicial	Descuento 20%; 25%	Descuento 10%
N.° de camisas	n	n + 6	x
Costo de cada camisa	100	60	90

$\Rightarrow$ 100n = 60(n + 6) = 90x

Resolviendo: n = 9

Luego: 100(9) = 90x $\therefore$ x = 10

59. En una reunión los caballeros sacan a bailar a todas las damas y se observa que el 10% de los varones se quedaron sin bailar. ¿Qué porcentaje del número de varones se deben retirar para que la relación inicial del número de varones y mujeres se invierta?

Resolución:

Sea 100 el número de varones

10%(100) = 10 varones se quedarían sin bailar

Entonces 90 varones bailarían con 90 mujeres (total)

Luego hay 100 varones y 90 mujeres

Relación inicial: $\frac{\text{varones}}{\text{mujeres}} = \frac{100}{90} = \frac{10}{9}$

Si se retira el x% de varones, se invierte la relación inicial:

$\frac{(100-x)\%(100)}{90} = \frac{9}{10}$

$\Rightarrow (100 - x)\% = \frac{81}{100} = 81\% \quad \therefore x = 19$

60. Un comerciante compró cierta cantidad de frutas y debe botar el 10'% por estar malograda. ¿En qué porcentaje debe aumentar el precio de costo, para obtener una utilidad del orden de 40%, si debe regalar 2 kg por cada 7 kg que le compren?

Resolución:

Desecha 10%, luego queda para la venta 90%.

Como regala 2 kg por cada 7 kg entonces:

Solo vende 7/9 de lo que le queda

Además 2/9 es lo que regala

Debe de vender:

$140\%P_C = \frac{7}{9}\overbrace{(90\%\underbrace{(P_C + x)}_{\text{costo + aumento}})}^{\text{Queda}}$

Resolviendo: $2P_C = P_C + x$

$\Rightarrow x = P_C = 100\%P_C$

$\therefore$ P_C debe aumentar en 100%

61. En un congreso de profesionales, el 80% del total de asistentes son ingenieros, el 15% son abogados y el resto son médicos; si en el transcurso del congreso se retiraron 48 ingenieros y 12 abogados, entonces los médicos, serán ahora el 6% del nuevo total. Hallar el número inicial de ingenieros.

Resolución:

Sea T el total de asistentes al congreso, luego:

Ingenieros: 80%T

Abogados: 15%T

Médicos: (100 − 80 − 15)%T = 5%T

Por otro lado, se retiran 48 ingenieros y 12 abogados y debido a esto:

N.° de médicos = 6%(T − 60) = 5%T $\Rightarrow$ T = 360

$\therefore$ N.° de ingenieros: 80%(360) = 288

62. En la venta de un artículo, los gastos fueron el 20% del precio de costo y la ganancia neta fue el 20% del precio de venta. ¿Qué porcentaje del costo representa la ganancia neta?

Resolución:

$G_N = P_V - P_C - \text{gastos(g)}$

Del problema: $G_N = 20\%P_V \Rightarrow P_V = 5G_N$

$g = 20\%P_C \Rightarrow g = \frac{1}{5}P_C$

En la expresión indicada: $G_N = 5G_N - P_C - \frac{1}{5}P_C$

$\Rightarrow 4G_N = \frac{6}{5}P_C \Rightarrow G_N = \frac{6}{20}P_C$

$\therefore G_N = 30\%P_C$

63. Un comerciante compra cierta mercancía con una rebaja del 19% del precio de lista. Para venderla se fija un precio de modo que aun haciendo dos rebajas sucesivas del 10% y 20% se gana el 25% del precio de venta. ¿Qué porcentaje del precio de lista representa el precio fijado?

Resolución:

De acuerdo con el problema planteamos lo siguiente:

$P_L - 19\%P_L = P_C \Rightarrow P_C = 81\%P_L$

Por otro lado:

$90\%(80\%P_f) = P_V = P_C + 25\%P_V \quad ...(I)$

De la ecuación (I): $P_C = 75\%P_V$

Reemplazando por sus equivalentes:

$\underbrace{(81\%P_L)}_{P_C} = 75\%\underbrace{(90\%80\%P_f)}_{P_V}$

$\therefore P_f = 150\%P_L$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2003 - II)

La población de peces en un estanque aumenta a razón del 20% anual. Al final del segundo año se tiene una población de P_2 peces. Al final del tercer año, la población P_3 se ajusta a la siguiente proporción $\frac{P_2}{3} = \frac{P_3}{4,5}$

Si la población inicial P_0 fue 200 peces, entonces P_3 es:

A) 330 B) 360 C) 420
D) 430 E) 432

Resolución:

Lo primero que debemos calcular es la población al final del segundo año:

$P_2 = 120\%(120\%\ P_0) = 1,44\ P_0$

Por dato del problema:

$P_0 = 200 \Rightarrow P_2 = 288$

Luego: $\frac{P_2}{3} = \frac{P_3}{4,5} \Rightarrow P_3 = 1,5P_2$

$\therefore$ Reemplazando el valor de P_2: $P_3 = 432$

Clave: E

PROBLEMA 2 (UNI 2004 - I)

Un representante de electrodomésticos gana el 7% de comisión por venta a domicilio. ¿Cuál será el monto que recibirá por comisión, si ejecutada la cobranza y deducida dicha comisión, entrega a la casa comercial la suma de 13 300 nuevos soles?

A) S/.1001 B) S/.931 C) S/.996
D) S/.870 E) S/.780

Resolución:

Aparentemente los S/.13 300 representan el 93% de lo que cobró, pero no. Cuando el vendedor deduce su comisión, quiere decir que ha calculado cuanto debe recibir; pero no significa que ya cobró su comisión.

$\therefore$ Comisión: 7%(13 300) = S/.931

Clave: B

PROBLEMA 3 (UNI 2004 - II)

De las acciones compradas por una financista el 40% son acciones A y su cotización de compra fue de S/.5,50; el 45% son acciones B y su cotización de compra fue de S/.12,00; y el 15% son acciones C y su cotización de compra fue de S/.16,00. Si la cotización de estas acciones han variado de manera que las acciones A se han incrementado en 80%, las acciones B se han incrementado en 25% y las acciones C se han incrementado en 12,5%, entonces la cotización promedio (en %) de sus acciones se ha incrementado en:

A) 28 B) 34,1 C) 39
D) 45,1 E) 77,1

Resolución:

El caso inicial

Acciones	%	Cotización	Valor
A	40	5,5	**220**
B	45	12	**540**
C	15	16	**240**
			1000

El caso final:

Acciones	%	Cotización	Valor
A	40 + 32 = 72	5,5	396
B	45 + 11,25 = 56,25	12	675
C	15 + 1,875 = 16,875	16	270
			1341

Luego, la diferencia es: 1341 − 1000 = 341

$\therefore$ Aumentó en 34,1%

Clave: B

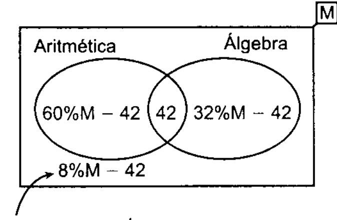
PROBLEMA 4 (UNI 2010 - I)

En un colegio el 60% aprobó Aritmética, el 32% aprobó Álgebra y los que aprobaron Aritmética y Álgebra representan el 60% de los que no aprobaron ninguno de los dos cursos. Si 42 aprobaron Aritmética y Álgebra, calcule le número de alumnos del colegio.

A) 340 B) 350 C) 360
D) 370 E) 380

Resolución:

Sea M el número total de alumnos del colegio:



Por dato: 42 = 60%(8%M + 42)

$\therefore$ M = 350

Clave: B

PROBLEMA 5 (UNI 2010 - I)

Un libro se ofrece en venta recargándose el r por ciento del precio del costo, pero a un estudiante al comprarlo le rebajaron el P por ciento. Si el vendedor no ganó ni perdió, ¿cuánto le rebajaron al estudiante?

A) $\frac{100}{(100 + r)}$ B) $\frac{r + 100}{100r}$ C) $\frac{(100 + r)}{r}$

D) $\frac{1}{\left(0,01 + \frac{1}{r}\right)}$ E) $\frac{1}{\left(0,01 - \frac{1}{r}\right)}$

Resolución:

Del enunciado:

P_C: precio de costo del artículo

Precio de lista:

$P_L = P_C + \left(\frac{r}{100}\right)P_C$

$\Rightarrow P_L = \left(\frac{100+r}{100}\right)P_C$

Rebaja: $\frac{P}{100}P_L$

Precio de venta: $P_V = P_L - \frac{P}{100}P_L$

$\Rightarrow P_V = \left(\frac{100-P}{100}\right)P_L$

Pero, como no se gana ni se pierde:

$P_V = P_C \Rightarrow \left(\frac{100-P}{100}\right)P_L = P_C$

Reemplazando: $\left(\frac{100-P}{100}\right)\left(\frac{100+r}{100}\right)P_C = P_C$

Luego: $P = \frac{100r}{100+r}$

$\therefore$ La rebaja es: $\frac{1}{0{,}01+\frac{1}{r}}$

Clave: D

PROBLEMA 6 (UNI 2013 - I)

Un producto se vende al mismo precio en dos tiendas:

a) En la tienda X, se hacen descuentos sucesivos, primero del 15% luego del 15% y finalmente del 20%.

b) En la tienda Y, se hacen descuentos sucesivos del 10% y luego del 40%

El dueño desea vender el producto en ambas tiendas al mayor precio.

Determine la tienda en la que se debe incrementar el precio y en cuanto.

A) X; 7,03% B) X; 7,04% C) Y; 7,03%
D) Y; 7,04% E) Y; 7,40%

Resolución:

Tanto por ciento

Tienda X: −15% −15% −20%

$\text{Queda} = \frac{85}{100} \times \frac{85}{100} \times 80\% = 57{,}8\%$

Tienda Y: −10% −40%

$\text{Queda} = \frac{90}{100} \times 60\% = 54\%$

La tienda Y debe incrementar el precio.

Luego: $54\%(100 + a)\% = 57{,}8\% \Rightarrow a = 7{,}037\%$

$\therefore$ La respuesta más próxima: 7,04%

Clave: D

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Hallar el 20% del 30% del 75% de 4 por 8 de 2000.

A) 44 B) 43 C) 46
D) 45 E) 8

2. ¿Qué porcentaje del 15% del 8% de 600 es el 20% del 0,5% de 1440?

A) 30% B) 20% C) 40%
D) 15% E) 8%

3. Se vende un artículo recargándole el x% del precio de costo. Pero, un cliente al comprarlo le hacen una rebaja del y%. Si el vendedor no ganó ni perdió, ¿cuánto le rebajaron al cliente?

A) $\frac{100}{100+x}$ B) $\frac{100+x}{x}$ C) $\frac{x}{100+x}$

D) $\frac{1}{0,01+\frac{1}{x}}$ E) $\frac{x+0,1}{100x}$

4. La mano de obra y las indemnizaciones suman el 40% del valor de una obra. Si las indemnizaciones representan el 60% del importe de la mano de obra, ¿qué tanto por ciento del valor de dicha obra importa solamente la mano de obra?

A) 30 B) 24 C) 33,3
D) 20 E) 25

5. El número de artículos que se pueden comprar con una suma de dinero aumentaría en 5. Si se variase en 20% el precio de cada artículo, ¿cuál es dicho número de artículos?

A) 16 B) 20 C) 23
D) 17 E) 18

6. En un examen de admisión, en el que se requiere aprobar los 4 exámenes programados, solo el 12% de los postulantes podría ser admitido. Si solo se exigiera aprobar 3 de los exámenes, el número de postulantes a admitir aumentaría en 2/3 del número anterior, totalizarían así 800. ¿Cuántos son los postulantes?

A) 3600 B) 3200 C) 4800
D) 4000 E) 5000

7. En una granja el 20% del número de conejos es igual al 30% del número de pavos. Si se retiran 150 conejos, el número de pavos sería el 60% del total. Hallar el número de pavos.

A) 270 B) 120 C) 180
D) 125 E) 90

8. En qué tanto por ciento aumenta el volumen de un cilindro cuando la altura se reduce en 20% y la longitud del radio de la base aumenta en 25%.

A) 10% B) 15% C) 20%
D) 25% E) 30%

9. En una fiesta muy amena, el 20% del total eran mujeres que estaban bailando y el 45% del total eran hombres que no bailaban. Debido al cansancio, el 15% del total son los hombres que bailaban. ¿Qué porcentaje del total son las mujeres que ahora no bailan?

A) 20% B) 30% C) 40%
D) 15% E) 65%

10. Ana lleva al mercado 4000 naranjas y encuentra que el 10% estaba malogrado y solo pudo vender el 60% de los buenos. ¿Cuántas quedarán sin vender?

A) 1440 B) 1560 C) 2160
D) 1445 E) 1840

11. En un colegio nacional se matricularon 7500 estudiantes. Si el 87% de las mujeres y el 12% de los hombres se retiran, el 12% de los que quedan serían mujeres. ¿Cuántos varones se han retirado?

A) 360 B) 370 C) 290
D) 390 E) 468

12. En una reunión:

- El 40% votó por A
- El 30% votó por B
- El 20% votó por C
- El resto se abstuvo

Se hizo una segunda votación, esta vez solo se podía votar por A o B. El 80% de las personas que votaron por C, votaron esta vez por A; el 20% restante se abstuvo. Si, junto con las que se abstuvieron por primera vez, en total se abstuvieron 28 personas, en esta segunda votación, ¿cuántas personas votaron por A?

A) 120 B) 110 C) 100
D) 118 E) 112

13. Si a una cantidad se le aumenta su 20% y a la nueva cantidad se le disminuye también su 20% se puede afirmar con respecto a la cantidad inicial que:

A) Aumenta 10% B) Disminuye 10%
C) No varía D) Disminuye 4%
E) N. A.

14. Si en una reunión social, el 75% de los hombres es igual al 45% de las mujeres. ¿Qué porcentaje del total de personas son mujeres?

A) 37,5% B) 62,5% C) 56,5%
D) 43,5% E) 36%

15. En un corral el 40% son patos, el 35% conejos y el resto pavos. Si el número de patos se triplica y se duplican la de los otros dos, ¿qué porcentaje del nuevo total son pavos?

A) 20,83% B) 40,6% C) 29,16%
D) 50% E) N. A.

16. Al sueldo de un empleado se le hace un aumento del 20% al comenzar el año, y en el mes de julio un aumento del 10% sobre el total. ¿Qué porcentaje de su sueldo del año anterior estaría recibiendo en agosto?

A) 128% B) 130% C) 103%
D) 125% E) 132%

17. Una señora va a una tienda, donde al comprar manzana le regalan el 5% de las que compró, pero en el camino pierde el 7%, obteniendo así 1953 manzanas. ¿Cuántas manzanas compró?

A) 21 545 B) 20 000 C) 2000
D) 10 002 E) 1545

18. En una granja el 20% del número de conejos es igual al 30% del número de pavos; si se retiran 150 conejos el número de pavos será el 60% del total. Hallar el número de pavos.

A) 40 B) 75 C) 180 D) 125 E) 80

19. En la venta de un artículo se ha observado que el precio fijado, el precio de venta y el precio de costo están en relación de 15; 12 y 4, respectivamente. ¿Qué porcentaje representa la rebaja, respecto a la ganancia?

A) 10% B) 30% C) 50%
D) 75% E) 37,5%

20. Un comerciante vende las últimas 2 bicicletas que le quedan en S/.800 cada una. En una ganó el 25% y en la otra perdió el 25%. ¿Cuál afirmación es correcta?

A) No ganó ni perdió B) Ganó
C) Perdió D) F. D.
E) N. A.

21. En un supermercado, para determinar el precio de lista de los artículos se les multiplica los costos por un cierto factor k, de tal manera que puedan descontar 20% más 20% y aún así ganar el 80% del costo. Hallar el factor k.

A) 45/12 B) 45/13 C) 45/14
D) 45/15 E) 45/16

22. Vendo un artículo en S/.868 ganando el 24% del precio de costo más el 10% del precio de venta. Si lo hubiese vendido en S/.700, ¿hubiese ganado o perdido y cuánto?

A) No se sabe B) No ganó ni perdió
C) Ganó S/.70 D) Perdió S/.100
E) Perdió S/.68

23. Se vendió 4 artículos en S/.9100 cada uno; en el primero se ganó el 30% del costo, en el segundo se perdió el 30% del precio de venta, en el tercero se ganó 30% del precio de venta y en el cuarto se perdió el 30% del costo. ¿Se ganó o se perdió y cuánto?

A) Se perdió S/.1800 B) Se ganó S/.300
C) Se perdió S/.300 D) Se ganó S/.600
E) Se ganó S/.1800

24. En qué porcentaje se debe aumentar el precio de costo de un artículo, para fijar su precio de venta al público; tal que si luego se hacen 2 descuentos sucesivos del 20% y 20% aún se gane el 60% del precio de costo.

A) 160% B) 150% C) 140%
D) 130% E) 120%

25. Una persona compró cierto número de pares de zapatos ortopédicos a $80 cada par. Si los vendió con una ganancia neta de $510 y los gastos ascendieron al 15% de la ganancia bruta, ¿cuántos pares de zapatos compró, si en total recibió $3800?

A) 40 B) 50 C) 30
D) 60 E) 20

26. El número de productos que se puede comprar con una suma de dinero aumentaría en 500, si se variase el 20% el precio de compra de cada producto. ¿Cuál es dicho número de productos?

A) 2080 B) 2008 C) 2000
D) 4000 E) 5200

27. El precio de un saco de arroz ha quedado en S/.158,4 al final del año pasado; luego de haber sufrido durante el año dos aumentos sucesivos del 10% y 20% y una baja del 25%, ¿qué precio tenía al empezar el año pasado?

A) S/.160 B) S/.200 C) S/.180
D) S/.196 E) S/.175

28. Para fijar el precio de venta de un artículo se aumentó su costo en 30%. Al venderse se hizo una rebaja del 10% sobre su precio fijado. ¿Qué tanto por ciento de su precio de costo se ganó?

A) 14% B) 17% C) 20%
D) 18% E) 27%

29. El beneficio neto que se obtiene al vender un objeto en $2200, con el 10% de ganancia sobre el precio de compra es $150. ¿Cuál es el gasto que produce la venta?

A) $35 B) $40 C) $50
D) $60 E) $65

30. Si gastara el 30% del dinero que tengo y ganara el 28% de lo que me quedaría, perdería S/.156. ¿Qué cantidad de dinero tengo?

A) S/.3500 B) S/.2000 C) S/.1500
D) S/.1560 E) S/.1800

31. Se tiene un recipiente lleno de vino del cual se extrae el 20% y se reemplaza con agua; luego de lo obtenido se extrae el 25% y se reemplaza con agua obteniéndose aquí que la diferencia entre los volúmenes de vino y agua es 32 litros. Hallar el volumen del recipiente.

A) 140 L B) 192 L C) 160 L
D) 200 L E) 240 L

32. El radio de una esfera aumenta en 80%. ¿En qué porcentaje aumentó el volumen en dicha esfera?

A) 583,2% B) 483,2% C) 80%
D) 160% E) 164%

33. Un corredor de autos desea retirarse de las pistas cuando tenga el 90% de carreras ganadas. Si hasta el momento ha corrido 100 veces y obtenido 85 victorias, ¿cuántas carreras más como mínimo deberá realizar para poder retirarse?

A) 5 B) 10 C) 15 D) 50 E) 60

34. En una reunión se observa que el número de hombres era el doble del número de mujeres; luego se retiran el 35% de los hombres y llegan 90 mujeres resultando tantos hombres como mujeres. ¿Cuántas personas había al principio?

A) 900 B) 1000 C) 800
D) 950 E) 850

35. Después de una batalla, un general observó que 5% de sus soldados había muerto y el 20% de los que quedaron vivos estaban heridos, además resultaron 1216 soldados ilesos. ¿Cuántos soldados había en total?

A) 1800 B) 1600 C) 1500
D) 1900 E) 1700

36. Una tela al ser lavada se encoge en el 25% de su longitud. Un mercader compró tela a 300 soles el metro y vendió después de lavada a 540 soles el metro; si ganó 5880 soles, ¿cuántos metros de tela compró?

A) 56 m B) 58 m C) 42 m D) 70 m E) N. A.

37. Entre tú y yo tenemos 600 manzanas, si tú me dieras el 15% de las tuyas yo tendría 430 manzanas. ¿Cuántas manzanas tengo?

A) 200 B) 400 C) 450
D) 350 E) N. A.

38. En una reunión de 150 personas, las mujeres constituyen el 60% de las presentes. ¿Cuántas parejas deben llegar a esta reunión, para que el número de hombres constituya el 45% del total de asistentes?

A) 50 B) 65 C) 70 D) 75 E) 80

39. Después de una de sus batallas Napoleón observó que el 5% de sus soldados había muerto y el 20% de los que quedaron vivos estaban heridos, además había 608 sanos. ¿Cuántos soldados habían muerto?

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

40. A un obrero se le aumenta el sueldo de la siguiente manera:
12% sobre el 20% de su sueldo
15% sobre el 40% siguiente
20% sobre los S/. 200 restantes
¿Cuál será su nuevo sueldo?

A) S/.500 B) S/.546 C) S/.574
D) S/.582 E) S/.596

41. En la UNI el 30% de los alumnos son mujeres; si el 20% de mujeres y el 30% de los hombres salen de paseo, ¿qué porcentaje de la UNI fue al paseo?

A) 25% B) 27% C) 29%
D) 31% E) 33%

42. El precio del saco de arroz ha quedado en S/.396 al final del año pasado, luego de haber sufrido durante el año dos aumentos sucesivos del 10% y 20% y una baja del 25%, ¿qué precio tenía al empezar el año pasado?

A) S/.500 B) S/.300 C) S/.400
D) S/.196 E) S/.175

43. ¿Cuántos litros de agua se deben agregar a 80 L de vino de modo que la cantidad de vino represente el 20% de la mezcla?

A) 320 B) 80 C) 240
D) 160 E) 120

44. Una familia de 10 personas dispone de S/.450 000 para vivir durante 1 año; pero a los 4 meses llegan 2 sobrinos y a la mitad del año el costo de vida se incrementa en un 20%, ¿qué cantidad de dinero tiene que pedir prestado al jefe de familia para poder sobrevivir dicho año?

A) S/.114 000 B) S/.11 100 C) S/.12 000
D) S/.112 000 E) S/.14 000

45. Una persona compra un equipo cuadrafónico y lo revende a un amigo ganando el 6%, pero si lo hubiera comprado en 5% más barato y lo hubiera vendido por $24 más, la ganancia habría sido el 15% del costo original, ¿cuál es el precio de costo?

A) $110 B) $130 C) $120
D) $140 E) N. A.

46. A 450 kg de agua que contiene el 5% de sal se ha añadido agua pura para reducir la proporción de sal al 2%, ¿cuál será el peso de la nueva mezcla?

A) 1125 kg B) 1200 kg C) 1250 kg
D) 1350 kg E) N. A.

47. Una cosecha de 855 kg de nueces con cáscara ha dado el 40% de nueces mondadas, ¿cuántos litros de aceite se extraerán, sabiendo que las nueces mondadas dan el 55% de su peso de aceite y que el litro de aceite pesa 950 gramos?

A) 198 B) 216 C) 188,1
D) 204,5 E) N. A.

48. De un recipiente lleno de vino puro se saca 5 litros y se reemplazan por igual volumen de vino de 60% de pureza; quedando en el recipiente un vino de 98,75% de pureza, ¿cuál es, en litros, la capacidad del recipiente?

A) 155 B) 180 C) 150
D) 160 E) N. A.

49. Se vende 2 artículos en S/.480 cada uno. En uno de ellos se gana el 10 por 50 de su costo y en el otro se pierde el 16 por 64 de su costo. Decir qué cantidad se gana o se pierde.

A) Se gana S/.80 B) Se pierde S/.80
C) Se gana S/.160 D) Se pierde S/.160
E) No gana ni pierde

50. Un sastre compra una pieza de tela a S/.55 el metro. Llegando a su casa se da cuenta de que el metro con que le han medido la tela era corto y que habiendo pagado S/.4950 solo le han dado por un valor de S/.4752. ¿Cuánto le faltaba al metro?

A) 2 cm B) 3 cm C) 4 cm D) 6 cm E) N. A.

51. Un arquitecto ha previsto un recubrimiento de losetas circulares para una cierta pared. Si todas las losetas son iguales, ¿cuál es el máximo porcentaje de área de la pared que puede ser cubierto por dichas losetas?

A) 73,8% B) 74,8% C) 75,4%
D) 76,6% E) 78,5%

52. En una industria se han fabricado, 8000 productos, el 70% fabricados por la máquina "A" y el resto por la máquina "B". Si el 5% de los fabricados por "A" son defectuosos y el 4% de los que produce "B", también lo son, ¿qué porcentaje de los 8000 productos son defectuosos?

A) 4,6% B) 4,7% C) 4,8%
D) 4,9% E) 5%

53. En una caja de herramientas se tiene 4 tipos de piezas: A; B; C y D. De A se tiene el 27%, de B se tiene el 24%, de C el 29% y el resto de las piezas son del tipo D. Luego se retiran: la tercera parte de A y los 5/6 de B y finalmente se duplican las piezas del tipo D, ¿qué porcentaje del nuevo total representan las piezas del tipo C?

A) 31,76% B) 31,425% C) 32,125%
D) 32,48% E) 33,16%

54. Se tienen 30 litros de alcohol al 30%, el 40% de esta mezcla se echa a un recipiente que contiene cierta cantidad de agua de modo que se obtiene alcohol al 20%, ¿cuántos litros de agua contiene este recipiente?

A) 105,6 B) 132 C) 120
D) 112,5 E) N. A.

55. Si a una cantidad se le aumenta su 20% y a la nueva cantidad se le disminuye también su 20% se puede afirmar con respecto a la cantidad inicial que:

A) Aumenta 10% B) Disminuye 10%
C) No varía D) Disminuye 4%
E) Disminuye 8%

56. En qué tanto por ciento aumenta el volumen de un cilindro cuando la altura se reduce en 20% y la longitud del radio de la base aumenta en 25%.

A) 10% B) 15% C) 20%
D) 25% E) 30%

57. El presidente de un club observa que por partido, en promedio, 1/3 de las entradas no se venden, pero afirma que todas las entradas se venderán si se rebajase en un 30% el precio de las entradas suponiendo correcto la hipótesis, ¿qué sucedería?

A) La recaudación no cambia
B) La recaudación aumentaría
C) La recaudación disminuiría
D) Faltan más hipótesis
E) N. A.

58. En una reunión, el 20% del total son hombres, ¿qué porcentaje del número de mujeres presentes se deben ir, para que el número de hombres represente el 40% del número de personas que quedan?

A) 62,5% B) 60% C) 75%
D) 80% E) 90%

59. Una obra se encontraba avanzada en un 70% al finalizar el 14.° día. ¿En qué tiempo total terminan la obra si el número de obreros que trabajaron a partir del día 15 es el doble y los nuevos obreros son 50% menos eficientes que los primeros?

A) 17 B) 18 C) 16
D) 20 E) 24

60. Un bidón está lleno de 48 litros de vino. Se consume el 10% de vino y se sustituye por agua; luego se consume el 20% de la mezcla y también se reemplaza por agua. Finalmente se consume el 25% de la última mezcla y también se sustituye por agua. ¿Cuántos litros de vino puro quedan en el bidón luego de la última operación?

A) 12,50 B) 22,64 C) 2,88
D) 12,90 E) 25,92

61. Un comerciante vendió un lote de computadoras ganando el 60% del precio de venta. Si lo hubiera vendido ganando el 60% del costo hubiera perdido S/.11 340. ¿Cuánto le costó las computadoras al comerciante?

A) S/.126 000 B) S/.12 600
C) S/.1260 D) S/.1 260 000
E) N. A.

62. Al venderse un artículo en S/.2530 se ganó el 15% del 10% del 80% del costo. ¿A cuánto debe vender el objeto para ganar el 20% del 25% del 60% del costo?

A) S/.2857 B) S/.2565 C) S/.2275
D) S/.2850 E) S/.2575

63. Un comerciante desea promocionar sus ventas ofreciendo un descuento del 20%, pero como en realidad no quiere rebajar los precios primero debe subirlos. ¿En qué porcentaje?

A) 20% B) 25% C) 30%
D) 10% E) 15%

64. Para fijar el precio de un TV un comerciante aumentó su costo en el 80%, pero al venderlo hizo al cliente dos descuentos sucesivos del 40% más el 50%. ¿Qué porcentaje del costo resultó ganando o perdiendo?

A) Ganó 54% B) Perdió 54%
C) Perdió 46% D) Ganó 46%
E) No ganó ni perdió

65. Sobre el precio de lista de un artículo se hace un descuento del 20%, de tal manera que se obtiene una utilidad equivalente al 30% del costo. Si no se hiciera este descuento, ¿qué porcentaje del costo se habría ganado?

A) 50% B) 62,5% C) 60%
D) 65% E) N. A.

66. Para fijar el precio de venta de un artículo se aumenta su costo en 30%, pero al venderlo se hace una rebaja del 10% de este precio fijado, ¿qué porcentaje del costo se ganó?

A) 27% B) 17% C) 20%
D) 21% E) N. A.

67. En una tienda se le hace al cliente dos descuentos sucesivos del 10% y 20% y aún ganan el 40% del costo. Si el departamento de compras de dicha tienda compra una máquina en $36 000, ¿qué precio fijará para su venta?

A) $70 000 B) $40 000 C) $60 000
D) $18 000 E) $32 000

68. Dos comerciantes que han adquirido un artículo al mismo costo, lo venden ganando, uno de ellos el 20% del costo y el otro 20% de su precio de venta. Si uno de ellos ha ganado S/.2800 más que el otro, ¿a cómo vendió uno de ellos su artículo?

A) S/.42 000 B) S/.50 000
C) S/.60 000 D) S/.70 000
E) S/.65 000

69. El precio de costo de un artículo es 25 000 soles. A cuántos miles de soles se debe fijar para su venta, sabiendo que al venderlo se hace 2 descuentos sucesivos del 15% y 20%, con lo cual todavía se está ganando el 44% del 20% del precio de costo.

A) 30 B) 40 C) 50
D) 60 E) 70

70. He comprado 125 m de tela, el comerciante me ha hecho el (29/3)% de rebaja sobre el precio de compra. Si me hubieran hecho 15% de rebaja hubiera pagado S/.560 menos. ¿Cuál fue el precio del metro de tela?

A) S/.90 B) S/.96 C) S/.80
D) S/.84 E) N. A.

71. Una editorial produce libros con una ganancia del 30% del costo. Las librerías compran de dicha editorial y venden al público los libros ganando el 20% del precio de lista. ¿Qué porcentaje sobre el costo de producción paga el público?

A) 56% B) 48% C) 26%
D) 52% E) N. A.

72. Una tienda vende sobre el precio marcado 10% más 20% y otro con 20% más 20% de descuento respectivamente. El precio marcado en la segunda tienda es 13% más que en la primera. ¿Qué tienda vende más barato?

A) La primera B) La segunda
C) Las dos D) No se sabe
E) Imposible

73. Se vende dos objetos en S/.2400 cada uno, en uno de los objetos se gana 25 por 95 de sus costos y en el otro se perdió el 15 por 75 de su venta. Decir qué cantidad se gana o se pierde.

A) Se gana S/.300 B) Se pierde S/.300
C) Se gana S/.250 D) Se perdió S/.250
E) Se pierde S/.100

74. Si la longitud de una circunferencia aumentada en 40%, ¿qué ocurre con el área del círculo?

A) Aumenta 196% B) Aumenta 144%
C) Aumenta 96% D) Aumenta 44%
E) Aumenta 40%

75. Si los lados de un cuadrado se triplican, ¿en qué porcentaje aumenta el área?

A) 300% B) 600% C) 900%
D) 800% E) 200%

76. Si un círculo disminuye 36% de su área, ¿en qué porcentaje habría disminuido su radio?

A) 60% B) 10% C) 20%
D) 80% E) 30%,

77. Si la superficie de una esfera disminuye en 20%, ¿en cuanto disminuye su volumen?

A) 12% B) 15% C) 20%
D) 8,6% E) 10,5%

78. Si el radio de un cilindro recto se reduce en un 50%, en qué tanto por ciento se debe aumentar la altura del cilindro, para que su volumen permanezca invariable.

A) 50% B) 100% C) 150%
D) 200% E) 300%

79. El récord de Luis en los campeonatos de tiro es del 80% de aciertos. Si en una competencia sobre 80 tiros, de 60 disparos, falló 10, ¿qué porcentaje de los que le falta tirar debe acertar como mínimo para superar su récord?

A) 60% B) 72% C) 75%
D) 80% E) 90%

80. El sueldo anual (bruto) de un empleado está sujeto al descuento del 12%, este empleado gasta anualmente los 5/6 de su sueldo neto más s/.1440. Si al cabo de 3 años ha economizado una cantidad que representa el 29% de su sueldo bruto anual, ¿cuál es su sueldo anual bruto?

A) S/.28 600 B) S/.28 700 C) S/.28 800
D) S/.28 900 E) S/.29 000

81. En un examen de admisión en el que se requiere aprobar cuatro exámenes programados, solo el 12% de los postulantes podrían ser admitidos. Si solo se exigiera aprobar tres de los exámenes, el número de los postulantes a admitir aumentaría en 2/3 del número anterior y totalizarían así 800. ¿Cuántos son los postulantes?

A) 2000 B) 3000 C) 4000
D) 5000 E) 6000

82. Un agente viajero recibe S/.11,50 diarios de sueldo y una comisión del 2% sobre el monto de los pedidos que realice. Si al cabo de 70 días economizó S/.4,11 habiendo gastado S/.132,20 por día; ¿a cuánto ascendió el monto de los pedidos realizados?

A) S/.443 000 B) S/.678 000
C) S/.876 000 D) S/.786 000
E) S/.6 780 000

83. En una oferta un comerciante disminuye el precio de un artículo en 25% motivo por el cual la demanda aumenta en 60%. ¿En qué porcentaje varía la recaudación?

A) Aumenta en 10% B) Disminuye en 20%
C) Aumenta en 20% D) Disminuye en 10%
E) No varía

84. Un comerciante vendió un artículo ganando el 40% del precio de venta. Si lo hubiera vendido ganando el 40% del costo, hubiera dejado de ganar S/. 60. ¿Cuál es el costo del artículo?

A) S/.150 B) S/.290 C) S/.225
D) S/.200 E) S/.160

85. Un TV que costó S/.2000 se vende ganando el n%; si se hubiera hecho una rebaja del 10% del precio de venta, se habría ganado solo 13n soles. Hallar el valor de "n".

A) 40 B) 20 C) 35
D) 30 E) 25

86. César le da a vender a Martín una laptop, él a su vez se lo da a Jean, efectuada la venta Jean toma el 10% y le entrega el resto a Martín, a su vez Martín toma el 5% y le entrega a César S/.3933. ¿A cuánto vendió la laptop Jean?

A) S/.4000 B) S/.4100 C) S/.4600
D) S/.4750 E) S/.4808

87. Un padre reparte entre sus dos hijos una propiedad valorizada en $22 500. Si el mayor hubiera recibido 20% menos y el menor 30% menos, ambos recibieron lo mismo. ¿Cuánto recibió el hermano mayor?

A) $12 000 B) $10 500 C) $9600
D) $12 600 E) N. A.

88. Una mezcla de dos líquidos A y B contiene 300 litros del liquido B, al extraer el 30% de esta mezcla

y reemplazarla por el liquido B origina que ahora la cantidad del liquido A constituya el 60% de la mezcla. ¿Qué cantidad de liquido A contenía inicialmente la mezcla?

A) 1600 L B) 1700 L C) 1800 L
D) 2000 L E) 2200 L

89. Un comerciante compró 600 L de vino a 40 soles el litro que luego es envasado en botellas de 3/4 de litro. Si las botellas costaron S/.50,00 el ciento, los corchos a S/.100 el millar y el envasado S/.320, ¿a cómo tiene que vender cada botella de vino para ganar el 20%?

A) S/.37,2 B) S/.30,5 C) S/.38
D) S/.38,5 E) S/.37,5

90. Un comerciante vende un artículo con una ganancia bruta al 30% del precio de venta. Dicha venta le produjo un costo del 20% de la ganancia bruta. Hallar el precio de costo de dicho articulo si la ganancia neta fue de S/.2520.

A) S/.7320 B) S/.7240 C) S/.7250
D) S/.7350 E) S/.7500

91. Un artículo aumenta el precio en un 20% si se cuenta con un mismo dinero para comprar varios artículos del mismo tipo. ¿En qué porcentaje disminuye la cantidad de artículos comprados?

A) 20% B) 18% C) 16,6%
D) 15,4% E) 17%

92. Una cámara fotográfica digital cuesta 240 euros. ¿Qué precio se debe fijar para su venta si al hacer una rebaja del 20%, todavía se gana el 25% del precio de venta?

A) 300 euros B) 400 euros C) 360 euros
D) 420 euros E) N. A.

93. La edad de un niño es el 75% de la cantidad de meses transcurridos del año; si dentro de 6 meses será el 30%, hallar la edad del niño.

A) 6 años B) 5 años C) 4 años
D) 3 años E) 2 años

94. Una vendedora de paltas, cuando ha vendido el 40% de las paltas ganando el 30%, descubre que el 31% de las paltas que compró se han malogrado. ¿En qué porcentaje deberá aumentar el precio original de las paltas restantes para tener una ganancia del 120% del precio de costo?

A) 60% B) 70% C) 80%
D) 90% E) 100%

95. Martín vende tres laptop de diferentes capacidades; vende las dos primeras en $2970 cada una, ganando en una de ellas el 10% y perdiendo en la otra también el 10%. Si la tercera costó $1200, ¿qué porcentaje se debe ganar en esta última para que al final no se gane ni pierda?

A) 4% B) 5% C) 6%
D) 7% E) 8%

96. Un comerciante eleva el precio de sus productos en un 80% y al momento de venderlos se hace una rebaja del 20%; como su oferta no tiene acogida vuelve a hacer una rebaja del 20%. ¿Qué tanto por ciento de utilidad adicional obtiene sobre el precio inicial?

A) 14,7% B) 15,8% C) 16,3%
D) 16,4% E) 15,2%

97. Toño vende dos agendas digitales en S/.700 cada una, ganando en una de ellas el 10 por 60 de su costo y en la otra perdiendo el 10 por 80 de su costo. ¿Cuánto se gana o se pierde?

A) Se gana S/.50 B) Se pierde S/.50
C) Se gana S/.100 D) Se pierde S/.100
E) No se gana ni se pierde

98. En una compañía se multiplican los costos por un factor "p" para fijar los precios de venta y al momento de su venta se hace una rebaja de a% al comprador y aun así la compañía gana el a% del costo. Determine el valor de "a".

A) $\left(\frac{p}{p+1}\right)100$ B) $\left(\frac{p}{p-1}\right)100$ C) $\left(\frac{p-1}{p+1}\right)100$

D) $\left(\frac{p+1}{p-1}\right)100$ E) $(p-1)100$

99. Si un artículo se vende haciendo un descuento igual a lo que queda de ganancia, se observa que el precio de compra es el 85 por 95 del precio de venta. Halla la razón entre el precio de venta y el precio fijado.

A) $\frac{17}{19}$ B) $\frac{21}{19}$ C) $\frac{19}{21}$

D) $\frac{2}{19}$ E) $\frac{17}{21}$

100. Un comerciante fija un precio de venta ganando el 80% del precio de costo, para luego efectuar dos descuentos del 20% más 20%. ¿Qué porcentaje del precio de costo se gana?

A) 16% B) 18% C) 15,2%
D) 32% E) 8%

101. Un negociante ha comprado cierta cantidad de vino a S/.75 el litro; vende la cuarta parte con una pérdida del 10%, la séptima parte con una ganancia del 30% y el resto con una utilidad del 20% obteniendo una ganancia de 32 175. ¿Cuántos litros compró?

A) 2480 B) 4680 C) 2680
D) 3460 E) 3080

102. Un fabricante disminuye el precio de sus artículos en un 20%. ¿En qué porcentaje deberá aumentar el volumen de sus ventas, para que su ingreso bruto aumente en un 30%?

A) 62,5% B) 55% C) 50%
D) 60% E) N. A.

103. Un pequeño pueblo consta de dos distritos: San Pedro y San Pablo. Los pobladores de San Pedro constituyen el 40% del total. Debido a una fuerte lluvia, parte de éstos deciden trasladarse a San Pablo. Si luego de la migración, los habitantes de San Pedro constituyen el 56,25% de la población de San Pablo, ¿qué porcentaje de los habitantes de San Pablo decidió emigrar?

A) 8% B) 10% C) 15%
D) 12,5% E) 9%

104. Una bolsa contiene bolas rojas, negras y blancas. El 20% son rojas, el 35% son negras y hay 36 bolas blancas. Determine el número de bolas que contiene la bolsa.

A) 70 B) 65 C) 80 D) 75 E) 90

105. Si el sueldo de Juan fuese aumentado en 10%, le alcanzaría para comprar 20 camisas. ¿Cuántas podría comprar si el aumento fuese del 21%?

A) 21 B) 22 C) 24 D) 25 E) 30

106. De un grupo de personas, el 20% son mujeres; si el 20% de ellas y el 80% de ellos se retiran, ¿qué porcentaje del total se retiraron?

A) 36% B) 34% C) 28%
D) 56% E) 68%

107. El precio de venta de un artículo aumenta en 25%, luego disminuye en 10% y luego aumenta en 25%. Entonces se puede afirmar que el precio final respecto al precio original:

A) No se modifica
B) Aumenta en 10%
C) Aumenta en 40,625%
D) Disminuye en 40 625%
E) Disminuye en 40%

108. ¿A cuánto se debe vender un artículo cuyo costo es S/.100 y se quiere ganar el 20% del costo y aún pagando un impuesto equivalente al 20% del precio de venta?

A) S/.150 B) S/.180 C) S/.200
D) S/.230 E) S/.250

109. Un comerciante compra mercadería en una fábrica en la cual le rebajan el 30% del precio de lista, lo lleva a su tienda y fija un precio pensando que al rebajar el 30% y luego el 10% aún gana el 60% de su inversión. ¿Qué porcentaje del precio de lista es el precio fijado en su tienda?

A) 56,25% B) 65,25%
C) 121,6% D) 177,7%
E) 165,25%

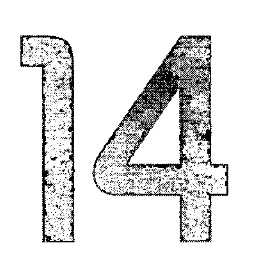
110. Un comerciante hace un descuento del 15% al precio de un artículo, de modo tal que si se hace una rebaja adicional de S/.20 aún ganaría S/.12. Si el artículo le costó S/.70, ¿a cuánto ofrecía inicialmente el artículo?

A) S/.120 B) S/.125 C) S/.130
D) S/.135 E) S/.140

CLAVES

1. D	15. A	29. C	43. A	57. B	71. E	85. A	99. C
2. B	16. E	30. C	44. A	58. A	72. A	86. C	100. C
3. D	17. C	31. C	45. C	59. A	73. E	87. B	101. E
4. B	18. C	32. B	46. A	60. E	74. C	88. C	102. A
5. B	19. E	33. D	47. A	61. B	75. D	89. A	103. B
6. D	20. C	34. A	48. D	62. E	76. C	90. D	104. C
7. C	21. E	35. B	49. B	63. B	77. E	91. C	105. B
8. D	22. C	36. A	50. C	64. C	78. E	92. B	106. E
9. A	23. A	37. A	51. E	65. B	79. C	93. D	107. C
10. E	24. B	38. D	52. B	66. B	80. C	94. E	108. A
11. E	25. A	39. D	53. A	67. A	81. C	95. B	109. D
12. E	26. C	40. D	54. A	68. D	82. A	96. E	110. A
13. D	27. A	41. B	55. D	69. B	83. C	97. E	
14. B	28. B	42. C	56. D	70. D	84. C	98. C	

Regla de interés



John von Neumann nació el 28 de diciembre de 1903 y murió el 8 de febrero de 1957. Fue un matemático húngaro-estadounidense que realizó contribuciones fundamentales en física cuántica, análisis funcional, teoría de conjuntos, teoría de juegos, ciencias de la computación, economía, análisis numérico, cibernética, hidrodinámica, estadística y muchos otros campos. Es considerado como uno de los más importantes matemáticos de la historia moderna.

Hasta la década de los treinta, la economía parecía involucrar el uso de una gran cantidad de matemáticas y números, pero casi todo era superficial. La economía se utilizaba, sobre todo, para proveer, inútilmente. Von Neumann propuso el lenguaje de la teoría de juegos y la teoría del equilibrio general para la economía.

Su primera contribución significativa fue el «teorema minimax» de 1928. Este teorema establece que en ciertos juegos de suma cero, que involucran información perfecta, existe una estrategia que permite a ambos jugadores minimizar su máxima pérdida. En particular, cuando se examina cada posible estrategia, un jugador debe considerar todas las respuestas posibles del jugador adversario y la pérdida máxima que puede acarrear. El jugador juega, entonces, con la estrategia que da como resultado la minimización de su máxima pérdida. Tal estrategia se llama óptima para ambos jugadores solo en caso de que sus «minimaxes» sean iguales (en valor absoluto) y contrarios (en signo). Si el valor común es cero, el juego se convierte en un sin sentido.

Fuente: Wikipedia

DEFINICIÓN

La regla de interés es una operación que consiste en calcular la ganancia o el interés, generada por un capital o suma de dinero, por ser prestado a un cierto tiempo y a una determinada tasa de interés.

ELEMENTOS

I : interés
t : tiempo
M : monto (M = C + I)
C : capital o suma de dinero
r : tasa de interés o rédito

Nota

Debemos tener presente lo siguiente:

- Mes comercial: 30 días
- Año comercial: 360 días
- Año común: 365 días
- Año bisiesto: 366 días

TASA DE INTERÉS ANUAL

La tasa de interés viene expresada para distintos períodos de tiempo (diario, mensual, bimestral, etc.) y esta debe ser expresada en forma anual.

Ejemplo:

Expresar en forma anual, las siguientes tasas de interés:

a) 0,03% diario
b) 1,5% quincenal
c) 4% mensual
d) 3,5% bimestral
e) 9% trimestral
f) 7,5% semestral
g) 26% bianual

Resolución:

a) El número de días (año comercial): 360.
La tasa de interés anual: $0{,}03 \times 360 = 10{,}8\%$ anual.

b) El número de quincenas en un año: $12 \times 2 = 24$ quincenas.
La tasa de interés anual: $1{,}5 \times 24 = 36\%$ anual

c) El número de meses en el año: 12 meses.
La tasa de interés anual: $4 \times 12 = 48\%$ anual

d) El número de bimestres en el año: $\frac{12}{2} = 6$
La tasa de interés anual: $3{,}5 \times 6 = 21\%$ anual

e) El número de trimestres en el año: $\frac{12}{3} = 4$
La tasa de interés anual: $9 \times 4 = 36\%$ anual

f) El número de semestres en el año: $\frac{12}{6} = 2$
La tasa de interés anual: $7{,}5 \times 2 = 15\%$ anual

g) El número bianual en el año: $\frac{1}{2}$
La tasa de interés anual: $26 \times \frac{1}{2} = 13\%$ anual

FÓRMULAS AL r% ANUAL

Las siguientes expresiones permitirán calcular el interés I, generado por un cierto capital C, al ser prestado por un cierto tiempo t (días, meses o años) y a una determinada tasa de interés anual r.

I. Si el tiempo viene expresado en años

$$I = \frac{C \times t \times r}{100}$$

Ejemplo:

Hallar el interés que genera S/.800, al ser prestado al 5% mensual durante 4 años.

Resolución:

1.° método: usando regla de porcentaje:
Tenemos: C = S/.800; r = 5% mensual; t = 4 años
Hallamos el interés mensual: 5%(800) = S/.40
Hallamos el interés anual: 40×12 = S/.480
Hallamos el interés en 4 años: 480×4 = S/.1920
∴ El interés es S/.1920

2.° método: usando la fórmula:
C = S/.800; r = 5% mensual <> 60% anual
t = 4 años
Hallamos el interés generado:

$$I = \frac{800 \times 4 \times 60}{100} = \text{S/.}1920$$

II. Si el tiempo viene expresado en meses

$$I = \frac{I \times t \times r}{1200}$$

Ejemplo:

Hallar el interés que genera S/.960, al ser prestado al 24% semestral, durante 8 meses.

Resolución:

Tenemos:
C = S/.960; r = 24% semestral <> 48% anual
t = 8 meses
Hallamos el interés generado:

$$I = \frac{960 \times 8 \times 48}{1200} = 307{,}2$$

∴ El interés generado es S/.307,2.

III. Si el tiempo viene expresado en días

$$I = \frac{C \times t \times r}{36\,000}$$

Ejemplo:

Hallar el interés que genera S/.900, al ser prestado al 10% trimestral, durante 24 días.

Resolución:

Tenemos:
C = S/.900; r = 10% trimestral <> 40% anual
t = 24 días
Hallamos el interés generado:

$$I = \frac{900 \times 24 \times 40}{36\,000} = \text{S/.}24$$

∴ Se genera S/.24 de interés.

IV. Interés común

Es el interés generado por un capital, considerando los 365 días del año común.

En este caso la expresión para calcular dicho interés, viene expresado por:

$$I = \frac{C \times t \times r}{36\,500}$$

Ejemplos:

1. Hallar el interés común producido por S/.17 520 prestados al 15% trimestral durante 40 días.

Resolución:

Tenemos:

C = S/.17 520; r = 15% trimestral <> 60% anual

t = 40 días

interés producido: $I = \frac{17520 \times 40 \times 60}{36\,500} = 1152$

∴ Se producen S/.1152 de interés común.

2. Hallar el error que se comete al calcular el interés común de S/.43 800 prestados al 18% semestral durante 75 días como interés comercial.

Resolución:

Del enunciado tenemos:

C = S/.43 800; r = 18% semestral <> 36% anual

t = 75 días

Hallamos el interés común:

$I = \frac{43\,800 \times 75 \times 36}{36\,500} = S/.3240$

Hallamos el interés comercial:

$I = \frac{43\,800 \times 75 \times 36}{36\,000} = S/.3285$

Vemos que el interés comercial es mayor que el interés común.

∴ El error cometido: S/.3285 – S/.3240 = S/.45

Nota

Debemos tener en cuenta que, mientras no se diga nada en el problema se considera el interés comercial.

A continuación definiremos el interés compuesto.

V. Interés compuesto

En el interés compuesto, los intereses que se van generando van incrementando el capital original en períodos establecidos y a su vez van a generar un nuevo interés adicional para el siguiente lapso, quiere decir que el interés se capitaliza.

CONCEPTOS BÁSICOS

I. Período de capitalización. El interés puede ser convertido en forma: anual, semestral, trimestral, bimestral y mensual.

II. Frecuencia de conversión. Es el número de veces (k) que el interés se capitaliza durante un año.

Ejemplo:

Si un depósito que paga 5% capitalizable:

i) mensual ii) trimestral iii) semestral

la frecuencia de conversión será, respectivamente:

i) $k = 12$ ii) $k = \frac{12}{3} = 4$ iii) $k = \frac{12}{6} = 2$

III. Tasa de interés compuesto. Es la tasa de interés, viene expresada comúnmente en forma anual, indicando si es necesario su período de capitalización.

Ejemplo:

Un depósito al 48% anual, capitalizable mensualmente (bimestral, trimestral, semestral)

Conclusiones:

- El interés compuesto siempre es mayor que el interés simple.
- A mayor frecuencia de conversión, mayor será el interés, siendo igual la tasa anual nominal.

Para calcular el interés compuesto, emplearemos la siguiente expresión:

$$M = C\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{nk}$$

Donde:

M : monto acumulado

r : tasa de interés anual

C : capital o suma de dinero

n : número de años

k : número de veces que el capital se capitaliza en un año

Ejemplos:

1. Se han depositado $500 a una tasa de interés del 48% anual, capitalizable mensualmente. Hallar el monto acumulado y el interés generado en 2 años.

Resolución:

Tenemos: C = $500; r = 48% = 0,48; k = 12 (capitalización mensual); n = 2 años

Hallamos el monto acumulado:

$$M = 500\left(1 + \frac{0,48}{12}\right)^{2(12)} = 1281,6$$

∴ El interés: $1281,6 – $500 = $781,6

2. Nathaly depositó $800 a una tasa de 36% anual, capitalizable trimestralmente por un período de 3 años. Hallar el monto acumulado y el interés generado.

Resolución:

Por dato: C = $800; r = 36% = 0,36; n = 3 años; $k = \frac{12}{3} = 4$ (capitalizable trimestralmente)

Hallamos el monto acumulado:

$$M = 800\left(1 + \frac{0,36}{4}\right)^{3(4)} = 2250$$

∴ El interés generado: $2250 – $800 = $1450

PROBLEMAS RESUELTOS

1. ¿Cuánto tiempo estuvo depositado un capital al 25% de interés simple, si el monto generado es el 125% del interés?

Resolución:

En t años: $M_{t\,años} = 125\%\ I_{t\,años}$

$r = 25\% \Rightarrow C + I_{t\,años} = \frac{5}{4}I_{t\,años} \Rightarrow C = \frac{1}{4}I_{t\,años}$

$4C = \frac{C \times t \times 25}{100}$ $\quad\therefore\ t = 16$ años

2. Un interés colocado a interés simple por 8 meses produjo un monto de S/.92 400. Si el mismo capital se hubiera impuesto al mismo rédito por un año, el monto sería S/.103 600. ¿Cuál es la tasa de interés trimestral?

Resolución:

Del enunciado:

- En 8 meses:
  $M_{8m} = 92\,400 \Rightarrow C + 8 \times I_{1m} = 92\,400$ ...(1)
- En 1 año:
  $M_{12m} = 103\,600 \Rightarrow C + 12 \times I_{1m} = 103\,600$ ...(2)

(2) – (1): $4 \times I_{1m} = 11\,200 \Rightarrow I_{1m} = 2800$

En(1): $C + 8 \times 2800 = 92\,400 \Rightarrow C = 70\,000$

Hallamos la tasa de interés trimestral: $I_{1m} = 2800$

$$\frac{70\,000 \times 1 \times (4r)}{1200} = 2800 \Rightarrow r = 12\%$$

$\therefore$ Tasa trimestral: 12%.

3. El interés de un capital obtenido en 4 meses es el 20% del monto. ¿Qué porcentaje del monto es el interés que se obtendrá en 9 meses, el mismo capital prestado a la misma tasa de interés?

Resolución:

Del enunciado:

- En 4 meses:
  $I_{4m} = 20\%\ M_{4m} \Rightarrow 4I_{1m} = \frac{1}{5}(C + 4 \times I_{1m})$
  $\Rightarrow I_{1m} = \frac{1}{16}C$ ...(1)
- En 9 meses:
  $I_{9m} = x\%\ M_{9m} \Rightarrow 9I_{1m} = \frac{x}{100}(C + 9 \times I_{1m})$

Reemplazando: $\frac{9}{16}C = \frac{x}{100}\left(C + \frac{9}{16}C\right) \Rightarrow x = 36\%$

$\therefore$ En 9 meses se obtendrá el 36% del monto.

4. Una suma de S/.45 000 es prestado por 7 meses 9 días al 20% cuatrimestral. ¿Qué error se comete al considerar el año común en vez del año comercial?

Resolución:

Se tiene: C = S/.45 000; t = 7 meses 9 días = 219 dias
r = 20% cuatrim. <> 60% anual

- Hallamos el interés comercial:
  $I = \frac{45\,000 \times 219 \times 60}{36\,000} = S/.16\,425$
- Hallamos el interés común:
  $I = \frac{45\,000 \times 219 \times 60}{36\,500} = S/.16\,200$

$\therefore$ El error es: S/.16 425 – S/.16 200 = S/.225.

5. El 30% de un capital se impone al 3% anual, el 25% al 4% anual y un 35% al 6% anual. ¿A qué porcentaje se deberá imponer el resto para obtener en un año un monto igual al 105% del capital?

Resolución:

Usamos falsa suposición:

Sea S/.100 el capital, tal que:

C_1 = S/.30	C_2 = S/.25	C_3 = S/.35	C_4 = S/.10
$r_1 = 3\%$	$r_2 = 4\%$	$r_4 = 6\%$	$r_4 = r\%$
$I_1 = 0{,}9$	$I_2 = 1$	$I_3 = 2{,}1$	$I_4 = 0{,}1\ r$

Pero: $M_{1\,año}$ = S/.105 ...(1)

En (1): $100 + 0{,}9 + 1 + 2{,}1 + 0{,}1r = 105 \Rightarrow r = 10$

$\therefore$ Tasa de interés: 10 % anual

6. Una persona invierte en una empresa S/.18 000, con la condición de cobrar el 5% de interés simple y además el 10% del beneficio que obtiene la empresa. Al cabo de 3 años y 6 meses recibe en total S/.32 150. Determinar el capital total invertido por la empresa, sabiendo que los beneficios representan el 20% del mismo.

Resolución:

Sea C el capital invertido por la empresa.

Beneficio de la empresa: 20%C

De la persona: C = S/.18 000; r = 5%

t = 3 años 6 meses = 3,5 años

Comisión = 10% beneficio

$M_{pers.} = 32\,150 \Rightarrow C + I + \text{Comisión} = 32\,150$

$$18000 + \frac{18\,000 \times 3{,}5 \times 5}{100} + 10\%(20\%\ C) = 32\,150$$

$2\%\ C = 11\,000 \Rightarrow C = S/.550\,000$

$\therefore$ El capital invertido por la empresa: S/.550 000

7. Dos capitales que se diferencian en S/.4500 fueron impuestos a dos tasas que están en relación de 5 a 4; después de un cierto tiempo se observó que los intereses producidos están en razón inversa a las tasas. Determinar a cuánto asciende el mayor capital.

Resolución:

Del enunciado: $C_1 = C$; $C_2 = C + 4500$; $r_1 = 5$; $r_2 = 4$

Al cabo de cierto tiempo:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{C \times 5}{(C + 4500)4} = \frac{4}{5} \Rightarrow C = S/.8000$$

Los capitales: C_1 = S/.8000; C_2 = S/.12 500

$\therefore$ El mayor capital: S/.12 500

8. Se impone cierto capital a cierta tasa y en ocho meses produce un interés que es el 40% del monto. ¿Durante cuánto tiempo debe prestarse dicho dinero para que a la misma tasa de interés genere una renta igual al 80% del monto?

Resolución:

Del enunciado:

En 8 meses: $I_{8m} = 40\%M_{8m}$

$8\,I_{1m} \Rightarrow \frac{2}{5}(C + 8\,I_{1m}) \Rightarrow I_{1m} = \frac{1}{12}C$

En t meses: $I_{tm} = 80\%M_{tm} \Rightarrow t \times I_{1m} = \frac{4}{5}(C + t \times I_{1m})$

Reemplazando: $t \times \frac{C}{12} = \frac{4}{5}\left(C + \frac{t}{12}C\right)$

$t = 48$ meses $\quad \therefore\ t = 4$ años

9. Un importador coloca cierta suma al 15% por dos años, termina el plazo, retira el capital y sus intereses y coloca el total al 3,5% bimestral obteniéndose de intereses en un año S/.1365. ¿Cuál fue el capital?

Resolución:

Sea C el capital original.

Hallamos el monto, a los 2 años y al 15%:

$M = C\left(1 + \frac{2 \times 15}{100}\right) = \frac{13}{10} \times C$

Hallamos el interés que genera M:

r = 3,5% bimestral <> 21 % anual $\Rightarrow I = 1365$

$\frac{\frac{13}{10}C \times 1 \times 21}{100} = 1365 \Rightarrow C = 5000$

∴ El capital original es S/.5000.

10. Se tiene un capital que es prestado al 25% anual. Después de un cierto tiempo "t" produce un monto de S/.5740, pero si el préstamo hubiera sido por dos años más, el monto hubiera sido de S/.8200. ¿Qué monto producirá dicho capital en un tiempo "2t", bajo la misma tasa?

Resolución:

r = 25%

En "t" años:

$M_t = 5740 \Rightarrow C + I_{t\,años} = 5740$ ...(1)

En 2 años más:

$M_{(t+2)} = 8200 \Rightarrow C + I_{(t+2)años} = 8200$ ...(2)

(2) − (1): $\underbrace{I_{(t+2)} - I_t}_{I_{2\,años}} = 2460$

$I_{2\,años} = 2460$ ...(3)

En (1): $C = 5740 - 1230t$

E(3): $\frac{(5740 - 1230t)2 \times 25}{100} = 2460 \Rightarrow t = \frac{2}{3}$ años

$\Rightarrow C = 5740 - 1230 \times \frac{2}{3} = 4920$

Hallamos el monto para los 2t años: 4/3 años

$M = 4920\left(1 + \frac{4}{3} \times \frac{25}{100}\right) = S/.6560$

∴ El monto es S/.6560.

11. Tres capitales que están en progresión aritmética se colocan durante un año al 3%. El interés total producido es \$1890. La diferencia entre el tercero y el primer capital es de \$2400. Calcular el menor capital.

Resolución:

Los 3 capitales en PA: $C - a$; C; $C + a$

r = 3%

Por datos: $I_1 + I_2 + I_3 = 1890$ ...(1)

Diferencia entre 1.° y 3.°:

$(C + a) - (C - a) = 2400 \Rightarrow a = 1200$ ...(2)

(2) en (1):

$\frac{(C - 1200)3}{100} + \frac{C \times 3}{100} + \frac{(C + 1200)3}{100} = 1890$

$\Rightarrow C = 21\,000$

∴ El menor capital: \$21 000 − \$1200 = \$19 800

12. Si los 5/8 de un capital se imponen al 30% y el resto al 20% se producirá anualmente S/.900 más que si las mismas partes se hubieran impuesto con las tasas en orden invertido. ¿Cuál es el 12% del 5 por mil de dicho capital?

Resolución:

Sea C el capital, luego:

$C_1 = \frac{5}{8}C$; $C_2 = \frac{3}{8}C$; $r_1 = 30\%$; $r_2 = 20\%$

$r_1' = 20\%$; $r_2' = 30\%$

Si se invirtieran las tasas, se cumple en forma anual: $(I_1 + I_2) - (I_1' + I_2') = 900$

Reemplazando:

$\left(\frac{\frac{5}{8}C \times 30}{100} + \frac{\frac{3}{8}C \times 20}{100}\right) - \left(\frac{\frac{5}{8}C \times 20}{100} + \frac{\frac{3}{8}C \times 30}{100}\right) = 900$

$\Rightarrow C = S/.36\,000$

Hallamos 12% del 5 por mil de 36 000:

$\therefore\ \frac{12}{100} \times \frac{5}{1000} \times 36\,000 = S/.21{,}6$

13. Se tiene un capital de S/.60 800 que ha sido dividido en 3 partes, colocándose la primera de ellas al 4%, la segunda al 8% y la última al 10%. Encontrar dichas cantidades, sabiendo que producen el mismo interés anual. Dar como respuesta al mayor de ellos.

Resolución:

Sean C_1, C_2 y C_3 las partes.

Tasas de interés: $r_1 = 4\%$; $r_2 = 8\%$; $r_3 = 10\%$

Como generan el mismo interés:

$C_1 \times \frac{4}{2} = C_2 \times \frac{8}{4} = C_3 \times \frac{10}{5} = k$

$\Rightarrow C_1 = \frac{k}{2}$; $C_2 = \frac{k}{4}$; $C_3 = \frac{k}{5}$

Luego: $\frac{k}{2} + \frac{k}{4} + \frac{k}{5} = 60\,800 \Rightarrow k = 64\,000$

Los capitales son: C_1 = S/.32 000; C_2 = S/.16 000; C_3 = S/.12 800 $\quad$ ∴ El mayor capital: S/.32 000

14. Una compañía recibe en depósito los ahorros de sus empleados, por los que paga un interés del 50% hasta los S/.1000; del 40% por el exceso hasta los S/.2000 y del 30% por lo que pase de esta cantidad hasta S/.20 000. Un empleado, en un año cobró S/.2700 de interés. ¿Cuál fue su depósito?

Resolución:

Del enunciado:

50%	40%	30%
Hasta S/. 1000	Exceso hasta S/. 2000	Pasa de S/. 2000
I	II	III
S/. 1000	S/. 2000	S/. 20 000

Hallando los intereses de un año por separado:

$$I_I = \frac{1000\times1\times50}{100} = S/.500$$

$$I_{II} = \frac{1000\times1\times40}{100} = S/.400$$

$\Rightarrow I_I + I_{II} = S/.900$

El interés de la tercera zona:

$I_{III} = S/.2700 - S/.900 = S/.1800$

Sea C, el exceso de S/.2000: $I_{III} = 1800$

$$\frac{C\times1\times30}{100} = 1800 \Rightarrow C = S/.6000$$

$\therefore$ El depósito que se hizo: $2000 + 6000 = S/.8000$

15. Un artefacto que cuesta $2500 se desvaloriza uniformemente a razón de $250 al año. Una persona que desea comprarlo deposita $1250 al 4% de interés simple. Dentro de cuánto tiempo (como mínimo) podrá adquirir dicho artefacto.

Resolución:

El cliente deposita su dinero a interés simple, logrando que su capital aumente y como el artefacto se devalúa, en algún momento se igualarán.

En t años:

- El cliente: $C = \$1250$; $r = 4\%$
  Monto:
  $$M = 1250 + \frac{1250\times t\times 4}{100} = 1250 + 50t \quad ...(1)$$
- El artefacto:
  Valor: $V = 2500 - 250t \quad ...(2)$

pero: (1) = (2): $1250 + 50t = 2500 - 250t$

$$300t = 1250 \Rightarrow t = 4\frac{1}{6} \text{ años}$$

$\therefore$ El tiempo: 4 años 2 meses

16. Hallar el interés que produce un capital de S/.40 000 prestado al 72% anual, desde el 20 de julio hasta el 29 de setiembre del mismo año.

Resolución:

Tenemos: $C = S/.40\ 000$; $r = 72\%$ anual

t = Del 20 julio al 29 de setiembre = 71 días

Hallamos el interés común:

$$I = \frac{40\,000\times71\times72}{36\,500}$$

$\therefore I = S/.5602{,}19$

17. Nathaly presta los 3/5 de su dinero y el resto lo deposita al 7,5% semestral. Si al cabo de 7 meses, del dinero prestado solo le devuelven las 2/3 partes, ¿a qué tasa de interés deberá colocar dicho dinero para obtener el mismo monto dentro de 15 meses, si el primero sigue depositado?

Resolución:

Sea C el capital total.

Prestó: $\frac{3}{5}C$, le devolvieron: $\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}C = \frac{2}{5}C$.

De los intereses:

$C_1 = \frac{2}{5}C$; $C_2 = \frac{2}{5}C$; $t_1 = 7 + 15 = 22$ meses;

$t_2 = 15$ meses

$r_1 = 7{,}5\%$ semest. <> 15% anual; $r_2 = ?$

Pero: $M_1 = M_2 \Rightarrow \frac{2}{5}C\left(1 + \frac{22\times1}{1200}\right) = \frac{2}{5}C\left(1 + \frac{15\times r}{1200}\right)$

$\therefore r = 22\%$ anual

18. Tres capitales impuestos separadamente al 12,5% semestral, 4% bimestral y 5% trimestral respectivamente, generan la misma renta. Hallar la suma de los 3 capitales, si el menor de los montos producidos en un año es S/.3000.

Resolución:

Sean los capitales C_1; C_2 y C_3.

Con sus respectivas tasas:

$r_1 = 12{,}5\%$ semestral <> 25% anual;

$r_2 = 4\%$ bimestral <> 24% anual

$r_3 = 5\%$ trimestral <> 20% anual

Si generan la misma renta, se cumple:

$C_1\times25 = C_2\times24 = C_3\times20 = k$

$\Rightarrow C_1 = \frac{k}{25}$; $C_2 = \frac{k}{24}$; $C_3 = \frac{k}{20}$

El menor monto: $C_1 + I_t = 3000$

$$\frac{k}{25}\left(1 + \frac{25}{100}\right) = 3000 \Rightarrow k = 60\,000$$

$\Rightarrow C_1 = S/.2400$; $C_2 = S/.2500$; $C_3 = S/.3000$

$\therefore C_1 + C_2 + C_3 = S/.7900$

19. Un capital es impuesto al 20% anual y al final del primer año retiran los intereses y una parte del capital igual a los intereses; al final del segundo año se retiran los intereses y una parte del capital igual a los intereses y así sucesivamente. Si al final del tercer año se nota que el capital ha disminuido en S/.12 200, ¿cuál es el capital inicial?

Resolución:

Usando falsa suposición:

Sea S/.250 el capital:

$$\left.\begin{matrix} r = 20\% \\ t = 1 \text{ año}\end{matrix}\right\} I_1 = \frac{250\times1\times20}{100} = S/.50$$

Se retiran S/.50 de S/.250, quedan: S/.200

$$\left.\begin{matrix} r = 20\% \\ t = 1 \text{ año}\end{matrix}\right\} I_2 = \frac{200\times1\times20}{100} = S/.40$$

Se retiran S/.40 de S/.200, quedan: S/.160

$\left.\begin{array}{l} r = 20\% \\ t = 1 \text{ año} \end{array}\right\} I_3 = \dfrac{160 \times 1 \times 20}{100} = \text{S/.}32$

Se retiran S/.32 de S/.160 quedan al final del 3.^{er} año: S/.128

El capital disminuye: S/.250 − S/.128 = S/.122

Hallamos el capital por regla de tres:

	Capital	disminuye
F.S.	250	122
Real	x	12 200

$\Rightarrow x = \dfrac{250 \times 12\,200}{122}$ $\quad\therefore$ El capital es: S/.25 000

20. Una persona divide en 2 partes los S/.800 que tiene y los presta durante cierto tiempo, observando que una de las partes se duplica y la otra se triplica. Además, la diferencia entre las ganancias obtenidas es S/.475. Determinar la mayor de las partes.

Resolución:

Tenemos:

$\text{S/.}800 \begin{cases} 1.^a\text{: } C_1 = C \text{ (se duplica)} \Rightarrow I_1 = C \\ 2.^a\text{: } C_2 = 800 - C \text{ (se triplica)} \Rightarrow I_2 = 2(800 - C) \end{cases}$

Además:

$I_2 - I_1 = 475$

$\Rightarrow 2(800 - C) - C = 475 \Rightarrow C = 375$

Las partes respectivas: 1.^{a}: S/.375 y 2.^{a}: S/.425

$\therefore$ La mayor de las partes: S/.425

21. Se deposita un capital al n% anual de interés simple durante 9 meses. Hallar "n" si en los últimos meses ganó $\frac{600}{53}\%$ del monto acumulado en los tres primeros meses.

Resolución:

Se tiene: capital: C ; r = n% anual; t = 9 meses

Por dato: $I_{6 \text{ últimos meses}} = \dfrac{600}{53}\% \, M_{3 \text{ primeros meses}}$ ...(1)

Hallamos el interés mensual: $I_{1m} = \dfrac{C \times 1 \times n}{1200}$

Luego: $I_{3m} = 3 \times I_{1m} \Rightarrow I_{6m} = 6 \times I_{1m}$

En (1): $6 \times \dfrac{C \times n}{1200} = \dfrac{6}{53}\left(C + 3 \times \dfrac{C \times n}{1200}\right)$

$\therefore$ El valor de n es 24.

22. Una persona vende su auto, y el dinero lo presta por un año y 9 meses al 1,25% trimestral. Los intereses producidos los reparte entre sus 3 hijas, a una de ellas le dio los 3/7; a la otra 4/11 y a la otra $64. ¿En cuánto vendió el auto?

Resolución:

Hallamos el interés que repartió entre sus tres hijas:

$\dfrac{3}{7}I + \dfrac{4}{11}I + 64 = I \Rightarrow I = \$308$ ...(1)

Hallamos el capital:

t = 1 año 9 meses $<>$ 21 meses;

r = 1,25% trimest. $<>$ 5% anual.

En (1): $\dfrac{C \times 21 \times 5}{1200} = 308 \Rightarrow C = 3520$

$\therefore$ El auto lo vendió en: $3520

23. Dos capitales están en la relación de 5 a 8, el primer capital se colocó al 25 por 75 durante 8 meses y al segundo al 20 por 60 durante 20 meses, obteniéndose de esta manera un monto total de S/.83 500. ¿A cuánto ascendía el capital total?

Resolución:

1.^{er} capital		2.° capital:
$C_1 = 5k$	;	$C_2 = 8k$
$r_1 = \frac{25}{75} <> \frac{1}{3}$	;	$r_2 = \frac{20}{60} <> \frac{1}{3}$
$t_1 = 8$ m	;	$t_2 = 20$ m

Sabemos que: M = 83 500; $C + I_1 + I_2 = 83\,500$

Reemplazando:

$13k + \dfrac{5k \times 8 \times \frac{1}{3}}{12} + \dfrac{8k \times 20 \times \frac{1}{3}}{12} = 83\,500$

$\Rightarrow k = 4500$

$\therefore$ Capital total: $C_1 + C_2 = 13 \times 4500 =$ S/.58 500

24. Una persona dispone de N soles que lo ha dividido en 3 partes, tal que imponiéndolas al 18%; 36% y 45%, respectivamente, le genera el mismo interés bimestral. Calcular N, si la mayor diferencia entre dos de los capitales es S/.1200.

Resolución:

Si las partes generan el mismo interés:

$C_1 \times 18 = C_2 \times 36 = C_3 \times 45 = k$

$\Rightarrow C_1 = \dfrac{k}{6}; C_2 = \dfrac{k}{12}; C_3 = \dfrac{k}{15}$

Por dato: Mayor difer. = 1200

$\dfrac{k}{6} - \dfrac{k}{15} = 1200 \Rightarrow k = 12\,000$

Luego: $N = C_1 + C_2 + C_3$

$N = 2000 + 1000 + 800$

$\therefore$ N = S/.3800

25. Un capital de $40 000 estuvo impuesto durante un cierto número de años, meses y días. Por los años se cobró el 5% anual, por los meses el 4% y por los días el 3%. Calcular la utilidad producida por dicho capital sabiendo que si se hubiera tenido impuesto durante todo el tiempo al 5%, habría producido $3840 más que si se hubiera colocado todo el tiempo al 3%.

Resolución:

Hallamos el tiempo de imposición:

(I al 5%) − (I al 3%) = 3840

$\dfrac{40\,000 \times t \times 5}{100} - \dfrac{40\,000 \times t \times 3}{100} = 3840$

$\Rightarrow t = 4{,}8$ años $<>$ 4 años, 9 meses, 18 días.

Hallamos el interés, por años, meses y días:

$t_1 = 4$ años; $t_2 = 9$ meses; $t_3 = 18$ días;

$r_1 = 5\%$; $r_2 = 4\%$; $r_3 = 3\%$

$I_{total} = 40\,000\left[\frac{4\times 5}{100} + \frac{9\times 4}{1200} + \frac{18\times 3}{36\,000}\right]$

$I_{total} = 40\,000[0{,}2 + 0{,}03 + 0{,}0015]$

$\therefore\ I_{total} = \$9260$

26. Un capital impuesto al 0,20% diario, produce en 10 meses S/.2610 más, que el mismo capital impuesto al 0,20% mensual durante el mismo tiempo. Hallar el capital.

Resolución:

Del enunciado:

$r_1 = 0{,}2\%$ diario <> 72% anual

$r_2 = 0{,}2\%$ mensual <> 2,4% anual

En 10 meses, se cumple: $I_{72\%} - I_{2.4\%} = 2610$

$$\frac{C\times 10\times 72}{1200} - \frac{C\times 10\times 2{,}4}{1200} = 2610 \Rightarrow C = S/.4500$$

∴ El capital es S/.4500.

27. Los 4/7 de un capital se prestan al 20% anual de interés simple, durante 3 años 6 meses, obteniendo 2300 soles más de ganancia que la producida por el capital restante colocado en un negocio que producirá el 8% anual durante 2 años 1 mes. Determinar el capital.

Resolución:

Sea C el capital que ha sido dividido en 2 partes:

$C_1 = \frac{4}{7}C;\ C_2 = \frac{3}{7}C;\ r_1 = 20\%;$

$t_1 = 3$ años, 6 meses <> 42 meses

$t_2 = 2$ años, 1 mes <> 25 meses

Por dato: $I_1 - I_2 = 2300$

Reemplazando:

$$\frac{\frac{4}{7}C\times 42\times 20}{1200} - \frac{\frac{3}{7}C\times 25\times 8}{1200} = 2300$$

$\Rightarrow C = S/.7000$ ∴ El capital es S/.7000.

28. Se impone S/.9000 en un banco al 5% trimestral capitalizable semestralmente y al cabo de cierto tiempo retiró un monto de S/.11 132. Halle dicho tiempo.

Resolución:

r = 5% trimestral <> 10% capitalizable semestralmente

t: n.º de semestres; C = S/.9000; M = S/.11 132

Por dato: $M = 9000(1 + 10\%)^t = 11\,132$

$1{,}1^t = 1{,}23$

$t = 2{,}2$ semestres

$\Rightarrow t = 13$ meses, 10 días.

29. Adriana se presta $4000 a una tasa del 10% mensual sobre el saldo deudor. Para liberarse de su deuda paga $1900 a los dos meses y luego de un mes A dólares; cancelando con A dólares al final del cuarto mes toda la deuda. Calcular A.

Resolución:

Préstamo: $4000 a 4 meses, 10% mensual sobre el saldo deudor.

1.er pago: 1900 a los 2 meses

Saldo: $4000(1 + 10\%)^2 - 1900 = \$2940$

2.° pago: $A al mes

Saldo: $2940(1 + 10\%) - A = 3234 - A$

3.er pago: cancela la deuda con $ A

Luego: $(3234 - A)(1 + 10\%) - A = 0$

$\Rightarrow A = \$1694$

∴ El valor de A: $1694

30. La octava parte de un capital se depositó al 35%, los 3/7 del resto al 40% y el saldo a cierta tasa que permitió obtener una utilidad anual de 45% sobre dicho capital. ¿A qué tasa se colocó el saldo?

Resolución:

Usando falsa suposición.

Sea S/.120 el capital:

$C_1 = S/.15;\ C_2 = S/.45;\ C_3 = S/.60$

$r_1 = 35\%;\ r_2 = 40\%;\ r_3 = r\%$

Hallamos los intereses respectivos:

$I_1 = \frac{15\times 1\times 35}{100} = 5{,}25;\ I_2 = \frac{45\times 1\times 40}{100} = 18;$

$I_3 = \frac{60\times 1\times r}{100} = 0{,}6r$

Pero: utilidad anual = 45%(120) = 54

$\Rightarrow 5{,}25 + 18 + 0{,}6r = 54 \Rightarrow r = 51{,}25$

∴ La 3.ª parte se colocó el 51,25%.

31. Hallar el monto que produce un capital de S/.2000 al ser impuesto el 5% trimestral capitalizable semestralmente durante año y medio.

Resolución:

Tenemos: C = S/.2000

r = 5% trimestral capitalizable semestralmente <> 10% semestral

t = 1 año y medio ⇒ 3 períodos

Hallamos el monto:

$M = 2000(1 + 10\%)^3 = S/.2662$

∴ Monto total: S/.2662

32. Un padre al morir dejó dispuesto en su testamento que los $41 680 que poseía, sean repartidos entre sus 4 hijos de 10; 12; 15 y 16 años de edad de modo que colocada cada una de sus partes a interés simple al 10%, todos tengan la misma cantidad al cumplir 18 años. ¿Qué cantidad es esta?

Resolución:

Sean los capitales C_1; C_2; C_3 y C_4.

Cada hijo, a sus 18 años, tendría el mismo monto, los tiempos respectivos son:

$t_1 = 8;\ t_2 = 6;\ t_3 = 3$ y

$t_4 = 2;\ r = 10\%;\ M_1 = M_2 = M_3 = M_4$

$$C_1\left(1 + \frac{8\times 10}{100}\right) = C_2\left(1 + \frac{6\times 10}{100}\right) = C_3\left(1 + \frac{3\times 10}{100}\right) = C_4\left(1 + \frac{2\times 10}{100}\right)$$

$180\times C_1 = 160\times C_2 = 130\times C_3 = 120\times C_4 = k$

$\Rightarrow C_1 = \frac{k}{18};\ C_2 = \frac{k}{16};\ C_3 = \frac{k}{13};\ C_4 = \frac{k}{12}$

$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 41\ 680 \Rightarrow k = 149\ 760$

Hallamos el monto: $M_t = \frac{149\ 760}{18} \times \frac{180}{100} = \$14\ 976$

$\therefore$ El monto a los 18 años: \$14 976

33. Un capital de S/.20 000 colocado al 2% mensual, ¿qué interés genera en 10 meses si se capitaliza cada 5 meses?

Resolución:

Tenemos: C = S/.20 000; r = 2% mensual <> capitalizable en 5 meses = 10%

t = 10 meses <> 2 periodos

Hallamos el monto:

$M = 20\ 000(1 + 10\%)^2 = S/.24\ 200$

$\therefore$ El interés: S/.24 200 − S/.20 000 = S/.4200

34. Una persona quiere comprar un auto que vale \$4840. Durante cuánto tiempo debe prestar un capital de \$4000 capitalizable semestralmente al 20% anual para poder comprarlo.

Resolución:

Valor del automóvil: \$4840

C = \$4000; r = 20% anual

$\Rightarrow$ 10% capitalizable semestralmente

t = n semestres

Para que se compre el automóvil se cumple:

Monto = valor del auto

$\Rightarrow 4000(1 + 10\%)^n = 4840$

$\Rightarrow (1{,}1)^n = 1{,}21 = (1{,}1)^2 \Rightarrow n = 2$

$\therefore$ Dentro de 2 semestres <> 1 año

35. ¿A qué porcentaje debe estar impuesto un capital para que en un año produzca un interés igual al 20% del monto?

Resolución:

Sea C el capital, tasa de interés: r%

Por dato: $I_{1año} = 20\% M_{1año}$

$$I_{1año} = \frac{1}{5}(C + I_{1año}) \Rightarrow I_{1año} = \frac{C}{4}$$

Reemplazando: $\frac{C \times 1 \times r}{100} = \frac{C}{4} \Rightarrow r = 25\%$

$\therefore$ Tasa de interés anual: 25%

36. ¿Qué capital produce S/.600 de interés al 2% trimestral en 6 meses?

Resolución:

2% trimestral <> 8% anual

$I = \frac{C \times r \times t}{1200} \Rightarrow 600 = \frac{C \times 8 \times 6}{1200}$

$\therefore$ C = S/.15 000

37. En un año un capital de S/.10 000 impuesto al 15% produce un interés de S/.300 menos de lo que produce los 3/4 del mismo capital impuesto durante 8 meses ¿A qué porcentaje de interés se impuso este último?

Resolución:

	Tasa	Capital	Tiempo
C = 10 000	$r_1 = 15\%$	C	1 año
	$r_2 = x\%$	$\frac{3}{4}C$	8 meses = $\frac{8 \text{ años}}{12}$

Luego: $I_2 - I_1 = 300$

$\frac{3}{4}(10\ 000)(x\%)\frac{8}{12} - (10\ 000)15\%(1) = 300$

$\Rightarrow x = 36$

$\therefore$ Tasa de interés: 36%anual

38. Durante cuánto tiempo estuvo impuesto un capital de S/.144 000 al 2% si ha producido un interés de 400.

Resolución:

$I = \frac{C \times r \times t}{36\ 000} \Rightarrow 400 = \frac{144\ 000 \times 2 \times t}{36\ 000}$

$\therefore$ t= 50 días

39. El señor Pérez coloca S/.3000 en un banco al 2% mensual luego de 4 meses coloca S/.2000 más y tres meses después retiró todo su capital y sus intereses. ¿Cuántos dinero retiro en total?

Resolución:

$C_1 = 3000$, r = 2% mensual, $t_1 = 7$ meses $\Rightarrow$ $I_1 = 3000 \times 2\%7$; $\therefore I_1 = 420$

$C_2 = 2000$, M = 2% mensual, $t_2 = 3$ meses $\Rightarrow$ $I_2 = 2000 \times 2\%3$; $\therefore I_2 = 120$

El dinero que se retira es: $C_{total} + I_{total}$

$\therefore C_1 + C_2 + I_1 + I_2 = S/.5540$

40. ¿Cuánto tiempo deberá colocarse un capital al 12.5% trimestral para que sea quíntuple de la suma inicial?

Resolución:

12,5% trimestral <> 50% anual

Datos: C = ?; R = 50%; t = ? (en años)

M = 5C $\Rightarrow$ I = 4C $\Rightarrow$ 4C = C × 50%t

$\therefore$ t= 8 años

41. Juan tiene un capital del cuál el 50% deposita a una tasa de interés del 36% anual, la tercera parte al 30% y el resto al 24% obteniendo una renta de S/.96 000. ¿Cuál es el capital de Juan?

Resolución:

Sea 6C el capital de Juan.

Del enunciado:

$C_1 = 3C$, $r_1 = 36\%$, t = 1 $\Rightarrow$ $I_1 = 3C \times 36\%\ 1$; $\Rightarrow I_1 = 108\%C$

$C_2 = 2C$, $r_2 = 30\%$, t = 1 $\Rightarrow$ $I_2 = 2C \times 30\%\ 1$; $\Rightarrow I_2 = 60\%C$

$C_3 = C$
$r_3 = 24\% \Rightarrow$ $I_3 = C \times 24\%\ 1$
$t = 1$ $\Rightarrow I_3 = 24\%C$

$\Rightarrow I_{total} = I_1 + I_2 + I_3$

Como: Interés = Renta $\Rightarrow$ 192%C = 96 000

$\therefore$ C = S/.50 000

42. Se da un capital en préstamo a interés simple y en 6 meses produce un interés igual al 20% del monto. ¿Cuánto tiempo debe prestarse dicho capital para que el interés sea el 60% del monto?

Resolución:

Sea C el capital, en 6 meses:

$I = 20\%M = 20\%(C + I)$

Se obtiene: $C = 4I = 4\left(C \times r\% \times \frac{6}{12}\right) \Rightarrow r = 50$

Se desea: $I' = 60\%M \Rightarrow I' = 60\%(C + I')$

Luego: $C = \frac{2}{3}\ I' = \frac{2}{3}(C \times 50\% \times t)$

Donde: t = 3 años

$\therefore$ t = 3(12 meses) = 36 meses

43. ¿Cuánto tiempo hay que colocar un capital al 40% anual para que dicho capital sea el 20% del monto total?

Resolución:

Datos: t = ? (en años); C = 20%M; r = 40%

Sabemos: $M = C\ (1 + r\%\ t)$

$\Rightarrow M = 20\%M(1 + 40\%t)$

$\Rightarrow 1 = \frac{1}{5}\left(1 + \frac{2}{5}t\right) \Rightarrow t = 10$

$\therefore$ El tiempo es 10 años.

44. Hallar el interés que genera un capital de S/.8000 impuesto durante 1 año y 3 meses al 2% semestral.

Resolución:

C = 8000; r = 2% semestral; r = 4% anual

t = 1 años y 3 meses <> t = 15 meses

$I = \frac{C \times r \times t}{1200} \Rightarrow I = \frac{800 \times 4 \times 15}{1200}$ $\therefore$ I = S/.400

45. ¿A qué tasa anual se impuso un capital sabiendo que el monto producido en 4 meses es igual al 90% del monto producido en 8 meses?

Resolución:

Sea r la tasa anual:

$M_4 = 90\%\ M_8$ ...(1)

Obs: $I_8 = 2\ I_4$ ...(2)

De (1) y (2): $C + I_4 = 90\%(C + I_8)$

$\Rightarrow 10C + 10I_4 = 9C + 18I_4$

$\Rightarrow C = 8I_4 \Rightarrow C = 8 \times \frac{C \times r \times 4}{100}$

$\therefore$ r = 3,125%

46. Si quiero obtener una ganancia de S/.400 dentro de 8 meses al 2% semestral. ¿Qué cantidad de dinero debo imponer en el banco?

Resolución:

I = 400; t = 8 meses; r= 4% anual;

r = 2% semestral; C = ?

$I = \frac{C \times r \times t}{1200} \Rightarrow 400 = \frac{C \times 4 \times 8}{1200}$ $\therefore$ C= S/.15 000

47. Si un capital de S/.500 se imponen durante 9 meses al 40% anual, ¿qué monto se obtiene?

Resolución:

C = 500; r = 40% anual; t = 9 meses

$I = \frac{C \times r \times t}{1200} \Rightarrow I = \frac{500 \times 40 \times 9}{1200} = 150$

$\Rightarrow M = C + I \Rightarrow M = 500 + 150$ $\therefore$ M = S/.650

48. ¿Al cabo de cuántos años un capital impuesto a una tasa del 10% se duplicará?

Resolución:

t = ?; C = C; r = 10%; M = 2C $\Rightarrow$ I = C

$I = \frac{C \times r \times t}{100};\ C = \frac{C \times 10 \times t}{100}$ $\therefore$ t = 10 años

49. Si el interés producido por un capital en 8 meses equivale a un cuarto del capital. ¿Cuál es la tasa de interés anual a la cual fue depositada?

Resolución:

C = C; I = 1/4 C; t = 8 meses; r = ?

$I = \frac{C \times r \times t}{1200} \Rightarrow \frac{1}{4}C = \frac{C \times r \times 8}{1200} \Rightarrow r = \frac{150}{4}$

$\therefore$ r = 37,5%

50. La diferencia entre los capitales de dos socios es de S/.5205. Uno ha impuesto su capital a una tasa del 15% y el otro al 12%. Ambos tienen el mismo ingreso por la ganancia de sus capitales. Hallar el capital mayor.

Resolución:

$C_1 - C_2 = 5205$...(1)

$\frac{C_1 \times 12 \times t}{100} = \frac{C_2 \times 15 \times t}{100} \Rightarrow \frac{C_1}{C_2} = \frac{5k}{4k}$

En (1): 5k − 4k = 5205 $\Rightarrow$ k = 5205

Luego: C_1 = 5(5205) $\therefore$ C_1= S/.26 025

51. ¿Qué capital se debe depositar al 15% de interés anual para que se convierta en S/.6500 a los 2 años?

Resolución:

C = C; r = 15%; t = 2 años; M = 6500; M = C + I

$6500 = C + \frac{C \times 15 \times 2}{100} \Rightarrow 6500 = \frac{13C}{10}$

$\therefore$ C= S/.5000

52. Yo quiero tener cada mes una ganancia de S/.300 soles, ¿que cantidad de dinero colocaré en el banco al 4% mensual?

Resolución:

Interés: I; r = 4% mensual; Capital: C; t = 1 mes

$C \times r\%\ t = I \Rightarrow C \times 4\% = 300$ $\therefore$ C= S/.7500

53. Calcular el interés que genera un capital de S/.3000 impuesto durante 2 años al 5% anual.

Resolución:

C= 3000; t = 2 años; r = 5% anual

$I = \frac{C \times r \times t}{100} \Rightarrow \frac{3000 \times 5 \times 2}{100} \quad \therefore I = S/.300$

54. A qué porcentaje debe ser colocado un capital para que en 1 año con 4 meses produzca un interés equivalente a los 2/13 de la cuarta parte del monto.

Resolución:

C = C; r = ?; t = 1 año, 4 meses <> 16 meses

$I = \frac{2}{13}\left(\frac{M}{4}\right) \Rightarrow I = \frac{M}{26} \Rightarrow 26I = C + I \Rightarrow 25I = C$

$I = \frac{C}{25} \Rightarrow \frac{C}{25} = \frac{C \times r \times 16}{1200} \quad \therefore r = 3\%$

55. Los 7/12 de un capital colocado al 2% bimestral producen anualmente S/.480 menos que el resto colocado al 5% trimestral. ¿Cuál es el capital?

Resolución:

Sea el capital: C

$\frac{\frac{5}{12}C \times 20 \times 1}{100} - \frac{\frac{7}{12}C \times 12 \times 1}{100} = 480 \Rightarrow \frac{\frac{16}{12}C}{100} = 480$

$\Rightarrow \frac{4}{3}C = 480 \times 100 \quad \therefore C = S/.36\,000$

56. ¿Qué interés produce un capital de S/.6000 impuestos al 10% en un año?

Resolución:

C = S/.6000; r = 10%; t = 1 año

$\Rightarrow I = \frac{6000 \times 10 \times 1}{100} \quad \therefore I = S/.600$

57. ¿Durante cuántos años se deben colocar S/.4000 a 20%, para que produzca S/.800?

Resolución:

C = S/.4000; r = 20%; t = t años; I = S/.800

$800 = \frac{4000 \times 20 \times t}{100} \Rightarrow 800 = 800t \quad \therefore t = 1$ año

58. ¿A qué tasa bimestral hay que prestar S/.6400 para que en 6 meses produzca S/.384?

Resolución:

C = S/.6400; r = r% bim. × 6 <> 6r%

t = 6 meses; I = S/.384

$384 = \frac{6400 \times 6r \times 6}{1200} \Rightarrow 384 = 192r \quad \therefore r = 2\%$

59. ¿Cuál será el monto que se obtiene al colocar S/.5000 al 10% trimestral durante 2 años?

Resolución:

C= S/.5000; r = 10% trim. × 4 <> 40%

t = 2 años; M = M

$M = \frac{5000(100 + 80)}{10} \Rightarrow M = 50(180)$

$\therefore$ M= S/.9000

60. Se tiene un capital C del cual 1/n se impone al 1% de interés simple, los 2/n al 2% los 3/n al 3% y así sucesivamente. Si luego de un año produce un interés total del 59% del capital C. Hallar la suma de cifras de n.

Resolución:

El capital C se ha dividido en k partes:

$\underbrace{\frac{C}{n} + \frac{2C}{n} + \frac{3C}{n} + \ldots + \frac{kC}{n}}_{\text{Suma de las partes}} = \underbrace{C}_{\text{Total}}$

$\Rightarrow 1 + 2 + 3 + \ldots + k = n \Rightarrow \frac{k(k+1)}{2} = n$

Los intereses obtenidos por cada una de las partes son:

$I_1 = 1\%\frac{1}{n}C = 1^2\%\frac{C}{n}$

$I_2 = 2\%\frac{2}{n}C = 2^2\%\frac{C}{n}$

$I_3 = 3\%\left(\frac{3}{n}\right)C = 3^2\%\frac{C}{n}$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$I_k = k\%\left(\frac{k}{n}\right)C = k^2\%\frac{C}{n}$

Interés total:

$I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_k = 59\%C$

$\Rightarrow (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2)\%\frac{C}{n} = 59\%C$

$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = 59n = \frac{59k(k+1)}{2}$

$\Rightarrow 2k + 1 = 177 \Rightarrow k = 88$

Luego: $n = \frac{88 \times 89}{2} = 3916$

$\therefore$ Sumas de cifras: 3 + 9 + 1 + 6 = 19

61. ¿Cuál fue el capital que se depositó hace tres años, para que se haya convertido en S/.3 525 000, si se depositó a un interés del 51% capitalizable trimestralmente?

Resolución:

5% anual < > 12,75% trimestral

3 años < > 12 trimestres

Se capitaliza trimestralmente:

Monto = $C(1 + 12{,}75\%)^{12}$ = 3 525 000

$\therefore$ C = S/.835 110,16

62. Un mayorista se presta de un banco 4500 para comprar productos, a un interés simple de 8% anual durante 1,5 años. Compra 200 productos y los vende a $75 cada uno durante 8 meses; sus gastos totales fueron del orden de $50 000. Luego decide pagar al banco para no tener deuda, ¿cuál fue la utilidad neta del mayorista?

Resolución:

Se presta $4500 a interés simple del 8% y decide pagar a los 8 meses.

$$\text{Monto a pagar} = 4500\left[1 + 8\%\left(\frac{8}{12}\right)\right] = \$4740$$

La utilidad inicial que recibe por la venta de sus productos cubre su gasto y el pago al banco:

$$\text{Recibe de las ventas} = \text{gastos} + \text{pago al banco} + \text{utilidad neta}$$

$\Rightarrow$ 200(75) = 5000 + 4740 + utilidad neta

$\therefore$ Utilidad neta = \$5260

63. Al depositar S/.1000 a interés compuesto capitalizable trimestralmente, la tasa nominal del banco es 12% ¿cuánto de interés (I), en soles, se ganará si se deposita por 18 meses?

Resolución:

Tasa nominal = 12% anual <> 3% trimestral
Se capitaliza trimestralmente durante:
18 meses <> 6 trimestres
$M = 1000(1 + 3\%)^6 \approx 1194$
Interés: $I = 1194 - 1000 = 194$ $\quad\therefore I = S/.194$

64. Un capital se impone al 20% anual, durante 3 años, de manera que al término de cada año se reciben los intereses pero la mitad de ellos se suma al capital anterior. Si al término del tercer año se recibió un total S/.290 400, ¿cuál fue el capital inicial?

Resolución:

Sea C el capital impuesto al 20%
Primer año: $I_1 = 20\%C$
La mitad de este interés se suma al capital:

$$C + \frac{1}{2}(20\%C) = 110\%C$$

Segundo año: $I_2 = 20\%(110\%C)$
Se repite el proceso anterior:

$$110\%C + \frac{1}{2}[20\%(110\%C)] = 110\%(110\%C) = (110\%)^2C$$

Tercer año: $I_3 = 20\%(110\%)^2C$
Como al terminar este año se retira el monto, se tendrá:
Monto = (110%)2C + 20%(110%)2C
290 400 = 120%(110%)2C
$\therefore$ C = S/.200 000

65. Hallar el capital que prestado al 20% anual, con capitalización semestral durante un año produce un interés de S/.1008.

Resolución:

Capitalización semestral
20% anual <> 10% semestral
1 año <> 2 semestres
$I = C[(1 + 10\%)^2 - 1] \Rightarrow 1008 = 0{,}21C$
$\therefore$ C = S/.4800

66. Una persona al recibir su liquidación opta por depositarla en 3 instituciones financieras; los 4/9 en un banco; los 2/5 del resto en una mutual y el restante en una caja municipal, de modo que en 5 años producen montos iguales. ¿Cuál es la tasa anual que paga la caja municipal?
Datos: La tasa del banco y la mutual suman 27,5%

Resolución:

Liquidación: 45C
Banco: $\frac{4}{9}(45C) = 20C$; Mutual: $\frac{2}{q}(25C) = 10C$;
Caja: 15C
En 5 años montos iguales:

$$M_1 = 20C + \frac{(20C)r_1 \times 5}{100} = 20C + C \times r1$$

$$M_2 = 10C + \frac{(10C)r_2 \times 5}{100} = 10C + \frac{C \times r_2}{2}$$

$$M_3 = 15C + \frac{(15C)r_3 \times 5}{100} = 15C + \frac{3 \times C \times r_3}{4}$$

$$\Rightarrow M_1 = M_2 \Rightarrow 20C + C \times r_1 = 10C + \frac{C \times r_2}{2}$$

$20\% = r_2 - 2r_1$
Dato: $r_1 + r_2 = 27{,}5\% \Rightarrow r_1 = 2{,}5\%$, $r_2 = 25\%$

$$\Rightarrow M_2 = M_3 \Rightarrow 10C + \frac{25C}{2} = 15C + \frac{3}{4}C \times r_3$$

$\therefore r_3 = 10\%$

67. Dos bancos A y B ofrecen tasas del 5% mensual y 16% trimestral, respectivamente, si en ambos bancos se depositan igual cantidad de dinero, pero en el segundo banco se deposita el 11 de septiembre del 2011 para retirar el 10 de marzo del 2012, y en esta fecha también se desea retirar el mismo monto obtenido en el primer banco, calcular la fecha en que se depositó en este banco.

Resolución:

Banco A: 5% mensual <> 60% anual
Banco B: 16% trimestral <> 64% anual
El capital impuesto es el mismo, se debe obtener el mismo monto por lo tanto los intereses son iguales.
Para el 2.° banco:
Deposita 11 septiembre – Retira 10 marzo
30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 27 = 180 días

$$\Rightarrow I_1 = I_2 \Rightarrow \frac{C \times 60 \times t_1}{36\,000} = \frac{C \times 64 \times 180}{36\,000}$$

$\Rightarrow t_1 = 192$ días
Como del 1 de septiembre se han contado 180 días, 12 días antes se tendrá:
$\therefore$ 11 septiembre – 12 días = 30 agosto

68. Un banco comercial ofrece tasas variables por trimestre, según la tabla:

Trimestres	Tasa anual (%)
Enero - Marzo	4
Abril - Junio	6
Julio - Setiembre	8
Octubre – Diciembre	2

Si un ahorrista deposita A soles el primer de abril y gana S/.113,$\hat{3}$ al retirar su depósito el último día de agosto, hallar el valor de A.

Resolución:

Según la tabla, por los meses de abril, mayo y junio tendrá una tasa del 6%:

$I_1 = \dfrac{A \times 6 \times 3}{1200} = \dfrac{18A}{1200}$

Por los meses de julio y agosto tendrá una tasa de 18%:

$I_2 = \dfrac{A \times 8 \times 2}{1200} = \dfrac{16A}{1200} \Rightarrow I_1 + I_2 = \dfrac{34A}{1200} = 113,\hat{3}$

$\therefore$ A = S/.4000

69. Se presta un capital a interés simple y al cabo de "m" meses el interés ganado es el a% del monto. Hallar la tasa semestral.

Resolución:

Después de m meses: I = a%M = a%(C + I)

$\Rightarrow$ (100 − a)%I = a%C

$\Rightarrow I = \dfrac{a}{100 - a}C = \dfrac{C \times r \times m}{1200}$

Tasa anual: $r = \dfrac{1200a}{m(100 - a)}$

$\therefore$ Tasa semestral: $\dfrac{r}{2} = \dfrac{600a}{m(100 - a)}$

70. Si los 5/8 de un capital se imponen al 30% anual y el resto al 20% anual se produciría anualmente 1800 soles más que sí los 5/8 del capital se impusiera al 20% anual y el resto al 30% anual. Hallar dicho capital en soles.

Resolución:

Sea el capital: C = 8n

Primera inversión:

$I_1 = \dfrac{5/8(8n)30 \times 1}{100} = 150\%n$

$I_2 = \dfrac{3/8(8n)20 \times 1}{100} = 60\%n$

$\Rightarrow I_1 + I_2 = 210\%n$

Segunda inversión:

$I'_1 = \dfrac{5/8(8n)20 \times 1}{100} = 100\%n$

$I'_2 = \dfrac{3/8(8n)30 \times 1}{100} = 90\%n$

$\Rightarrow I'_1 + I'_2 = 190\%n$

Dato: 210% − 190%n = 1800 $\Rightarrow$ n = 9000

$\therefore$ C = S/.72 000

71. Calcular la tasa de interés simple equivalente al interés compuesto del 6% durante 12 años, en función a un capital C.

Resolución:

$M = C\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t;\ I = C\left[\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t - 1\right]$

Para: r = 6, t = 12

$I = C\left[\left(1 + \frac{6}{100}\right)^{12} - 1\right] = 1,0122C$

El interés en 1 año será:

$I_{(1\ \text{año})} = \dfrac{1,0122}{12}C = 0,08435C \Rightarrow I_{(1\ \text{año})} = 8,4355\%C$

Pero: 8,4355%C = C × r%(1) $\therefore$ r = 8,4355%

72. Si un capital se duplicase y la tasa de interés se triplicase, el interés en el mismo tiempo sería 2000 soles mayor ¿Cuál era el interés primitivo? (en soles)

Resolución:

Inicialmente: C, r, t

$I_1 = \dfrac{C \times r \times t}{100}$

Luego: 2C, 3r, t

$I_2 = \dfrac{2C \times 3r \times t}{100} = 6 \times \dfrac{C \times r \times t}{100} = 6I_1$

Se conoce que: $I_2 - I_1 = 2000$

$\therefore$ i_1 = S/.400

73. Se deposita un capital C durante un año en un banco que paga un interés del 8% anual capitalizable semestralmente, el interés obtenido se deposita en otro banco el cual paga un interés del 10% anual capitalizable semestralmente. Si el interés obtenido en el segundo año fue de S/.5227,5. Hallar el capital C.

Resolución:

Primer banco:

Capitaliza semestralmente

8% anual <> 4% semestral

1 año <> 2 semestres

$I_1 = C[(1 + 4\%)^2 - 1] = 8,16\%C$

Segundo banco:

Capitaliza semestralmente

10% anual <> 5% semestral

1 año <> 2 semestres

$I_2 = (8,16\%C)\,[(1 + 5\%)^2 - 1]$

5227,5 = (8,16%C)(0,1025)

$\therefore$ C = S/.625 000

74. La tasa en un banco cambia cada mes, al inicio es 10%, luego se incrementa a 11%; 12%; 13%; así sucesivamente. Si la capitalización es mensual, ¿cuál es la tasa efectiva trimestral?

Resolución:

Sea C el capital depositado.

Primer mes: C + 10%C

Nuevo capital = 110%C

Segundo mes: 110%C + 11%(110%C)

Nuevo capital = 111%(100%C)

Tercer mes: 112% (111%(110%C))

Nuevo capital = 136,752%C

En el primer trimestre se está ganando 36,752%C

$\therefore$ Tasa efectiva trimestral = 36,752%

75. Se deposita S/.1 000 000 en una cuenta que capitaliza trimestralmente al 50% anual. Después de un cierto número de años el monto de la cuenta es S/.27 056 439. Calcular el tiempo transcurrido en el que se cumplen las condiciones.

Resolución:

50% anual <> 12,5% trimestral

Monto = 1 000 000(1 + 12,5%)n

Donde n: número de trimestres

$\Rightarrow 27\,056\,439 = 1\,000\,000(1,125)^n$

$\Rightarrow 27,056439 = 1,125^n$

Tomando logaritmos: log(27,056439) = nlog(1,125)

$\Rightarrow n = \dfrac{\log(27,056439)}{\log(1,125)}$

n = 28 trimestres <> 7 años

$\therefore$ t = 7 años

76. Una persona obtiene de un banco un préstamo de 10 000 dólares con 5% de interés capitalizable semestralmente para pagarlo en tres años. Al fin del primer año paga 2000 dólares más los intereses, al segundo año 3000 dólares más los intereses producidos. Al final del tercer año solo tiene 4000 dólares. ¿Cuánto debe al banco?

Resolución:

Primer año:

El préstamo ha generado un interés I_1, pero la persona paga I_1 y 2000 dólares, debe:

$(10\,000 + I_1) - (2000 + I_1) = 8000$

Segundo año:

$(8000 + I_2) - (3000 + I_2) = 5000$

Tercer año:

Su deuda sería: $5000\left(1 + \dfrac{5\%}{2}\right)^2 = 5253,125$

Como solo dispone de $4000

$\therefore$ Debe al banco: 5253,125 − 4000 = $1253,13

77. Se ha depositado S/.100 000 en un banco que capitaliza los intereses anualmente. Si después de seis años el monto del depósito es S/.11 390 625. Hallar la tasa de interés por año.

Resolución:

Capitalización anual, después de 6 años:

$11\,390\,625 = 100\,000(1 + r\%)^6$

$\Rightarrow 15^6 = 10^6(1 + r\%)^6 \Rightarrow 15 = 10(1 + r\%)$

$\Rightarrow 1,5 = 1 + \dfrac{r}{100}\ r = 50$

$\therefore$ La tasa de interés por año: 50% anual

78. Una persona deposita $1000 en un banco cuyo interés es del 5% anual capitalizable semestralmente durante dos años. ¿Qué porcentaje gana al final del período?

Resolución:

Capitaliza semestralmente:

5% anual <> 2,5% semestralmente

2 años <> 4 semestres

$M = C(1 + 2,5\%)^4 = 1,1038C = 110,38\%C$

$\therefore$ Gana = 10,38%C

79. Hace 22 días una empresa obtuvo un crédito bancario por 15 000 soles y a una tasa efectiva anual de 55%. Calcular el importe de los intereses generados hasta hoy.

Resolución:

Tasa efectiva anual 55%, considerando que se capitaliza diariamente:

$1 + 55\% = \left(1 + \dfrac{J}{360}\right)^{360} \Rightarrow J = 43,85\%$

Interés en 22 días:

$15\,000\left[\left(1 + \dfrac{43,85\%}{360}\right)^{22} - 1\right] = 407,16$

$\therefore$ I = S/.407,16

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2001 - I)

Cada año se deposita mil nuevos soles en una cuenta bancaria que produce 5% de interés semestral y con el mismo período de capitalización. ¿Qué capital se tendrá inmediatamente después de haberse efectuado el tercer depósito, en nuevos soles?

A) 3674 B) 4801 C) 3318 D) 6801 E) 3200

Resolución:

Primer año: $C_1 = 1000$

1.er semestre: 105% × 1000 = 1050

$M_1 = 105\% \times 1050$

$M_1 = 1102,5$ (Finalizando el 2.° semestre)

Segundo año: $C_2 = 1102,5 + 1000 = 2102,5$

1.er semestre: 105% × 2102,5 = 2207,63

$M_2 = 105\% \times 2207,63$

$M_2 = 2318$ (Finalizando el 2.° semestre)

Tercer año: $C_3 = 2318 + 1000$

$\therefore C_3 = 3318$

Clave: C

PROBLEMA 2 (UNI 2003 - I)

Juan invierte S/.50 000 a una tasa del 12% de interés simple anual. Al cabo de 3 años, invierte la utilidad a una tasa del 3% de interés simple mensual. Si luego de transcurrido un tiempo t la utilidad de la segunda inversión es el 75% de la utilidad de la primera (en los 3 años), y si no ha retirado la inversión inicial, entonces el monto total asciende a: (en S/.)

A) 98 000 B) 94 000 C) 93 000
D) 81 500 E) 80 500

Resolución:

Los S/.50 000 a una tasa del 12% anual, genera en tres años, la siguiente utilidad:

$$50\,000(12\%)(3) = S/.18\,000$$

Los S/.18 000 a una tasa del 3% mensual, genera en t meses (asumir que tiempo está en meses), una utilidad:

$$18\,000(3\%)t = 540t$$

Por dato: $540t = 75\%(18\,000) \Rightarrow t = 25$ meses

Luego, los S/.50 000 a una tasa del 12% anual (1% mensual), genera en 25 meses una utilidad:

$$50\,000(1\%)(25) = S/.12\,500$$

El monto total: $M = 50\,000 + 18\,000 + 540(25) + 12\,500$

$\therefore$ M = S/.94 000

Clave: B

PROBLEMA 3 (UNI 2005 - I)

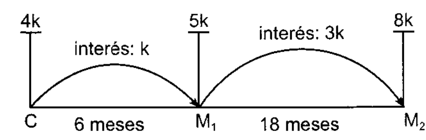
Se prestó un capital durante 6 meses, el interés resultó 20% del monto. ¿Qué porcentaje del monto se producirá en 2 años?

A) 80% B) 60% C) 50%
D) 40% E) 20%

Resolución:

Para este caso recordemos: $M = C + I$

Es conveniente establecer el monto en 6 meses igual a 5k; entonces:



Interés simple DP tiempo.

Luego: El monto en 2 años: 8k

El interés en 2 años: 4k

Entonces, 4k qué tanto por ciento es de 8k.

$\therefore$ 50%

Clave: C

PROBLEMA 4 (UNI 2005 - II)

¿Durante cuánto tiempo estuvo depositado un capital al 12% anual, si los intereses producidos alcanzan al 48% del capital?

A) 5 años y 1 mes B) 5 años
C) 4 años y 8 meses D) 4 años
E) 3 años y 11 meses

Resolución:

Datos: $I = 48\%C$; $r = 12\%$ anual

Por teoría: $I = r \times t \times C$ ...(I)

Donde: I: interés; r: tasa; t: tiempo; C: capital

De (I): $48\%C = 12\% \times t \times C$

$\therefore$ t = 4 años

Clave: D

PROBLEMA 5 (UNI 2006 - I)

Un capital estuvo impuesto al 1% de interés anual. Si se obtuvo un monto después de a años, de A nuevos soles, entonces el valor del capital es (en S/.):

A) $\dfrac{Ata}{100+ta}$ B) $\dfrac{100tA}{100+ta}$ C) $\dfrac{100ta}{100+ta}$

D) $\dfrac{100A}{100+ta}$ E) $\dfrac{100a}{100+ta}$

Resolución:

Con los datos del problema, observamos que se cumple lo siguiente:

$$M = C + I \Rightarrow \frac{C}{100}(100 + t \times a) = A$$

$$\therefore\ C = \frac{A(100)}{(100 + t \times a)}$$

Clave: D

PROBLEMA 6 (UNI 2006 - II)

Una persona dispone de un capital C nuevos soles que lo ha dividido en tres partes para imponerlas al a%, al 2a% y al (2a + 2)%, respectivamente. Sabiendo que todas las partes le producen igual interés, entonces la parte impuesta al 2a% es:

A) $\dfrac{(2a+1)C}{4a+1}$ B) $\dfrac{(2a+1)C}{4a+3}$ C) $\dfrac{(a+1)C}{4a+1}$

D) $\dfrac{(a+1)C}{4a+3}$ E) $\dfrac{(a+1)C}{4a+5}$

Resolución:

De los datos del problema se tiene:

$C = C_1 + C_2 + C_3$

El capital a imponer es C.

Porcentaje de intereses: a%; 2a%; (2a + 2)%

Por condición del problema:

$a\%C_1 = 2a\%C_2 = (2a + 2)\%C_3 = 2a(a + 1)\%k$

$$[2(a + 1) + (a + 1) + a]k = C \Rightarrow k = \frac{C}{4a+3}$$

$$\therefore\ C_2 = \frac{(a+1)C}{4a+3}$$

Clave: D

PROBLEMA 7 (UNI 2010 - II)

El plazo (en meses) al que debe imponerse un capital a una tasa de interés del 10% bimestral, capitalizable cuatrimestralmente, para que se incremente en un 72,8%, es:

A) 3 B) 4 C) 6
D) 9 E) 12

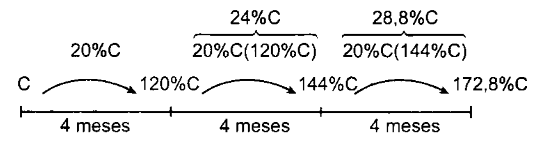
Resolución:

Sea C el capital que se deposita.

Por dato: r = 10% bimestral <> 20% cuatrimestral

Como C es capitalizable cuatrimestralmente, entonces cada 4 meses los intereses se acumulan con el capital.

De forma gráfica:



Inicialmente se tenía C, luego de 12 meses se tiene 172,8%C

∴ El capital se incrementa en 72,8% en 12 meses.

Clave: E

PROBLEMA 8 (UNI 2011 - I)

En la cuenta de ahorros del banco A se remuneran los depósitos con 1,5% de interés anual, libre de mantenimiento, pero no se remuneran los primeros S/.500 de la cuenta.
El banco B paga 1% de interés y cobra S/.1 por mantenimiento en el mismo período. Si Arnaldo, Bernardo, Cernaldo y Dernaldo tienen, respectivamente, S/.1250, S/.2130, S/.4320 y S/.7450, ¿cuántos de ellos deberían depositar su dinero en el banco A para obtener mayor beneficio en un año?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Resolución:

Banco A

	Capital Depositado	Capital considerado (500 menos)	Interés (1,5%)
Arnaldo	1250	750	11,25
Bernaldo	2130	1630	24,45
Cernaldo	4320	3820	57,30
Dernaldo	7450	6950	104,25

Banco B

	Capital Depositado	Interés (1%)	Menos S/.1 de comisión
Arnaldo	1250	12,50	11,25
Bernaldo	2130	21,30	20,30
Cernaldo	4320	43,20	42,20
Dernaldo	7450	74,50	73,50

∴ Los que obtiene mayor beneficio en el banco A son los tres últimos.

Clave: D

PROBLEMA 9 (UNI 2014 - I)

Una persona dispone de cierto capital, el cual es dividido en dos partes. La mayor parte la impone al 14% anual y la otra parte al 8% semestral. Si al cabo de un año los montos obtenidos son iguales, determine el capital inicial, sabiendo que las partes se diferencian en 1200. Todas las cantidades están en nuevos soles.

A) 128 000 B) 132 000 C) 136 000
D) 138 000 E) 140 000

Resolución:

Capital: $C = A + B,\ A > B$

Por dato: $A - B = 1200$

Además:

Capital:	A	B
Tasa:	14%	16%
Tiempo:	1 año	1 año

Dato: $M_A = M_B \Rightarrow A(1 + 14\%) = B(1 + 16\%)$

$$\frac{A}{B} = \frac{116\%}{114\%} = \frac{58}{57} \Rightarrow \begin{matrix} A = 58 \times 1200 \\ B = 57 \times 1200 \end{matrix}$$

∴ $A + B = 115 \times 1200 = 138\,000$

Clave: D

PROBLEMA 10 (UNI 2014 - II)

Dos capitales han sido colocados a interés simple durante el mismo tiempo; el primero al 6% y el segundo al 10%. El primero ha producido S/.825 y el segundo ha producido S/.1850, sabiendo que el segundo capital excede al primero en S/.7125. Calcule la suma de los montos obtenidos (en nuevos soles).

A) 48 375 B) 51 050 C) 52 110
D) 53 030 E) 54 100

Resolución:

Tenemos:

r% = 6%	r% = 10%
C = S/.N	C = S/.(N + 7125)
I = S/ 825	I = S/.1850
t = años	t = años

Donde: $1850 = (N + 7125)10\% \times t$
$825 = N \times 6\% \times t$

Dividimos y simplificamos las ecuaciones:

$$\frac{37}{55} = \frac{N + 7125}{2N}$$

$\Rightarrow 74N = 55N + 55 \times 7125 \Rightarrow 19N = 55 \times 7125$

$\Rightarrow N = 55 \times 375 = 20\,625$

Piden suma de montos

$M_1 = 20\,625 + 825 = 21\,450$

$M_2 = 27\,750 + 1850 = 29\,600$

∴ $M_1 + M_2 = 51\,050$

Clave: B

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Se tienen 2 capitales, donde el segundo es el doble que el primero; el primero produce un monto de S/.22 500 en 12 años 6 meses y el segundo un monto de S/.40 000 en 10 años, los 2 a la misma tasa de interés. Hallar la tasa de interés.

   A) 12% B) 20% C) 10%
   D) 15% E) 18%

2. Martín tenía impuesto un capital al 8% y no siendo suficiente los intereses para cubrir sus gastos, impuso su capital en una industria que le da el 10%. De esta manera ha podido aumentar sus gastos diarios en 2,5 soles.¿Cuál es su capital?

   A) S/.39 000 B) S/.45 000 C) S/.49 500
   D) S/.55 200 E) S/.68 000

3. Ana coloca parte de su dinero en una empresa al 30% y otra parte en una fábrica al 20%. Luego de calcular los intereses, invirtiendo las tasas, obtiene intereses iguales. Se desea saber qué capital ha colocado en la fábrica, sabiendo que produce $500 menos que el colocado a la empresa en un año.

   A) $2000 B) $3200 C) $4200
   D) $5400 E) $6450

4. Calcular el interés producido por un capital de S/.N al cabo de cierto tiempo impuesto al 30%. Si se sabe que impuesto al 95% produce S/.44 590 más que impuesto al 80% durante el mismo tiempo.

   A) S/.19 650 B) S/.19 660 C) S/.19 670
   D) S/.19 680 E) S/.19 690

5. Una persona tiene S/.16 000 que lo presta al 8% trimestral y otra tiene S/.20 000 que lo presta al 8% cuatrimestral. ¿Dentro de cuánto tiempo los montos serán iguales?

   A) 10,5 años B) 11,5 años C) 12,5 años
   D) 18,5 años E) 20 años

6. Dos capitales impuestos a interés simple: uno al 24% y el otro al 20% están en la relación de 5 a 7. El segundo capital produce un interés anual de S/.2420 más que el otro. Calcular el menor capital.

   A) S/.12 670 B) S/.90 500
   C) S/.12 270 D) S/.45 800
   E) S/.60 500

7. Una persona ha impuesto S/.10 000 a interés simple, si hubiera estado 30 días más, el interés habría aumentado en S/.50 y si el tanto por ciento hubiera disminuido en 0,8% los intereses habrían disminuido en S/.150. Hallar el tiempo que duró la imposición.

   A) 600 d B) 615 d C) 645 d
   D) 675 d E) 685 d

8. Un señor divide su capital en 3 partes iguales y los impone al 1% mensual, 5% trimestral y 4% semestral, respectivamente, logrando una renta anual de S/.10 000. ¿Cuál era su capital?

   A) S/.29 000 B) S/.75 000 C) S/.62 000
   D) S/.32 000 E) S/.45 000

9. Los 2/3 de un capital se imponen al 6% anual, los 3/4 del resto al 1,5% bimestral y el resto al 1% mensual. Si al cabo de 2 años 1 mes, se recibe en total S/.8287,5, ¿cuál era el capital original?

   A) S/.7200 B) S/.4500 C) S/.4800
   D) S/.5000 E) S/.5100

10. En una entidad bancaria, los intereses se calculan del siguiente modo: por el millar se da el 30% bianual y por el restante el 4,5% semestral. ¿Qué utilidad habrá generado S/.20 800 en el lapso de un año?

    A) S/.1932 B) S/.1742 C) S/.1652
    D) S/.1562 E) S/.1872

11. Un usurero vive de los intereses que produce su capital impuesto al 5%. Al final de cada año retira los intereses para cubrir sus gastos; pero, al final del octavo año además de los intereses retira $200 de su capital. Al hacer sus cuentas al finalizar el noveno año obtiene como gasto total $8650. ¿Cuál fue su capital?

    A) $16 000 B) $18 800 C) $24 000
    D) $26 200 E) $32 010

12. Se colocan 3 capitales a interés simple durante 5 años y se convierten, respectivamente, en: S/.15 840; S/.14 520 y S/.12 480. Hallar el mayor capital, sabiendo que suman S/.37 500.

    A) S/.12 300 B) S/.14 100 C) S/.15 200
    D) S/.13 600 E) S/.13 200

13. Después de prestar un capital por 3 años se obtiene un monto igual al triple del capital prestado. Al prestar S/.3000, a la misma tasa de interés por un año y 3 meses, ¿cuál será el interés a recibir?

    A) S/.3000 B) S/.2850 C) S/.2750
    D) S/.2500 E) S/.2250

14. La relación de los montos generados por 2 capitales es de 2 a 3, siendo su relación de tiempos de 1 a 3 respectivamente. Si el primero se colocó al 9% y el segundo al 0,25% mensual, ¿en qué relación

se encuentran, la suma y diferencia de cuadrados de dichos capitales?

A) 2:3 B) 9:4 C) 4:9
D) 5:3 E) 13:5

15. Hallar un capital, tal que al imponer sus 5/11 al 6% y el resto al 5%, retira anualmente $80 menos que si los 5/11 los colocara al 5% y el resto al 6%.

A) $80 000 B) $88 000 C) $90 000
D) $98 000 E) $99 000

16. Se imponen 2 capitales al 5% durante 10 años; si la diferencia de ellos es $4000 y la suma de los intereses es $14 000, hallar el mayor de los capitales.

A) $13 000 B) $21 000 C) $17 500
D) $16 000 E) $25 000

17. Una persona impuso la cuarta parte de su capital al 4% durante 5 años y el resto al 5% durante 6 años. La suma de los intereses producidos es igual a la ganancia que hubiera producido un capital de S/.6446 al 6% durante 4 años. ¿Cuál es el capital impuesto por esa persona?

A) S/.1036,6 B) S/.1406,2 C) S/.5625,6
D) S/.1040,5 E) S/.2812,8

18. Un capital al cabo de cierto tiempo produce un interés, en el cual se observa que la diferencia entre el capital y el interés equivale al 42% de dicho capital. ¿Qué interés produce un capital de S/.30 000 en la tercera parte del tiempo anterior y con una tasa 50% menor?

A) S/.2900 B) S/.3700 C) S/.4500
D) S/.7220 E) S/.4720

19. La tercera parte de un capital se coloca al 9% anual de interés simple. ¿A qué tanto por ciento deberá colocarse el resto para obtener un beneficio total del 11% anual de dicho capital?

A) 10% B) 12% C) 15%
D) 13% E) 14%

20. El monto de un capital impuesto durante 8 años es S/.12 400. Si el mismo capital, se hubiera impuesto al mismo rédito durante 9 años 6 meses, el monto sería S/.12 772. ¿Cuál es el capital?

A) S/.11 080 B) S/.10 416 C) S/.9896
D) S/.10 226 E) N. A.

21. Se prestó un capital por 3 años y el monto fue S/.51 000. Si se hubiera prestado por 5 años, se recibiría en total S/.75 000. ¿Cuál fue la tasa semestral?

A) 20% B) 80% C) 40%
D) 50% E) 16%

22. Los 2/5 de un capital se han prestado al 1,5% bimestral durante 5 meses; los 3/8 del capital se han prestado al 0,25% trimestral durante medio año y el resto del capital se ha prestado a una tasa de interés, tal que en un año y medio ha generado un interés que es igual a la suma de los otros 2 intereses, obtenidos. Determinar dicha tasa de interés.

A) 5% B) 6% C) 7% D) 10% E) 8%

23. Un capital impuesto al 15% trimestral de interés simple produce de interés anualmente S/.3000 más que si se impusiese al 55% anual. ¿Cuál es dicho capital?

A) S/.40 000 B) S/.30 000 C) S/.50 000
D) S/.60 000 E) S/.20 000

24. Si a un capital se le suma los intereses producidos en 26 meses se obtiene un número que es al capital prestado como 63 a 50. ¿A qué tasa fue colocado?

A) 9% B) 10% C) 12%
D) 15% E) 18%

25. Elmer se prestó S/.5000 al 15% trimestral pero acordando pagar el interés cada cuatro meses con respecto al saldo deudor de cada cuatrimestre. Al final del primer cuatrimestre amortizó S/.1500 (incluido interés y parte de la deuda); el segundo cuatrimestre no amortizó nada; el tercer y cuarto cuatrimestre amortizó cantidades que están en la relación de 2 a 3, respectivamente, terminando así de cancelar su deuda. ¿Cuánto amortizó en el tercer cuatrimestre?

A) S/.1440 B) S/.2600 C) S/.2840
D) S/.2880 E) N. A.

26. Se observa que si al depositar un capital en un banco durante 3 años a una tasa del 5% bimestral capitalizable anualmente, se obtiene S/.6060 menos que si se prestara a una persona que paga una tasa del 50% anual durante el mismo tiempo a interés simple. Dar como respuesta la suma de cifras del capital.

A) 6 B) 7 C) 2 D) 3 E) 5

27. Al depositar un capital durante 1 año y medio con capitalización semestral, se ganó el 72,8% del capital. Calcular el monto que se obtendrá si estuviera depositado a la misma tasa y tiempo otro capital que produce S/.900 a interés simple.

A) S/.3000 B) S/.2400 C) S/.3900
D) S/.4200 E) S/.4500

28. Al depositar un capital durante 9 meses se obtiene un monto de S/.4130 y si se impone durante 1 año y un mes se obtendría por todo S/.4410. Calcular la tasa anual al cual se ha impuesto dicho capital.

A) 24% B) 25% C) 30%
D) 20% E) N. A.

29. Si un capital se presta al 20%, ¿cuántos más que para duplicarse, requiere para triplicarse (interés simple)?

A) 2 años B) 3 años C) 4 años
E) 5 años E) N. A.

30. Hace 8 meses se impuso cierto capital y actualmente su monto es 4650. Si dentro de un año el monto será 4875, ¿cuál fue el rédito al que fue impuesto dicho capital?

A) 5% B) 8% C) 10% D) 7% E) 12%

31. Los 3/7 de un capital colocado al 3% produce anualmente 420 soles menos que el resto colocado al 4%. ¿Cuál es el capital?

A) 28 000 B) 63 000 C) 40 000
D) 56 000 E) 42 000

32. Se impone un capital a un determinado rédito y en 9 meses produce un interés que es el 30% del monto. Durante cuántos meses debe prestarse dicho capital para que al mismo rédito produzca un interés igual al 40% del monto.

A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

33. Un capital se presta al 50%, ¿en qué tiempo produce el 25% del monto?

A) 6 meses B) 8 meses C) 10 meses
D) 11 meses E) 1 año

34. La diferencia de dos capitales es S/.1500; si se impone uno al 8% y el otro al 4% anual al cabo de 18 meses los montos son iguales. ¿Cuál es el capital mayor?

A) S/.26 500 B) S/.28 000 C) S/.32 000
D) S/.24 500 E) S/.32 250

35. Después de cuánto tiempo un capital colocado al 30% anual simple se triplica.

A) 6 años, 8 meses B) 7 años, 4 meses
C) 5 años, 2 meses D) 4 años, 3 meses
E) 4 años, 5 meses

36. El monto de un capital a los 8 meses es S/.4320, y al año 8 meses será S/.4800. ¿Cuál fue el rédito al que fue impuesto el capital?

A) 5% B) 10% C) 12%
D) 16% E) 8%

37. El interés obtenido por un capital es equivalente a los 7/31 del monto. ¿Qué interés se obtiene si se presta S/.4000 en un tiempo triple del anterior y a la misma tasa?

A) S/.3400 B) S/.3600 C) S/.3700
D) S/.3500 E) S/.3800

38. Entre dos hermanos disponen de S/.140 000; el mayor coloca su capital al 7% y el menor al 4%, igualándose sus capitales al cabo de 20 años. ¿Con cuánto se inició el hermano mayor?

A) S/.60 000 B) S/.50 000 C) S/.65 000
D) S/.80 000 E) S/.56 000

39. Durante un número de meses igual al tanto por ciento al que estuvo impuesto un capital aumentó en su tercera parte. ¿Cuál fue el tanto por ciento anual?

A) 25% B) 20% C) 30%
D) 12% E) 45%

40. ¿Qué capital produce mayor interés anual?
I. S/.18 000 al 6% trimestral
II. S/.24 000 al 9% semestral
III. S/.28 800 al 30% bianual

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y II E) Igual interés

41. Hallar la tasa de interés trimestral a la que se ha prestado un capital durante 1 año 5 meses y 12 días, de tal manera que el interés producido sea el 29% del capital.

A) 20% B) 40% C) 10%
D) 5% E) 8%

42. A qué tasa de interés trimestral se ha impuesto un capital que en 6 años 3 meses produce un interés que es el 60% del monto.

A) 6% B) 7% C) 8%
D) 9% E) 10%

43. Hallar la tasa de interés anual a la que se debe imponer un capital, para que en 2 años genere un monto que sea el 140% del capital.

A) 16% B) 18% C) 20%
D) 22% E) 24%

44. El 40% de un capital se presta al 30% anual y el resto se presta a una tasa, de manera que ambos capitales para un mismo tiempo producen el mismo interés. Calcular la tasa desconocida.

A) 20% B) 25% C) 30%
D) 45% E) 40%

45. Se han colocado a un mismo tanto por ciento dos capitales, uno de S/.12 000 durante 60 días y otro de S/.8000 durante 30 días. El primer capital ha producido S/.80 más que el segundo. Hállese el tanto por ciento.

A) 4% B) 5% C) 8%
D) 6% E) 10%

46. Frank realiza un préstamo de S/.P a Katy con un interés del 50% cuatrimestral sobre el saldo deudor. Katy después de cada período amortiza S/.800, S/.700; S/.600 y así sucesivamente. Después de 6 periodos, cancela su deuda pagando el último periodo S/. $\frac{P}{4}$. Calcular el valor de P. Dar como respuesta la suma de sus cifras.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 7 E) 9

47. Calcular un capital impuesto al 36% anual durante 2 meses, sabiendo que si se impone al 2% quincenal durante el mismo tiempo producirá S/.900 más de interés.

A) 25 000 B) 35 000 C) 45 000
D) 55 000 E) 65 000

48. Un capital de S/.7200 se divide en 2 partes y se impone a tasas que están en la relación de 25 a 9. Hallar la mayor de las partes sabiendo que al cabo de un tiempo los intereses son IP a sus respectivos capitales.

A) 3000 B) 4500 C) 5000
D) 6000 E) 6500.

49. Se realiza un préstamo de S/.2600 al 10% de interés mensual. Se conviene que cada mes se debe pagar el interés y una cantidad fija P de soles. La sorpresa fue que el sexto mes se cancela el préstamo pagando P soles. Hallar el pago total del préstamo.

A) S/.4160 b) S/.3500 C) S/.3800
D) S/.3200 E) S/.3600

50. ¿A qué tasa anual se debe imponer un capital de S/.1500 para que en un tiempo de 5 años se pueda comprar una refrigeradora de S/.2500 que sube de precio cada año en su 10% sin acumularse?

A) 20% B) 30% C) 40%
D) 50% E) 60%

51. Edy coloca hoy una suma de S/.174 a una tasa del 1,5% mensual, 48 días antes de ello había colocado un capital de 1080 soles al 1,75% mensual. ¿Dentro de cuántos días los intereses producidos por estos capitales serán iguales?

A) 60 B) 80 C) 100 D) 120 E) 200

52. Se impone S/.36 000 en 2 bancos, una parte al 8% y la otra al 6% obteniéndose anualmente S/.2620 de ganancia. Hallar la segunda parte.

A) 13 000 B) 15 000 C) 18 000
D) 16 000 E) 20 000

53. ¿A qué porcentaje debe ser colocado un capital para que, en 3 años 4 meses, produzca un interés equivalente a las $\frac{2}{5}$ del monto?

A) 20% B) 10% C) 15%
D) 25% E) 30%

54. ¿En cuánto se convierte un capital de S/.6200 al colocarse en un banco que paga 5% trimestral en un periodo de 2 años y 6 meses?

A) S/.6300 B) S/.6000 C) S/.9300
D) S/.9000 E) S/.8400

55. Un capital se ha dividido en tres partes A, B y C directamente proporcional a los números 9, 10 y 11 respectivamente. ¿En qué relación tendrían que estar las tasas de estos tres capitales, para que en un año el interés de B sea el doble del de A y el interés de A el triple del de C?

A) 9; 11; 10 B) 18; 10; 11 C) 33; 15; 17
D) 55; 99; 15 E) 66; 75; 30

56. Se coloca un capital al 5% durante un cierto número de años y el capital se duplica. Si colocamos el capital durante un tiempo que es 3 años mayor que el anterior, ¿qué interés producirá respecto al capital?

A) 110% B) 115% C) 120%
D) 125% E) 130%

57. Dos capitales son como 4 es a 7. El primero se colocó al 30 por 75 durante 10 meses y el segundo al 35 por 70 durante 6 meses. Si el monto fue S/.338 000, ¿cuál fue el capital inicial total?

A) S/.426 000 B) S/.264 000
C) S/.564 000 D) S/.346 000
E) S/.624 000

58. En cierto banco, los intereses de los ahorros se pagan de la siguiente manera: 4% anual por los primeros S/.3000; 4,5% anual por lo que exceda hasta S/.5000; 5% anual por lo que exceda hasta S/.8000 y 5,5% por lo que exceda a S/.8000. Si en uno ganó S/.437 de interés, ¿qué cantidad se depositó?

A) S/.7600 B) S/.7500 C) S/.8600
D) S/.9400 E) S/.9800

59. Un anciano repartió su herencia entre sus dos sirvientes proporcionalmente a sus años de servicio que son 18 y 20 años, e inversamente proporcional a sus edades. 26 y 36 años, respectivamente. Si el mayor depositó su parte en un banco al 8% cuatrimestral durante 5 meses, recibiendo al final un monto de S/.7150. Determinar la herencia.

A) S/.14 000 B) S/.12 000 C) S/.14 600
D) S/.15 400 E) S/.16 400

60. Un capital impuesto al 20% bianual capitalizable cada año produce en 3 años un interés de 1655 soles. Calcule el mencionado capital.

A) S/.5000 B) S/.5250 C) S/.5370
D) S/.5400 E) S/.5405

61. El monto producido por un capital depositado al 15% durante 5 meses, es tal que si su quinta parte se impusiera al 12% generaría en 2 meses S/.17. Determinar dicho capital.

A) S/.2000 B) S/.4000 C) S/.5000
D) S/.6000 E) S/.8000

62. El monto de un capital que está durante cierto tiempo al 15% es de S/.3850. Si en ese tiempo hubiera estado bajo una tasa del 27% anual, el monto sería de 4130. Hallar dicho capital.

A) S/.3500 B) S/.3400 C) S/.3200
D) S/.3300 E) S/.3600

63. Un capital se ha dividido en otros tres que son como 3, 5 y 7. Al 1.°, se le aumenta en su 10%, al 2.° en su 20% y al 3° en su 35%. ¿Qué porcentaje del nuevo total representa el nuevo capital menor?

A) 14,6% B) 16,7% C) 15,7%
D) 17,5% E) 17,6%

64. Un capital de S/.70 000 estuvo impuesto durante un cierto número de años, meses y días; por los años se pagó el 32%; por lo meses, 30% y por los días el 24%. Calcular el interés producido por dicho capital, sabiendo que si se hubiera tenido impuesto todo el tiempo al 8% habría producido S/.4725 más que si se hubiera tenido impuesto todo el tiempo al 6%.

A) S/.69 400 B) S/.74 900 C) S/.78 560
D) S/.74 540 E) S/.71 280

65. Alberto pide prestado a Sofía, cierta suma y este accede; pero con el fin de ganar el 20% de su capital le dice: "Me pagarás S/.2400 al final del primer año, y a parte del siguiente año me pagarás 10% más que el año anterior, quedando saldada su cuenta al cabo de 5 años". Alberto acepta y deposita una parte del dinero en un banco al 30% de interés simple y luego de 3 años ganaría un interés igual a la cantidad que desea ganar Sofía. ¿Cuál es esa parte?

A) S/.1987,16 B) S/.2712 C) S/.2713,3
D) S/.2468 E) S/.3548,5

66. Un padre coloca su dinero en un banco que paga una tasa del 20% con capitalización bimestral, retira todo a los 6 meses y reparte el 25% de lo que ganó entre sus 3 hijos en forma DP a sus edades que son: 15; 9 ; 18 años, respectivamente. Si a los dos mayores juntos les tocó S/ 312 más que al menor, calcular el dinero del padre.

A) S/.2000 B) S/.3000 C) S/.4000
D) S/.6000 E) S/.1500

67. Una persona se presta cierto capital a una tasa del 10% cuatrimestral (sobre el saldo deudor de cada cuatrimestre). Si al cabo del 1.er cuatrimestre, amortizó los $\frac{5}{11}$ de su deuda y 8 meses después pagó S/.1452 liberándose así de su deuda, ¿cuánto era el capital prestado?

A) 2040 B) 2100 C) 2000
D) 2300 E) 2500

68. Juan invierte S/.50 000 a una tasa del 12% de interés simple anual. Al cabo de 3 años, invierte la utilidad a una tasa del 3% de interés simple mensual. Si luego de transcurrido un tiempo "t" la utilidad de la segunda impresión es el 75% de la utilidad de la primera (en los 3 años) , y si no ha retirado la inversión inicial, entonces el monto total asciende a: (en S/.)

A) 98 000 B) 94 000 C) 93 000
D) 81 500 E) 80 500

69. Un banco realiza la siguiente promoción a sus clientes: Por cada sol que se deposite en el banco, este multiplicará su dinero por "n", luego de un año; "Isla" que es un cliente animado por sensacional oferta deposita un capital y luego de finalizado el año decide reinvertir el monto total; esta operación la hace durante muchos años, al final decide retirar todo lo que invirtió más los intereses dándose con la sorpresa que la suma de lo que invirtió al inicio y lo que retiró del banco era:
$\overline{(n+1)(n+1)(n+3)(n+3)(n+2)(n+2)(n+1)(n+1)}$
veces el capital que invirtió. Hallar la suma del tiempo que estuvo el dinero en el banco y "n".

A) 22 B) 24 C) 25 D) 27 E) 30

70. Hallar el monto que se obtiene al colocar un capital de 4000 al 2% trimestral durante 4 años, si se aplica capitalización continua.

A) $4000ee^{\frac{2}{100}}$ B) $4000e^{\frac{8}{100}}$ C) $4000e^{\frac{8}{25}}$
D) $4000e^{\frac{1}{20}}$ E) $4000e^{4}$

71. Calcular el interés obtenido al depositar un capital de S/.1000, durante un año a una tasa de 20%, si el interés es continuo.

A) S/.1221,40 B) S/.1200 C) S/.200
D) S/.221,40 E) S/.250

72. Lolo impone su capital al 80% anual capitalizable trimestralmente. Se observa que el interés en los 2 últimos periodos es S/.223 280. Calcule el mínimo capital (si es par) y el tiempo que impuso su capital

A) S/.156 250 y 1 año 9 meses
B) S/.390 625 y 2 años
C) S/.468 750 y 1 año 3 meses
D) S/.781 250 y 2 años
E) S/.562 500 y 1 año 6 meses

73. Tito deposita durante un año cierta cantidad de dinero en un banco que paga 8% anual capitalizable semestralmente, el monto obtenido se deposita otro año más pero en otro banco que paga 10% anual capitalizable semestralmente. Si al final del segundo año, el monto recibido fue de S/.298 116. Hallar la suma de cifras del capital inicial.

A) 27 B) 17 C) 12
D) 7 E) 5

74. Edy divide su capital en partes proporcionales a 1; 3; 5; 7; ... imponiéndolos por separado durante 1; 3; 9 ; 27; ... meses, todos ellos al 12% cuatrimestral, obteniéndose una renta total de S/.413 352. Calcule el capital de Edy.

A) 24 200 B) 43 200 C) 57 600
D) 19 200 E) 86 400

75. Tito coloca su capital durante "a" años. Si lo coloca al 20% mensual capitalizable cuatrimestralmente en vez de colocarlo al 40% semestral capitalizable trimestralmente; observa que la relación de los montos son como 16 es a 45. Calcular el monto que genera un capital de S/. $\overline{(a+1)(a+2)(3a+2)(a-1)}$ capitalizable, semestralmente, durante el mismo tiempo y al 20% mensual.

A) S/.6016 B) S/.51 012,64
C) S/.8911,36 D) S/.7808
E) S/.4320,32

76. Katy divide su capital en varias partes que son 1; 9; 25; 49; 81; ... soles y cuyos tiempos de permanencia en cierta entidad financiera es de 1; 2; 3; 4; 5; ... meses, respectivamente. Si al sumar los intereses obtenidos resulta S/.5198, 94. Calcular la diferencia entre la mayor y menor cifra de la cantidad en que Katy divide su capital. (La tasa de interés fue de 3% quincenal).

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

77. Un grupo de amigos colocan sus capitales en el banco que son 1; 4; 18; 96; 600; ... soles y cuyos tiempos de permanencia son 3; 8; 30; 144; 840; ... quincenas, respectivamente; si la tasa es de 48% semestral. Al final el monto fue de S/.1 021 102,96, calcular la suma de cifras del interés que genera el capital que estuvo impuesto mayor tiempo.

A) 27 B) 36 C) 15
D) 12 E) 21

78. Ricardo deposita S/.1000 en una entidad financiera que paga $8,\widehat{3}\%$ mensual, con capitalización continua. ¿Cuánto es el interés que este capital genera durante el tercer año? (Considere: e = 2,7).

A) S/.12 393 B) S/.19 683 C) S/.7290
D) S/.33 461,1 E) S/.53 144,1

79. La razón geométrica de la suma del interés del octavo y noveno año y la suma del interés del sexto y séptimo año, generado por un capital C es K. Si se sabe que la capitalización es continua. Determine cuánto es el interés generado en los 4 últimos años, si se retiró todo el dinero a los 10 años.

A) CK^3 B) CK^5 C) $CK^3(K-1)$
D) $CK^5 - CK$ E) $CK^3(K^2-1)$

80. ¿Cuánto dejo de ganar si coloco un capital de S/.20 000 al 3% mensual durante 1 año 3 meses, en vez de colocarlo al 3% mensual durante el mismo tiempo; pero capitalizable en forma continua? (Considere $e^{(9/20)}$= 1,5683).

A) S/.1200 B) S/.2400 C) S/.1300
D) S/.2000 E) S/.2366

CLAVES

1. C	11. B	21. C	31. E	41. D	51. D	61. B	71. D
2. B	12. E	22. A	32. C	42. A	52. A	62. B	72. C
3. A	13. D	23. D	33. B	43. C	53. A	63. E	73. D
4. D	14. E	24. C	34. B	44. A	54. C	64. B	74. D
5. C	15. B	25. D	35. A	45. D	55. D	65. C	75. B
6. E	16. D	26. C	36. C	46. B	56. B	66. B	76. E
7. D	17. C	27. B	37. D	47. C	57. B	67. C	77. B
8. B	18. A	28. A	38. A	48. B	58. D	68. B	78. A
9. A	19. B	29. E	39. B	49. B	59. C	69. D	79. E
10. A	20. B	30. A	40. E	50. B	60. A	70. C	

Regla de descuento

capítulo 15

John Forbes Nash Jr. nació en Bluefield, Virginia Occidental, el 13 de junio de 1928 y murió en Monroe, Nueva Jersey, el 23 de mayo de 2015. Fue un matemático estadounidense, especialista en teoría de juegos, geometría diferencial y ecuaciones en derivadas parciales, que recibió el Premio Nobel de Economía en 1994 por sus aportes a la teoría de juegos y los procesos de negociación, junto a Reinhard Selten y John Harsanyi.

De pequeño fue un niño solitario al que le gustaba mucho leer y jugaba poco con los demás niños de su edad. A los catorce años empezó a mostrar interés por las matemáticas y la química. Entró en el Colegio Bluefield en 1941. En junio de 1945 se matriculó en la actual Universidad Carnegie Mellon para estudiar Ingeniería química. Pero fue su profesor quien, dándose cuenta de su habilidad para las matemáticas, lo convenció para que se especializara en ellas. Tres años más tarde aceptó una beca de la Universidad de Princeton para el doctorado de Matemáticas.

En 1949 escribió un artículo titulado «Puntos de equilibrio en juegos de n–personas», en el que definía el equilibrio de Nash. Con 21 años se doctoró con una tesis de menos de treinta páginas sobre juegos no cooperativos. Sus teorías han influido en las negociaciones comerciales globales, en los avances de la biología evolutiva y en las relaciones laborales nacionales.

Fuente: Wikipedia

DEFINICIÓN

La regla de descuento es una operación que permite calcular el descuento que sufrirá un documento por ser cobrado antes de su vencimiento.

Elementos:

D: descuento.

Vn: valor nominal. (Es la cantidad escrita en el documento).

Va: valor actual. (Es la diferencia entre el valor nominal y el descuento) (Va = Vn – D).

f.g.: fecha de giro. (Es la fecha en la que se emite el documento).

f.d.: fecha de descuento. (Es la fecha en la que se descuenta el documento).

f.v.: fecha de vencimiento.

t: tiempo. (Es el tiempo, que transcurre desde la fecha de descuento a la fecha de vencimiento).

r: tasa de descuento.

CLASES DE DESCUENTO

El descuento que puede sufrir un documento puede ser: descuento comercial y descuento racional.

Descuento comercial (Dc)

Denominado también descuento externo o abusivo. Es el descuento que se le hace a un documento sobre su valor nominal.

El descuento comercial se puede calcular mediante la siguiente expresión:

I. Si el tiempo viene expresado en años:

$$Dc = \frac{Vn \times t \times r}{100}$$

II. Si el tiempo viene expresado en meses:

$$Dc = \frac{Vn \times t \times r}{1200}$$

III. Si el tiempo viene expresado en días:

$$Dc = \frac{Vn \times t \times r}{36\,000}$$

Ejemplo:

El valor nominal de una letra es S/.2100 y es descontada comercialmente al 9% trimestral, 8 meses antes de su vencimiento. Determinar:

a) El descuento comercial

b) El valor actual comercial

Resolución:

Tenemos:

Vn = S/.2100; t = 8 meses;

r = 9% trimestral <> 36% anual

a) Hallamos el descuento comercial:

$$Dc = \frac{2100(8)(36)}{1200} = 504$$

∴ El descuento comercial es S/.504

b) Hallamos el valor actual comercial:

$$Va = 2100 - 504 = S/.1596$$

∴ El valor actual comercial es S/.1596

Descuento racional (Dr)

Denominado también descuento interno o matemático. Es el descuento que se le hace a un documento sobre su valor actual.

Hallamos el descuento racional: $Dr = \frac{Va \times t \times r}{100}$

Pero: Va = Vn – Dr

Reemplazando: $Dr = \frac{(Vn - Dr) \times t \times r}{100}$

$100Dr = Vn \times t \times r - Dr \times t \times r$

$100Dr + Dr \times t \times r = Vn \times t \times r$

$Dr\,(100 + t \times r) = Vn \times t \times r \Rightarrow Dr = \frac{Vn \times t \times r}{100 + tr}$

Luego, el descuento racional viene dado por:

$$Dr = \frac{Vn \times t \times r}{100 + t \times r}$$

El descuento racional se puede calcular mediante la siguiente expresión:

I. Si el tiempo viene expresado en años:

$$Dr = \frac{Vn \times t \times r}{100 + t \times r}$$

II. Si el tiempo viene expresado en meses:

$$Dr = \frac{Vn \times t \times r}{1200 + t \times r}$$

III. Si el tiempo viene expresado en días:

$$Dr = \frac{Vn \times t \times r}{36\,000 + t \times r}$$

Ejemplo:

El valor nominal de una letra es S/.2250 y es descontada racionalmente al 5% trimestral, un año 3 meses antes de su vencimiento. Determinar:

a) El descuento racional

b) El valor actual racional

Resolución:

Tenemos:

Vn = S/. 2250; t = 1 año, 3 meses <> 15 meses

r = 5% trimestral <> 20% anual

a) Hallamos el descuento racional:

$$Dr = \frac{2250(15)(20)}{1200 + (15)(20)} = 450$$

∴ El descuento racional es S/.450

b) Hallamos el valor actual racional:

$Va = 2250 - 450 = 1800$

$\therefore$ El valor actual racional es S/.1800

Nota

I. Si a un mismo documento se le calcula los dos descuentos (comercial y racional). Se cumple:

$$Dc > Dr$$

II. Si para un mismo tiempo y a una determinada tasa de descuento, se conocen los dos descuentos (comercial y racional), el valor nominal del documento viene dado por:

$$Vn = \frac{Dc \times Dr}{Dc - Dr}$$

Ejemplo:
Hallar el valor nominal de un documento, sabiendo que descontadas por un mismo tiempo y a una misma tasa de descuento, se obtuvieron como descuento comercial y racional S/.672 y S/.600, respectivamente.

Resolución:
Tenemos: $Dc = S/.672$ y $Dr = S/.600$
Hallamos el valor nominal del documento:

$$Vn = \frac{672(600)}{672 - 600} = 5600$$

$\therefore$ El valor nominal del documento es S/.5600

III. Las letras L_1 y L_2 son equivalentes (o intercambiables) si estas tienen el mismo valor actual.

$$L_1 \text{ es equivalente a } L_2 \Leftrightarrow Va_1 = Va_2$$

Ejemplo:

Se tienen dos letras, la primera por S/.1800 pagadera a los 5 meses al 24% anual y la segunda por S/.2025 pagadera a los 8 meses al 30% anual. ¿Las letras son equivalentes?

Resolución:

De la primera letra:

$Vn_1 = S/.1800$; $t_1 = 5$ meses; $r_1 = 24\%$ anual

Hallamos el valor actual:

$$Va_1 = 1800 - \frac{1800(5)(24)}{1200} = S/.1620$$

De la segunda letra:

$Vn_2 = S/.2025$; $t_1 = 8$ meses; $r_2 = 30\%$ anual

Hallamos el valor actual:

$$Va_2 = 2025 - \frac{2025(8)(30)}{1200} = S/.1620$$

Como los valores actuales son iguales, ambas letras serán equivalentes.

VENCIMIENTO COMÚN

Es una operación, que consiste en reemplazar dos o más letras de cambio que tienen diferentes vencimientos, por una única letra, cuyo valor nominal sea igual a la suma de los valores nominales de las letras reemplazadas.

Sean las letras: L_1; L_2; L_3; ...; L_n de valores nominales: Vn_1; Vn_2; Vn_3; ...; Vn_n y sus respectivos tiempos de vencimiento t_1; t_2; t_3; ...; t_n, entonces estas letras pueden ser reemplazadas, por una única letra, cuyo tiempo de vencimiento, está dado por:

$$t = \frac{Vn_1 \times t_1 + Vn_2 \times t_2 + Vn_3 \times t_3 + \ldots + Vn_n \times t_n}{Vn_1 + Vn_2 + Vn_3 + \ldots + Vn_n}$$

Ejemplo:

Un deudor debe pagar dos letras al banco; la primera de S/.4250 pagadera dentro de 32 días, la segunda de S/.3750 pagadera en 64 días. Dentro de cuánto tiempo deberá hacer un pago único que reemplace a las otras dos letras, suponiendo que la tasa de descuento es constante.

Resolución:

1.ª letra: $Vn_1 = S/.4250$; $t_1 = 32$ días

2.ª letra: $Vn_2 = S/.3750$; $t_2 = 64$ días

Hallamos el tiempo de vencimiento común:

$$t = \frac{4250(32) + 3750(64)}{4250 + 3750} = 47$$

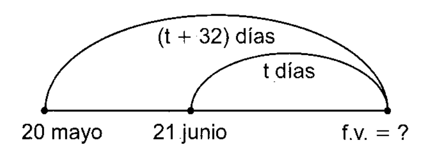
$\therefore$ El pago único se realizará en 47 días.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. ¿Cuál es la fecha de vencimiento de una letra, si los descuentos que sufre el 20 de mayo y el 21 de junio son entre sí como 15 es a 7?

Resolución:

Haciendo una línea de tiempo:
(t + 32) días



Por dato: $\frac{D_{20\,mayo}}{D_{21\,junio}} = \frac{15}{7}$

Como se trata del mismo documento:

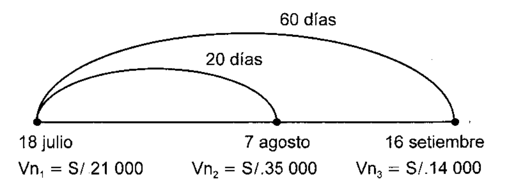
$$\frac{t+32}{t} = \frac{15}{7} \Rightarrow t = 28 \text{ días}$$

∴ Fecha de vencimiento:
21 junio + 28 días = 19 de julio

2. Un comerciante debe 3 letras a un mismo acreedor: La primera de S/.21 000 que vence el 18 de julio. La segunda de S/.35 000 que vence el 7 de agosto. La tercera de S/.14 000 que vence el 16 de septiembre. Si quiere cancelar su deuda con un solo pago de S/.70 000, ¿en qué fecha debe hacerlo?

Resolución:

Del enunciado:



Tomamos como referencia el 18 de julio.
Hallamos el tiempo de vencimiento común.

$$t = \frac{21\,000(0) + 35\,000(20) + 14\,000(60)}{70\,000}$$

$\Rightarrow t = 22$ días

∴ La fecha será: 18 julio + 22 días = 9 de agosto.

3. ¿Cuál es la tasa de descuento anual a la que ha sido descontado un efecto de comercio, sabiendo que al ser negociado 4 meses antes de su vencimiento se recibe el 84% de su valor nominal?

Resolución:

Del enunciado: r = ?; t = 4 meses; Va = 84%Vn
Sabemos que: Va = Vn − Dc

Reemplazando: 84%Vn = Vn − Dc
⇒ Dc = 16%Vn

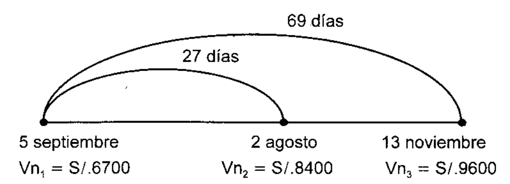
Luego: $\frac{Vn \times 4 \times r}{1200} = \left(\frac{16}{100}\right)Vn \Rightarrow r = 48$

∴ Tasa de descuento 48% anual.

4. ¿En qué fecha vencerá una letra que reemplaza a tres letras una de S/.8400 que vence el 2 de octubre, otra de S/.6700 que vence el 5 de septiembre y una última de S/.9600 que vence el 13 de noviembre. Sabiendo que el valor nominal de la letra es igual a la suma de los valores nominales de las letras reemplazadas?

Resolución:

Tomando como referencia la menor fecha: 5 de septiembre



Hallamos el tiempo de vencimiento común:

$$t = \frac{6700(0) + 8400(27) + 9600(69)}{6700 + 8400 + 9600} = 36$$

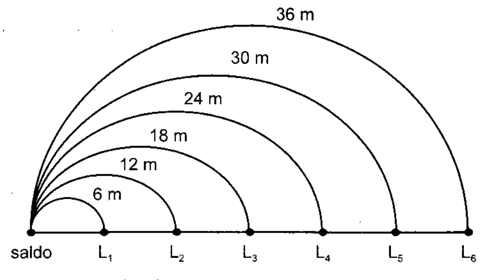
∴ La fecha será:
5 septiembre + 36 días = 11 octubre

5. Una persona vende un artefacto cuyo precio al contado es S/.2040, dando como pago al contado S/.1500 y firmando 6 letras de S/.300 cada una pagadera en 6 meses a partir del día de la venta. ¿Cuál es la tasa de descuento?

Resolución:

Precio al contado: S/.2040
Adelanto: S/.1500
} Saldo: S/.540

Se firmaron 6 letras:



Se cumple: Saldo = $Va_1 + Va_2 + ... + Va_6$

$$540 = 300\left(\frac{1-6r}{1200}\right) + 300\left(1 - \frac{12r}{1200}\right) + ... + 300\left(1 - \frac{36r}{1200}\right)$$

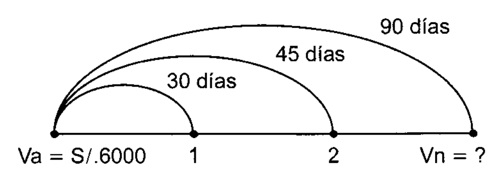
$$540 = 300\left[6 - \frac{6r}{1200}(1 + 2 + ... + 6)\right] \Rightarrow r = 40$$

$\therefore$ Tasa de descuento: 40% anual

6. Una letra que vence dentro de 3 meses tiene un valor actual de S/.6000. Si se descontara dentro de 30 días, el descuento sería S/.900 mayor que si se descontara dentro de 45 días. Hallar el valor nominal de dicha letra.

Resolución:

Del enunciado:



Por dato: Va = 6000

$$\Rightarrow Vn\left(1 - \frac{90 \times r}{36\,000}\right) = 6000 \qquad ...(1)$$

Además: $D_1 - D_2 = 100$

$$Vn\left(\frac{60 \times r}{36\,000} - \frac{45 \times r}{36\,000}\right) = 100$$

$$\Rightarrow Vn \times r = 240\,000 \qquad ...(2)$$

(2) en (1): $Vn - \frac{90 \times Vn \times r}{36\,000} = 6000$

$$\Rightarrow Vn = 6000 + \frac{90 \times 240\,000}{36\,000} = 6600$$

$\therefore$ El valor nominal es S/.6600

7. Para cancelar una deuda de S/.4700 se firman 25 letras mensuales, descontables al 20%. Hallar el valor nominal de cada letra.

Resolución:

Se firman 25 letras mensuales:

$Vn_1 = Vn_2 = Vn_3 = ... = Vn_{25} = V_n$

r = 10% anual

Se cumple: $4700 = Va_1 + Va_2 + ... + Va_{25}$

$$4700 = Vn\left(1 - \frac{1 \times 20}{1200}\right) + Vn\left(1 - \frac{2 \times 20}{1200}\right) + ... + Vn\left(1 - \frac{25 \times 20}{1200}\right)$$

$$4700 = Vn\left[25 - \frac{20}{1200}(1 + 2 + ... + 25)\right]$$

$$4700 = Vn\left[25 - \frac{1}{60}\left(\frac{25 \times 26}{2}\right)\right] \Rightarrow Vn = S/.240$$

$\therefore$ El valor nominal de cada letra es S/.240

8. ¿Cuál es el valor actual de una letra de cambio de S/.4800, pagadera el 12 de septiembre y fue descontada el 20 de junio del mismo año al 15%? El banco cobró el 1% de comisión y 2,5% por cambio de plazo.

Resolución:

Vn = S/.4800; r = 15%

f.d. = 20 junio
f.v. = 12 septiembre } t = 10 + 31 + 31 + 12; t = 84 días

Hallamos el valor actual:

Va = Vn − Dc − Comisión − Cambio de plazo

$$Va = 4800 - \frac{4800(84)(15)}{36\,000} - 1\%(4800) - 2{,}5\%(4800)$$

$\therefore$ Va = S/.4464

9. Dos letras son descontadas, la primera por 140 días al 50% anual; la segunda por 150 días al 60% anual; el descuento de la primera es al de la segunda como 7 es a 5, y la diferencia de los valores nominales respectivos es $560. Dichas letras se desean reemplazar por otra a pagar en 200 días al 40%. Determinar el valor nominal de esta letra reemplazante.

Resolución:

Del enunciado:

$Vn_1 = Vn + 560$; $Vn_2 = Vn$; $t_1 = 140$;
$t_2 = 150$; $r_1 = 50\%$; $r_2 = 60\%$

Por dato: $\frac{Dc_1}{Dc_2} = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{(Vn + 560) \times 140 \times 50}{Vn \times 150 \times 60} = \frac{7}{5}$

$\Rightarrow$ Vn = S/.700

Luego: Vn_1 = S/.1260; Vn_2 = S/.700

Además: Vn_3 = ?; t_3 = 200 días; r_3 = 40%

Como la tercera letra reemplaza a las dos primeras, se cumple: $Va_3 = Va_1 + Va_2$

$$Vn_3 = \left(1 - \frac{200 \times 40}{36\,000}\right) = 1260\left(1 - \frac{140 \times 50}{36\,000}\right) + 700\left(1 - \frac{150 \times 60}{36\,000}\right)$$

$\Rightarrow Vn_3$ = $1980

$\therefore$ El valor nominal de la tercera letra: $1980

10. Un deudor tiene que pagar al banco tres letras: la primera por S/.8000 pagadera dentro de 30 días, la segunda de S/.20 000 pagadera en 60 días y la tercera de S/.40 000 con un plazo de 90 días. Dentro de cuánto tiempo debe ser pagada una letra única, cuyo valor nominal sea la suma de los valores nominales de las tres letras, suponiendo que la tasa de interés es constante.

Resolución:

Tenemos:

Vn_1 = S/.8000; Vn_2 = S/.20 000; Vn_3 = S/.40 000

t_1 = 30 días; t_2 = 60 días; t_3 = 90 días

Hallamos el tiempo de vencimiento común:

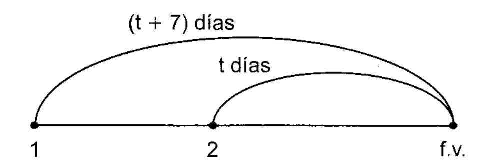
$$t = \frac{8000\times 30 + 20\,000\times 60 + 40\,000\times 90}{8000 + 20\,000 + 40\,000} = 74$$

∴ Dentro de 74 días

11. Si una letra de S/.3600 se hubiera negociado 7 días después, su valor actual hubiera sido S/.84 mayor. ¿Cuánto se recibió por ella, si se negoció 15 días antes de su vencimiento?

Resolución:

Vn = S/.3600



Como: $Va_2 - Va_1 = 84$

Es lo mismo que: $Dc_1 - Dc_2 = 84$

$$\frac{3600\times(t+7)\times r}{36\,000} - \frac{3600\times t\times r}{36\,000} = 84 \Rightarrow r = 120$$

Hallamos el valor actual, 15 días antes:

$$Va = 3600\left(1 - \frac{15\times 120}{36\,000}\right) = 3420$$

∴ Se recibe por el documento: S/.3420

12. El valor actual comercial de una letra es 24 veces el descuento comercial de la misma; si falta para su vencimiento 2 meses, ¿a qué tasa bimestral se descontó?

Resolución:

t = 2 meses

r = a% bimestral < > 6a% anual

Por dato: Va = 24Dc ⇒ Vn − Dc = 24Dc

$$\Rightarrow Vn = 25Dc \Rightarrow Vn = 25\left(\frac{Vn\times 2\times 6a}{1200}\right) \Rightarrow a = 4$$

∴ Tasa de descuento: 4% bimestral

13. Si una letra se cancela 2 meses antes, su descuento es el 1,5% de su valor nominal; si se paga 3 meses antes se descuenta $450. ¿Cuál es el valor nominal de dicha letra?

Resolución:

Dos meses antes:

Dc = 1,5%Vn

$$\frac{Vn\times 2\times r}{1200} = \left(\frac{15}{1000}\right)Vn \Rightarrow r = 9\%\ \text{anual}$$

Tres meses antes:

$$Dc = 450 \Rightarrow \frac{Vn\times 3\times 9}{1200} = 450 \Rightarrow Vn = \$20\,000$$

∴ Valor nominal de la letra: $20 000

14. Se tiene una letra de $250 a cobrarse dentro de 4 años y que va a servir para pagar una deuda de $348. Habiendo pagado en efectivo $152, ¿cuál debe ser la tasa de descuento?

Resolución:

Del enunciado: Saldo = 348 − 152 = 196

Del documento: Vn = $250; t = 4 años; r = ?

Sabemos que: Saldo = valor actual

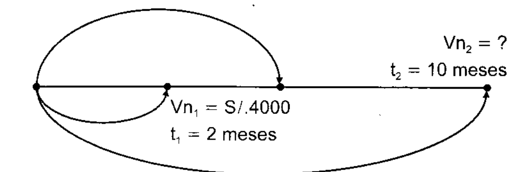
$$196 = 250\left(1 - \frac{4\times r}{100}\right) \Rightarrow r = 5{,}4$$

∴ Tasa de descuento anual: 5,4%

15. Martín debe una suma de S/.6000 pagaderas en 6 meses. A los dos meses paga S/.4000 y firma una letra de cambio por el resto, pagable en 10 meses. ¿Cuál es el valor del pagaré, si el descuento es al 20%?

Resolución:

Tenemos: Vn_1 = S/.6000; r = 20% anual; t = 6 m



Se cumple: $Va = Va_1 + Va_2$

$$6000\left(1 - \frac{6\times 20}{1200}\right) = 4000\left(1 - \frac{2\times 20}{1200}\right) + Vn_2\left(1 - \frac{10\times 20}{1200}\right)$$

⇒ $Vn_2 = 1840$

∴ El valor nominal del pagaré es: S/.1840

16. El descuento comercial y el descuento racional de una letra de cambio están en la relación de 4 a 3. ¿Qué porcentaje del valor nominal es el descuento racional?

Resolución:

Por dato: $\frac{Dc}{Dr} = \frac{4}{3}$

Pero: $Vn = \frac{Dc\times Dr}{Dc - Dr} \Rightarrow Vn = \frac{4\times 3}{4-3} = 12$

Nos piden: x%(Vn) = Dr

$\Rightarrow \left(\frac{x}{100}\right)12 = 3 \quad \therefore x = 25\%$

17. Si una letra se descontase el día de hoy, se pagaría el 80% de su valor nominal, pero si se hubiera pagado hace 4 meses 20 días, el valor anterior hubiera disminuido en un 10%. ¿Qué tiempo falta para el vencimiento de la letra?

Resolución:

Del enunciado:

A los t días: $Va_{t\,días} = 80\%Vn$ ...(1)

Hace 4 meses 20 días: 140 días

$Va_{(140+t)\,días} = \underbrace{90\%80\%}_{72\%}Vn$ ...(2)

(1) – (2): $Va_{t\,días} - Va_{(140+t)\,días} = 8\%Vn$

$\Rightarrow Dc_{(140+t)\,días} - Dc_{t\,días} = 8\%Vn$

Reemplazando:

$\frac{Vn(140+t)r}{36\,000} - \frac{Vn\times t\times r}{36\,000} = \left(\frac{8}{100}\right)Vn \Rightarrow r = \frac{144}{7}$

En (1): $Vn\left(1 - \frac{t\times\frac{144}{7}}{36\,000}\right) = \left(\frac{80}{100}\right)Vn$

$\therefore$ t = 350 días < > 11 meses 20 días

18. Por un artefacto, cuyo precio al contado es S/.1880, se ha dado una cuota inicial de S/.200 y se han firmado letras de igual valor nominal que vencen mensualmente. Hallar al cabo de qué tiempo se terminará de cancelar el artefacto, si el valor de cada letra es S/.120 y se ha fijado una tasa del 10%.

Resolución:

Saldo: 1880 – 200 = 1680

Se firman "n" letras: Vn = S/.120; r = 10% anual

Sabemos que: Saldo = $\sum$ valores actuales

$1680 = Va_1 + Va_2 + Va_3 + ... + Va_n$

$1680 = Vn\left(1 - \frac{1\times 10}{1200}\right) + Vn\left(1 - \frac{2\times 10}{1200}\right) + ... + Vn\left(1 - \frac{n\times 10}{1200}\right)$

$1680 = Vn\left[n - \frac{10}{1200}(1 + 2 + ... + n)\right]$

$1680 = 120\left[n - \frac{1}{120}\times\frac{n(n+1)}{2}\right]$

$\Rightarrow$ n = 15 meses < > 1 año 3 meses

$\therefore$ El artefacto se cancelará en 1 año 3 meses.

19. El menor valor actual de una letra es S/.5940 y su menor descuento es el 10% de su valor actual. Si la letra vence en 8 meses y se descuenta al 15%, calcular su mayor valor actual.

Resolución:

El menor valor actual es el comercial:

$Vn - Dc = 5940$ ...(1)

El menor descuento es el racional:

$Dr = 10\%\,Va_r$ ...(2)

t = 8 meses; r = 15%

En (1): $Vn\left(1 - \frac{8\times 15}{1200}\right) = 5940 \Rightarrow Vn = S/.6600$

En (2): $Dr = 10\%(Vn - Dr) \Rightarrow 110\%Dr = 10\%Vn$

$Dr = \left(\frac{1}{11}\right)6600 = S/.600$

$\therefore$ Mayor Va: $Va_r = 6600 - 600 = S/.6000$

20. La tasa de descuento de una letra es 8% y su descuento racional es el 80% del descuento comercial. ¿Cuánto faltaba para su vencimiento?

Resolución:

Por datos: r = 8%

$Dr = 80\%Dc \Rightarrow \frac{Dc}{Dr} = \frac{5}{4}$

Pero: $Vn = \frac{Dc\times Dr}{Dc - Dr} \Rightarrow Vn = \frac{5\times 4}{5-4} = 20$

Luego: $Dc = 5 \Rightarrow \frac{20\times t\times 8}{100} = 5 \Rightarrow t = 3{,}125$ años

t = 3 años 0,125 (12 meses) = 3 años, 1,5 meses.

$\therefore$ t = 3 años, 1 mes, 15 días

21. Una persona negocia una letra que vence dentro de 6 meses y recibe por ella los 7/9 de lo que hubiera recibido; si se hacía efectivo 2 meses antes de la fecha de vencimiento, calcular la tasa de descuento.

Resolución:

Del enunciado: $Va_{6\,meses} = \left(\frac{7}{9}\right)Va_{2\,meses}$

$\Rightarrow Vn\left(1 - \frac{6\times r}{1200}\right) = \frac{7}{9}\times Vn\left(1 - \frac{2\times r}{1200}\right) \Rightarrow r = 60$

$\therefore$ Tasa de descuento: 60% anual.

22. Se tienen 3 letras de S/.2410; S/.2420 y S/.2430 pagaderas en 30; 60; 90 días, respectivamente. ¿Cuál es el valor nominal de una letra que reemplazará a las tres anteriores y que sea pagadera a los 40 días si se emplea un descuento racional al 5%?

Resolución:

Hallamos el valor nominal de las letras que reemplace a las letras. Se cumple que:

$Va_r = Va_{r1} + Va_{r2} + Va_{r3}$

$Vn\left[1 - \frac{40\times 5}{36\,000 + (40)(5)}\right] = 2410\left[1 - \frac{30\times 5}{36\,000 + (30)(5)}\right] + 2420\left[1 - \frac{60\times 5}{36\,000 + (60)(5)}\right] + 2430\left[1 - \frac{90\times 5}{36\,000 + (90)(5)}\right]$

$Vn\left(\frac{180}{181}\right) = 2400 + 2400 + 2400 \Rightarrow Vn = 7240$

$\therefore$ El valor nominal es S/.7240

23. Una letra vence dentro de 2 meses y tiene un valor actual de S/.4000. Si la letra se descontara dentro de 15 días, el descuento sería de S/.4500. Hallar el valor nominal de la letra.

Resolución:

Del enunciado: $Va_{60\text{ días}} = 4000$ ...(1)

Dentro de 15 días: $Va_{45\text{ días}} = 4500$ ...(2)

(2) – (1): $D_{15\text{ días}} = 500$

$\Rightarrow D_{60\text{ días}} = 4 \times D_{15\text{ días}} = S/.2000$

En (1): $Vn - \underbrace{D_{60\text{ días}}}_{2000} = S/.4000 \quad \therefore Vn = S/.6000$

24. En qué fecha vencerá un documento de S/.7200 que se giró el 27 de abril, si por descontarse el 9 de mayo al 40% anual, se recibió por ella S/.6840.

Resolución:

Vn = S/.7200; r = 40% anual; Va = S/.6840

f.g. = 27 abril

$\left.\begin{array}{l}\text{f.d.} = 9 \text{ mayo}\\ \text{f.v.} = ?\end{array}\right\}$ t días

Como: Va = 6840 $\Rightarrow$ Vn – Dc = 6840

$$7200\left(1 - \frac{t \times 40}{36\,000}\right) = 6840 \Rightarrow t = 45 \text{ días}$$

$\therefore$ f.v. = 9 mayo + 45 días = 23 de junio

25. Se tiene una letra de S/.1990 pagadera dentro de 90 días al 6%. Si dicha letra se cambia por otra de S/.1970 y empleando una tasa para el descuento del 6%, averigua cuál es el tiempo de vencimiento de la segunda letra.

Resolución:

Dos letras de cambio:

1.ª letra:	**2.ª letra:**
$Vn_1 = S/.1990$;	$Vn_2 = S/.1970$
$t_1 = 90$ días	$t_2 = ?$
$r_1 = 6\%$	$r_2 = 6\%$

Si las letras se intercambian: $Va_1 = Va_2$

$$1990\left(1 - \frac{90 \times 6}{36\,000}\right) = 1970\left(1 - \frac{t \times 6}{36\,000}\right)$$

$\Rightarrow$ t = 30 días < > 1 mes $\quad\therefore$ Vence al mes.

26. Una persona compra un artículo, cuyo precio al contado es S/.6000, pagando S/.2562 al contado y por el resto firmando letras mensuales de S/.450 cada una. ¿Cuántas letras se firmó considerando un descuento comercial del 6% semestral?

Resolución:

Saldo: 6000 – 2562 = 3438

Se firman "n" letras mensuales:

Vn = S/.450; r = 6% semestral < > 12% anual

Se cumple: Saldo = $\sum$valor actual

$3438 = Va_1 + Va_2 + ... + Va_n$

$$3438 = Vn\left(1 - \frac{1 \times 12}{1200}\right) + Vn\left(1 - \frac{2 \times 12}{1200}\right) + ... + Vn\left(1 - \frac{n \times 12}{1200}\right)$$

$$3438 = Vn\left[n - \frac{12}{1200}(1 + 2 + ... + n)\right]$$

$$3438 = 450\left[n - \frac{1}{100} \times \frac{n(n+1)}{2}\right] \Rightarrow n = 8$$

$\therefore$ Son 8 letras.

27. Se entrega a un banco, dos letras una de S/.2000 pagadera en 60 días y otra de S/.3000 pagadera en 36 días. El banquero descuenta las dos letras a una tasa del 6% y retiene además el 1% de comisión sobre los valores nominales. ¿Cuánto debe entregar el banquero al interesado?

Resolución:

Tenemos:

$Vn_1 = S/.2000$; $Vn_2 = S/.3000$

$t_1 = 60$ días; $t_2 = 36$ días; $r_1 = 6\%$; $r_2 = 6\%$

Nos piden: $Va = Va_1 + Va_2 -$ Comisión

$$Va = 2000\left(1 - \frac{60 \times 6}{36\,000}\right) + 3000\left(1 - \frac{36 \times 6}{36\,000}\right) - 1\%(2000 + 3000)$$

Va = 1980 + 2982 – 50 = 4912

$\therefore$ Se recibirá: Va = S/.4912

28. Se tiene una letra que vence dentro de 8 meses. Si se llevara a descontar al banco, en ese momento la relación entre su descuento comercial y racional será como 5 es a 4. Pero si llevara la letra dentro de 3 meses el descuento comercial será de S/.1125. Hallar el valor nominal de la letra.

Resolución:

Ocho meses antes del vencimiento:

$$\frac{Dc}{Dr} = \frac{5}{4} \quad .....(1)$$

Dentro de 3 meses (5 meses antes)

$$Dc_{(5m)} = 1125 \Rightarrow Dc_{(1m)} = \frac{1125}{5} = S/.225$$

$Dc_{(8m)} = 225(8) = S/.1800$

En (1): $\frac{1800}{Dr} = \frac{5}{4} \Rightarrow Dr = S/.1440$

Pero: $Vn = \frac{Dc \times Dr}{Dc - Dr}$

$$\therefore Vn = \frac{1800 \times 1440}{1800 - 1440} = S/.7200$$

29. Después de haberse comprometido a pagar una deuda de S/.7500 en dos partes iguales: la mitad a los 90 días y la otra mitad en 60 días después del primer pago, un comerciante se decidió a cancelar la misma deuda con un descuento del 6% anual. ¿Cuánto tuvo que pagar al contado?

Resolución:

Dos letras: r = 6% anual

$Vn_1 = S/.3750$; $Vn_2 = S/.3750$

$t_1 = 90$ días; $t_2 = 150$ días

El pago al contado: $Va_1 + Va_2$

$$\text{Contado} = 3750\left(1 - \frac{90 \times 6}{36\,000}\right) + 3750\left(1 - \frac{150 \times 6}{36\,000}\right)$$

Contado = 3693,75 + 3656,25 = 7350

∴ Pagó al contado: S/.7350.

30. Si se descuenta matemáticamente una letra, su valor actual es de 98% del valor nominal. Si se descontara comercialmente, ¿qué porcentaje del valor nominal sería el valor actual?

Resolución:

Descuento matemático: $Va_r = 98\%Vn$

$Vn - Dr = 98\%Vn \Rightarrow Dr = 2\%Vn$

Sabemos que: $Vn = \dfrac{Dc \times Dr}{Dc - Dr}$

Reemplazando: $Vn = \dfrac{Dc \times 0{,}02 \times Vn}{Dc - 0{,}02 \times Vn}$

$\Rightarrow Dc - 0{,}02Vn = 0{,}02Dc \Rightarrow Dc = \left(\dfrac{1}{49}\right)Vn$

Hallamos el valor actual:

$Va = Vn - \left(\dfrac{1}{49}\right)Vn = \left(\dfrac{48}{49}\right)Vn$

$\therefore\ Va = \dfrac{48}{49} \times 100 \times Vn = 97{,}96\%$ del Vn

31. El precio al contado de un artefacto eléctrico es de \$1000; doy \$200 de cuota inicial y firmo una letra de cambio por el resto que vence dentro de 3 meses aplicando el 20% de descuento racional anual. Calcular el valor de dicho documento.

Resolución:

De la letra: Saldo: 1000 − 200 = 800

Letra de cambio:

Vn = ?; t = 3 meses; r = 20% (racional)

Hallamos el valor actual racional: $Va_r = Vn - Dr$

$Va_r = Vn - \dfrac{Vn \times 3 \times 20}{1200 + 3 \times 20}$

$\Rightarrow Va_r = Vn\left(1 - \dfrac{1}{21}\right) \Rightarrow Va_r = Vn\left(\dfrac{20}{21}\right)$

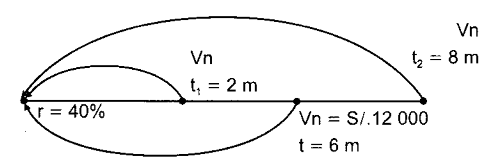
Pero: Saldo = $Va_r \Rightarrow 800 = \left(\dfrac{20}{21}\right)Vn$

∴ Vn = \$840

32. Una persona debe a otra una letra de S/.12 000 pagadera a los 6 meses; conviene en pagar su deuda mediante dos iguales que vence a los 2 y 8 meses, respectivamente. ¿Cuál es el valor nominal de estos pagos, si se aplica una tasa de descuento del 40% anual?

Resolución:

Del enunciado:



Se cumple: $Va = Va_1 + Va_2$

$$12\,000\left[1 - \frac{40(6)}{1200}\right] = Vn\left[1 - \frac{40(2)}{1200}\right] + Vn\left[1 - \frac{40(8)}{1200}\right]$$

$9600 = Vn \times \dfrac{14}{15} + Vn \times \dfrac{11}{15} \Rightarrow Vn = S/.5760$

∴ El valor de los dos pagos: S/.5760 c/u.

33. El 4 de junio, un deudor pide a su acreedor que a cambio de dos pagarés, uno de S/.54 000 pagadero el 7 de agosto y otro de S/.72 000 el 13 de agosto; le expide un solo pagaré pagadero el 2 de septiembre; el acreedor acepta la propuesta y extiende un pagaré único de S/.126 400. ¿A qué tanto por ciento presta el acreedor?

Resolución:

Consideramos el 4 de junio como fecha de referencia para los dos pagarés y la letra reemplazante, tenemos los respectivos tiempos para el vencimiento:

Primer pagaré:

Vn_1 = S/.54 000; f.v. = 7 de agosto

$\Rightarrow t_1 = 26 + 31 + 7 = 64$ días

Segundo pagaré:

Vn_2 = S/.72 000; f.v. = 13 de agosto

$\Rightarrow t_2 = 26 + 31 + 13 = 70$ días

Letra reemplazante:

Vn = S/.126 400; f.v. = 2 septiembre

$\Rightarrow t = 26 + 31 + 31 + 2 = 90$ días

Se cumple al r% anual:

Va reempla. = Va 1.er pagaré + Va 2.° pagaré

Reemplazando:

$$126\,400\left(1 - \frac{r \times 90}{36\,000}\right) = 54\,000\left(1 - \frac{r \times 64}{36\,000}\right) + 72\,000\left(1 - \frac{r \times 70}{36\,000}\right)$$

Resolviendo: r = 5

∴ El acreedor presta al 5% anual.

34. Un comerciante debe cancelar una letra de S/.2800 pagadera en 25 días, una letra de S/.2400 pagadera en 20 días y una letra de S/.2000 que vence el 24 de julio del 2004; va al banco y recibe una letra de S/.7200 pagadera en 30 días. ¿Qué día fue al banco?

Resolución:

La tercera letra se descontó "t" días antes de su vencimiento y todas a la misma tasa de descuento.

Tenemos:

Primera letra: Vn_1 = S/.2800; t_1 = 25 días

Segunda letra: Vn_2 = S/.2400; t_2 = 20 días

Tercera letra: Vn_3 = S/.2000; t_3 = t días (f.v. = 24 de julio del 2004)

Letra reemplazante: Vn = S/.7200; t = 30 días

Por vencimiento común:

$$30 = \frac{2800(25) + 2400 \times (20) + 2000(t)}{7200}$$

Reduciendo, se obtiene: t = 49 días
Vemos que la fecha de descuento fue hecha 49 días antes del vencimiento de la tercera letra.

$\therefore$ Fue al banco: 24 de julio – 49 días = 5 junio

35. Se tienen tres pagarés; uno de S/.2000 que vencía el 2 de diciembre del año pasado, otro de S/.3000 que vencía el 1 de febrero y el otro de S/.4000 pagaderos el 4 de febrero (estos últimos se cumplió este año). Se reemplazó estos tres pagarés por uno solo. ¿Cuál será la fecha de vencimiento?

Resolución:

Consideramos el 2 de diciembre como fecha de referencia:

Primer pagaré:
Vn_1 = S/.2000; f.v. = 2 de diciembre; t_1 = 0 días

Segundo pagaré:
Vn_2 = S/.3000; f.v. = 1 de febrero; t_2 = 63 días

Tercer pagaré:
Vn_3 = S/.4000; f.v. = 4 de febrero; t_3 = 66 días

Hallamos el tiempo de vencimiento común:

$$t = \left(\frac{2000(0) + 3000(63) + 4000(66)}{2000 + 3000 + 4000}\right)$$

$t = 50{,}3$ días $\approx$ 51 días

$\therefore$ Hallamos la fecha de vencimiento
2 de diciembre + 51 días : 22 de enero

36. Dos empleados de un banco calculan el descuento de una letra pagadera en 9 meses al 18%. Uno hace el cálculo según el Dc y el otro según el Dr, encontrándose una diferencia de 72,90 soles. Hallar el valor nominal de la letra, en soles.

Resolución:

Se conoce: $Dc - Dr = \frac{Dr \times r \times t}{1200}$

$\Rightarrow Dc - Dr = 72{,}90 = \frac{Dr \times 18 \times 9}{1200} \Rightarrow Dr = 540$

Luego: Dc = 50 + 72,90 = 612,9

Pero: $Vn = \frac{Dc \times Dr}{Dc - Dr} \Rightarrow Vn = \frac{612{,}9 \times 540}{72{,}9} = 4540$

$\therefore$ Vn = S/.4540

37. Hallar el valor nominal de una letra que descontada 2 meses al 10% da una diferencia de 4 soles entre el descuento comercial y racional.

Resolución:

$$Dc - Dr = \frac{Dr \times r \times t}{1200}$$

$\Rightarrow 4 = \frac{Dr \times 10 \times 2}{1200} \Rightarrow Dr = 240$

$\Rightarrow$ Dc = 240 + 4 $\Rightarrow$ Dc = 244

$\therefore Vn = \frac{240 \times 244}{4}$ = S/.14 640

38. La tasa de descuento de una letra es del 8%. Si el descuento racional es igual al 80% del descuento comercial, ¿cuál es el tiempo que faltaba para el vencimiento de la letra?

Resolución:

Dato: Dr = 80%Dc $\Rightarrow$ Dc = 5k; Dr = 4k

Se conoce: $Dc - Dr = \frac{Dr \times r \times t}{1200}$

$\Rightarrow 5k - 4k = \frac{4k \times 8 \times t}{1200} \Rightarrow t = 37{,}5$ meses

$\Rightarrow$ t = 36 meses + 1 mes + 0,5 meses

$\therefore$ t = 3 años 1 mes 15 días

39. Dos letras de cambio de igual valor nominal vencen dentro de 30 y 60 días, respectivamente. Si son descontados comercialmente al 12% anual, ¿cuál es el valor nominal de las letras si se recibió en total S/.10 244?

Resolución:

Lo que se recibe por las letras es su valor actual

V	V
Vence 30 días $\Rightarrow$ 1 mes	Vence 60 días $\Rightarrow$ 2 meses
↓	↓
Va_1 +	Va_2 = 10 244

$\Rightarrow V\left(1 - \frac{1 \times 12}{1200}\right) + V\left(1 - \frac{2 \times 12}{1200}\right) = 10\,244$

$\Rightarrow V\left(2 - \frac{3}{100}\right) = 10\,244 \quad \therefore V = S/.5200$

40. La diferencia entre el descuento comercial y racional de una letra de 270 soles es de 3 soles. ¿Cuál es el descuento racional?

Resolución:

$Vn = 270 = \frac{Dc \times Dr}{Dc - Dr}$

$\Rightarrow 270 = \frac{Dc \times Dr}{3} \Rightarrow Dc \times Dr = 810$ ...(I)

Pero: Dc – Dr = 3 $\Rightarrow$ Dc = Dr + 3 ...(II)

De (I) y (II): (Dr + 3)Dr = 810

$\Rightarrow$ (Dr + 3) Dr = 30 $\times$ 27

Identificando: Dr = 27 $\Rightarrow$ Dc = 30

41. Al reemplazar 3 letras de cambio de igual valor nominal que vencen dentro de 1 mes, 4 meses y 9 meses, por una sola resultó que su valor nominal es 4 veces el valor nominal de cualesquiera de las letras de cambio originales. Hallar el tiempo de

vencimiento si la tasa de descuento es constante e igual a 5% mensual.

Resolución:

Reemplazamos las 3 letras indicadas, por la letra en vencimiento común:

Valor nominal = V + V + V = 3V

$$\underbrace{V}_{1\text{ mes}} \qquad \underbrace{V}_{4\text{ meses}} \qquad \underbrace{V}_{9\text{ meses}}$$

$$tv_c = \frac{V\times1 + V\times4 + V\times9}{V+V+V} = \frac{14}{3}$$

Esta letra en vencimiento común debe ser equivalente a la letra indicada:

Descuento: 5% mensual < > 60% anual

Luego: $Va_1 = Va_2$

$$\Rightarrow 3V - \frac{3V\times60\times14/3}{1200} = 4V - \frac{4V\times60\times t}{1200}$$

$$\Rightarrow \frac{4t-14}{20} = 1 \quad \therefore\ t = 8{,}5 \text{ meses}$$

42. El valor nominal, el valor actual comercial, el descuento comercial y el descuento racional de una letra, suman 7752 soles. Hallar el valor actual racional de esta letra, sabiendo que los descuentos están en la relación de 9 a 8.

Resolución:

Del problema:

$$\frac{Dc}{Dr} = \frac{9}{8} \Rightarrow Dc = 9k,\ Dr = 8k$$

Se conoce: $Vn = \dfrac{Dc\times Dr}{Dc - Dr} \Rightarrow Vn = \dfrac{9k\times8k}{9k-8k} = 72k$

Se conoce: $Vac = Vn - Dc$

$\Rightarrow Vac = 72k - 9k = 63k$

Dato: $\underbrace{Vn}_{72k} + \underbrace{Vac}_{63k} + \underbrace{Dc}_{9k} + \underbrace{Dr}_{8k} = 7752$

$\Rightarrow 152k = 7752 \Rightarrow k = 51 \Rightarrow Vn = 72(51) = 3672$

$\Rightarrow Dr = 8(51) = 408 \quad \therefore\ Var = Vn - Dr = S/.3264$

43. Si una letra se cancela 2 meses antes se le descuenta el 1,5% pero si se cancela 3 meses antes se le descuenta 45 soles. Hallar el valor nominal de dicha letra, en soles.

Resolución:

Si se descuenta 2 meses antes:

$$D_1 = \frac{Vn\times r\times2}{1200} = 1{,}5\%Vn \Rightarrow r = 9 \text{ (tasa 9\%)}$$

Si se descuenta 3 meses antes:

$$D_2 = \frac{Vn\times9\times3}{1200} = 45 \quad \therefore\ Vn = S/.2000$$

44. Una letra que debía descontarse en 5 meses, por error se descontó en 4 meses, y así el poseedor recibió 5% más de lo que debía recibir. ¿Cuál es la tasa de descuento mensual?

Resolución:

Descontada por 5 meses:

$$D_1 = \frac{V\times r\times5}{1200} = \left(\frac{5}{12}\right)V\times r\%$$

Descontada por 4 meses:

$$D_2 = \frac{V\times r\times4}{1200} = \left(\frac{4}{12}\right)V\times r\%$$

Dato: $Va_2 - Va_1 = 5\%Va_1$

$\Rightarrow (V - D_2) - (V - D_1) = 5\%(V - D_1)$

$\Rightarrow D_1 - D_2 = 5\%(V - D_1)$

$$\left(\frac{5}{12}\right)V\times r\% - \left(\frac{4}{12}\right)V\times r\% = 5\%\left[V - \left(\frac{5}{12}\right)V\times r\%\right]$$

$$\Rightarrow \frac{r}{12} = 5\left(1 - \frac{5r}{1200}\right) \quad \therefore\ r = 48$$

Tasa: 48% anual < > 4% mensual

45. Una letra de 20 000 dólares vence dentro de 13 meses, además dentro de 6 y 8 meses sus valores actuales se encontrarán en la relación de 29 a 35. ¿Cuánto recibirá por ella si es cancelada dentro de 10 meses?

Resolución:

La letra de \$20 000 vence en 13 meses, luego:

Dentro de 6 meses, faltarán 7 meses

$$\Rightarrow Va_1 = 20\,000\left(1 - \frac{7\times r}{1200}\right) \quad \ldots(I)$$

Dentro de 8 meses, faltarán 5 meses

$$\Rightarrow Va_2 = 20\,000\left(1 - \frac{5\times r}{1200}\right) \quad \ldots(II)$$

Dato: $\dfrac{Va_1}{Va_2} = \dfrac{29}{35}$

Dividiendo (I) y (II): $\dfrac{Va_1}{Va_2} = \dfrac{20\,000\left(1 - \frac{7\times r}{1200}\right)}{20\,000\left(1 - \frac{5\times r}{1200}\right)} = \dfrac{29}{35}$

Resolviendo: $r = 72$

Si se cancela en 10 meses, faltarán 3 meses para su vencimiento.

$$Va = 20\,000\left(1 - \frac{72\times3}{1200}\right) \quad \therefore\ Va = \$16\,400$$

46. El 15 de agosto de 1996 se firmaron 3 letras de cambio de 2000; 3000 y 5000 soles cada una. Para pagar, respectivamente, el 5 de agosto de 1998, el 6 de junio de 1999 y el 17 de septiembre de 1999. Si las tres letras de cambio se reemplazan por una sola, ¿cuál fue su fecha de vencimiento?

Resolución:

Se puede tomar como fecha para calcular los vencimientos la fecha de la letra que vence primero.

Día: 5 de agosto de 1998

$t_1 = 0$ días (vence 5 agosto de 1998)

$t_2 = \underset{(S)}{26} + \underset{(O)}{30} + \underset{(N)}{31} + \underset{(D)}{30} + \underset{(E)}{31} + \underset{(F)}{31} + \underset{(M)}{28} + \underset{(A)}{31} + \underset{(M)}{30} + 31$
... + 6 (junio 1999)

$\Rightarrow t_2 = 305$ días

$t_3 = 305 + \underset{(J)}{24} + \underset{(A)}{31} + \underset{(S)}{31} + 17 = 408$ días

Calculando el tiempo de vencimiento común:

$$t_{Vc} = \frac{2000(0) + 3000(305) + 5000(408)}{2000 + 3000 + 5000}$$

$t_{Vc} = 295{,}5 \Rightarrow t_{Vc} = 296$ días

Como hasta el 6 de junio de 1999 hay 305 días, 9 días antes será la fecha buscada.
6 junio − 9 días = 28 mayo
$\therefore$ Fecha de vencimiento = 28 mayo de 1999

47. Se canjean dos letras de 1600 y 1100 soles con vencimiento de 4 y 6 meses, respectivamente, por otras 3 letras de igual valor nominal con vencimiento de t, 2t y 3t meses. Si la tasa de descuento es 2,5% semestral; calcular el valor nominal de las letras reemplazantes, en función de t.

Resolución:

Para el cambio de letras:

$$\underset{\text{letras reemplazantes}}{\sum Va} = \underset{\text{letras reemplazadas}}{\sum Va}$$

Pero: $\underbrace{V}_{t\text{ mes}} \quad \underbrace{V}_{2t\text{ meses}} \quad \underbrace{V}_{3t\text{ meses}}$

Se pueden cambiar:

$$t_{Vc} = \frac{Vt + 2Vt + 3Vt}{3V} = 2t$$

Luego: $Va_1 + Va_2 = Va$ (letra que reemplaza a las tres)

$$1600\left(1 - \frac{4\times5}{1200}\right) + 1100\left(1 - \frac{6\times5}{1200}\right) = 3V\left(1 - \frac{2\times5t}{1200}\right)$$

$$\therefore V = \frac{317\,500}{360 - 3t}$$

48. Faltando cierto tiempo para el vencimiento de una letra de cambio se calcula su descuento comercial y su descuento racional, observándose que el primero es el doble del segundo, entonces si se descuenta comercialmente, ¿qué porcentaje de su valor nominal se recibe?

Resolución:

Del dato: $Dc = 2Dr$

Además: $Vn = \dfrac{Dc \times 2Dr}{Dc - Dr} = \dfrac{2Dr \times Dr}{2Dr - Dr} \Rightarrow Vn = 2Dr$

Se conoce: $Vac = Vn - Dc \Rightarrow Vac = 2Dr - 2Dr$
$\therefore Vac = 0$

49. Una letra se descontó hoy y se recibió por ella el 80% de su valor nominal. Pero si dicho descuento se hubiera realizado hace 48 días se hubiera recibido el 90% de lo que hoy se recibió. Calcular la tasa anual de descuento.

Resolución:

Si hoy se descuenta:
$Va_1 = 80\%Vn \Rightarrow D_1 = 20\%Vn$ ...(I)

Si se descontaba hace 48 días:
$Va_2 = 90\%(80\%Vn) = 72\%Vn$
$\Rightarrow D_2 = 28\%Vn$ ...(II)

Dividiendo (I) y (II):

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{Vn \times r \times t/1200}{Vn \times r(t + 48/30)/1200} = \frac{20\%Vn}{28\%Vn}$$

Se obtiene: $t = 4$ meses

En (I): $D_1 = \dfrac{Vn \times r \times 4}{1200} = 20\%Vn \quad \therefore r = 60\%$

50. Un comerciante vende un artefacto a crédito y hace firmar al cliente una letra pensando en cierta tasa de descuento, pero al llevarla inmediatamente al banco, este la descuenta con una tasa igual al doble de la que pensó y por esto perdió 10% del precio al contado. ¿Qué porcentaje del valor nominal le descontó el banco?

Resolución:

Pensaba recibir:

$$Va_1 = Vn - \frac{Vn \times r \times t}{100} \quad ...(I)$$

El banco le entrega:

$$Va_2 = Vn - \frac{Vn \times 2r \times t}{100} \quad ...(II)$$

La pérdida será: $Va_1 - Va_2$

$$(I) - (II): Va_1 - Va_2 = \frac{2Vn \times r \times t}{100} - \frac{Vn \times r \times t}{100}$$

$$10\%Vn = \frac{Vn \times r \times t}{100}$$

El banco le descuenta:

$$\frac{2Vn \times 2r \times t}{100} = 2\left(\frac{Vn \times r \times t}{100}\right) = 20\%Vn$$

51. La suma de los valores nominales de 4 letras es 20 000 soles, el 40% se paga a los 4 meses y el resto se paga con 3 letras iguales cada 2 meses luego del primer pago. Si se quiere realizar un solo pago para cancelar la deuda, ¿a los cuántos meses de la fecha de contrato debe hacerlo?

Resolución:

El pago de las letras se puede considerar así:

Primera letra paga: 40%(20 000) = 8000
Falta pagar 12 000 en 3 partes iguales

Cada pago será: $\dfrac{12\,000}{3} = 4000$

$$t_{Vc} = \frac{8000(4)+4000(6)+4000(8)+4000(10)}{8000+4000+4000+4000}$$

$\therefore$ $t_{Vc} = 6{,}4$ meses

52. Cuánto tiempo antes de su vencimiento debe ser descontada una letra al 7,5% semestral para que su valor actual sea al valor nominal como 23 es a 24?

Resolución:

$$\frac{Va}{Vn} = \frac{23}{24} \Rightarrow Va = \left(\frac{23}{24}\right)Vn$$

Como: 7,5% semestral < > 15% anual

Además: D = Vn − Va

$$\Rightarrow \frac{Vn \times 15 \times t}{1200} = Vn - \left(\frac{23}{24}\right)Vn = \frac{Vn}{24}$$

$$\Rightarrow t = \frac{10}{3} \text{ meses} = \frac{10}{3}(30) = 100 \quad \therefore t = 100 \text{ días}$$

53. Se desea reemplazar tres letras de cambio por una sola cuyo plazo de vencimiento sea 75 días. La primera letra es de S/.2400 y vence dentro de 40 días. La segunda es de S/.2100 y cuyo plazo de vencimiento no se recuerda. La tercera es de S/.1500 y vence dentro de 3 meses 20 días. ¿Cuál sería el plazo de vencimiento de la segunda letra?

Resolución:

Considerando que la letra está en vencimiento común.

Convirtiendo: 3 meses 20 días = 110 días

$$75 = \frac{2400(40)+2100t+1500(110)}{2400+2100+1500} \Rightarrow t = 90 \text{ días}$$

$\therefore$ t = 3 meses

54. En una letra de cambio los descuentos comercial y racional son como 9 es a 5. ¿Qué porcentaje del valor nominal representa el descuento comercial?

Resolución:

Por dato: $\frac{Dc}{Dr} = \frac{9}{5} \Rightarrow Dc = 9k;\ Dr = 5k$

$$Vn = \frac{Dc \times Dr}{Dc - Dr} = \frac{9k \times 5k}{9k - 5k} = 11{,}25k$$

Luego:

Vn = 11,25k ———— 100%

Dc = 9k ———— x

$$\Rightarrow x = \frac{9k(100\%)}{11{,}25k} = 80\%$$

$\therefore$ Representa el 80% del Vn.

55. Hallar el valor nominal de una letra de cambio, sabiendo que 10 meses antes de su vencimiento su valor sería 2400 soles y 5 meses después su valor será 3000 soles.

Resolución:

Sabiendo que el descuento es el interés simple, producido por el valor de la letra, se cumple:

Descuento 5 meses antes de su vencimiento = D

Descuento 10 meses antes de su vencimiento = 2D

Para el problema:

10 meses antes: V − 2D = 2400 ...(1)

5 meses antes: V − D = 3000 ...(2)

(2) − (1): D = 600

$\therefore$ En (I): V = S/.3600

56. Se tiene una letra de S/.3600 que vence dentro de 18 meses, se cancela dentro de 6 meses y se recibe por ella una cantidad representada por el mayor entero que contiene al factor diez. ¿Cuál es dicha cantidad sabiendo que la tasa de descuento $r \in [30; 80]$?

Resolución:

Como falta 1 año para su vencimiento, lo que se recibe por la letra es:

$$Va = 3600\left(1 - \frac{r \times 1}{100}\right)$$

$$\Rightarrow Va = \underbrace{36(100 - r)}_{\substack{\text{debe contener factor 5} \\ \text{(mayor posible)}}} = \underbrace{\ldots 0}_{\substack{\text{Contiene} \\ \text{factor 10}}}$$

Luego, r debe ser lo menor posible que contenga a 5.

$r \in [30; 80] \Rightarrow r = 30$

$\therefore$ Va = 36(100 − 30) = S/.2520

57. Una letra que vence dentro de 2 meses tiene hoy un valor actual de S/.4050. Si dicha letra se descontara dentro de 10 días, dicho descuento sería S/.375, calcular el Vn de dicha letra.

Resolución:

La letra vence en 2 meses:

$$\Rightarrow Va = V - \frac{V \times r \times 2}{1200} = 4050 \quad \ldots(1)$$

Dentro de 10 días, faltará:

$\underbrace{60 \text{ días}}_{2 \text{ meses}} - 10 \text{ días} = 50 \text{ días}$

$$\text{El descuento es: } D = \frac{V \times r \times 50}{36\,000} = 375$$

$\Rightarrow V \times r = 270\,000$ ...(2)

$$\text{(2) en (1): } V - \frac{(270\,000) \times 2}{1200} = 4050$$

$\therefore$ V = S/.4500

58. Una letra de S/.2880 fue descontada comercialmente faltando t días para su vencimiento. Hallar lo que se recibió por dicha letra, sabiendo que si el descuento hubiese sido racional, con la misma tasa, dicho descuento habría sido el 90% del descuento comercial.

Resolución:

Del problema: $Dr = 90\%Dc \Rightarrow \frac{Dr}{Dc} = \frac{9}{10}$

$\Rightarrow Dr = 9k;\ Dc = 10k$

$$\text{Como: } Vn = \frac{Dc \times Dr}{Dc - Dr} \Rightarrow 2880 = \frac{10k \times 9k}{10k - 9k} \Rightarrow k = 32$$

Los descuentos son:
Dc = 10(32) = 320; Dr = 9(32) = 288

Como la letra ha sido descontada comercialmente:
$\Rightarrow$ Vac = 2880 − 320 = 2560
$\therefore$ Vac = S/.2560

59. Una persona debe la suma de 3600 dólares pagables dentro de 8 meses, pero decide pagar 185 dólares al contado y firmando dos letras de cambio, uno de 2880 dólares pagadera dentro de 5 meses y la otra dentro de un año, con tasas de descuento del 5% anual. Calcular el valor nominal de la segunda letra de cambio.

Resolución:

Valor actual de la deuda = Pago al contado + $\sum$Va letras

$$3600\left(1-\frac{5\times 8}{1200}\right) = 185 + Va_1 + Va_2$$

$$3295 = 2880\left(1-\frac{5\times 5}{1200}\right) + Va_2$$

$$475 = Va_2 = V\left(1-\frac{5\times 1}{100}\right)$$

$\therefore$ V = S/.500 (valor de la segunda letra)

60. La suma de los valores nominales de dos letras es de S/.16 800 y se ha recibido por ellas S/.16 560 descontadas al 3% semestral. La primera por dos meses y la segunda por tres meses. ¿Cuál es el valor nominal de cada una de ellas?

Resolución:

3% semestral < > 6% anual
$V_1 + V_2 = 16\,800$ ...(1)
$Va_1 + Va_2 = 16\,560$ ...(2)
En (1) − (2): $(V_1 - Va_1) + (V_2 - Va_2) = 240$

$$D_1 + D_2 = \frac{V_1\times 6\times 2}{1200} + \frac{V_2\times 6\times 3}{1200}$$

$$\Rightarrow D_1 + D_2 = \frac{2V_1}{200} + \frac{3V_2}{200} = 240$$

$\Rightarrow 2V_1 + 3V_2 = 48\,000$ ...(3)
$\therefore$ De (1) y (3): V_2 = S/.14 400; V_1 = S/.2400

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2001 - I)

Hallar el valor nominal de un pagaré negociado al 2/3% mensual por 3 meses, sabiendo que la diferencia entre el descuento comercial y el racional es de $2.

A) $5000 B) $5100 C) $5200
D) $5300 E) $5400

Resolución:

Sabemos que: $Vn = \frac{Dc\times Dr}{Dc - Dr}$

Aplicando: $Vn = \frac{Dc\times Dr}{2}$ ... (α)

Luego: Dc − Dr = I_{Dr}; I_{Dr}: Interés generado por Dr

Aplicando: $\frac{Dr(2/3)(3)}{100} = 2 \Rightarrow$ Dr = 100; Dc = 102

En (α): Vn = 5100 $\therefore$ Vn = $5100

Clave: B

PROBLEMA 2 (UNI 2003 - II)

Si la diferencia entre el descuento comercial y el descuento racional de un pagaré de $900 descontado 60 días antes de su vencimiento es de $0,09, entonces el valor aproximado de la tasa de descuento es:

A) 4% B) 5% C) 6% D) 7% E) 8%

Resolución:

Del pagaré sabemos:
Vn = 900; t = 60 días < > 1/6 año; Dc − Dr = 0,09

Sabemos que:
$Dc = Vn\times r\%\times t$ ...(1)

$$Dr = \frac{Vn\times r\%\times t}{1 + r\%\times t} \quad ...(2)$$

$$(1) - (2): Dc - Dr = \frac{Vn(r\%)^2(t)^2}{1 + r\%(t)} \quad ...(3)$$

Reemplazando en (3) los valores:

$$0{,}09 = \frac{900(r/100)^2(1/6)^2}{1 + (r/100)(1/6)} \Rightarrow 100r^2 - r - 3600 = 0$$

$\therefore$ r = 6,005

Clave: C

PROBLEMA 3 (UNI 2004 - II)

Se tiene 2 pagarés uno a 8% de descuento anual pagadero en 45 días y el otro al 5% de descuento anual pagadero en 72 días. Si el valor actual de los 2 pagarés suma S/.8500, entonces la suma de sus valores nominales es, de nuevos soles.

A) 8585,9 B) 8590,8 C) 8875,0
D) 9444,4 E) 10119,0

Resolución:

Recordando: $Va = Vn\left(1 - \frac{r\times t}{36\,000}\right)$

t (en días); r (porcentaje anual)
Aplicando:

$$Va_1 = Vn_1\left(1 - \frac{8\times 45}{36\,000}\right) = \frac{99Vn_1}{100} \quad ...(1)$$

$$Va_2 = Vn_2\left(1 - \frac{5\times 72}{36\,000}\right) = \frac{99Vn_2}{100} \quad ...(2)$$

Sumando (1) y (2): $Va_1 + Va_2 = \frac{99}{100}(Vn_1 + Vn_2)$

Del dato del problema: $Va_1 + Va_2 = 8500$

$\therefore\ Vn_1 + Vn_2 = 8585{,}9$

Clave: A

PROBLEMA 4 (UNI 2007 - I)

Dos pagarés por igual valor nominal que se vencen dentro de 30 y 40 días, respectivamente, son descontados comerciaimente hoy al a% anual. Entonces el valor nominal de cada uno de ellos, si se recibe un total de S nuevos soles, es:

A) $\frac{400aS}{800-a}$ B) $\frac{800aS}{400-a}$ C) $\frac{800S}{400+a}$

D) $\frac{400S}{800-a}$ E) $\frac{400S}{800+a}$

Resolución:

Sea la tasa de interés anual a%, entonces:

$D1 = Vn\left(\frac{a\%}{12}\right)(1)$ ∧ $D2 = Vn\left(\frac{a\%}{12}\right)(2)$

(1 mes) (2 meses)

$S = (Vn - D1) + (Vn - D2)$

$$S = Vn - \frac{aVn}{1200} + Vn - \frac{2aVn}{1200}$$

$$S = 2Vn - \left(\frac{3aVn}{1200}\right) = 2Vn - \frac{aVn}{400}$$

$$S = \frac{800Vn - aVn}{400} \quad \therefore\ Vn = \frac{400S}{800-a}$$

Clave: D

PROBLEMA 5 (UNI 2010 - I)

Un deudor tiene que pagar al banco tres letras. La primera de S/.80 000 pagadera dentro de 30 días; la segunda de S/.200 000 pagadera en 60 días y la tercera de S/.400 000 con un plazo de 90 días. ¿Dentro de qué tiempo (en días) debe ser pagada una letra única cuyo valor nominal sea la suma de los valores nominales de las tres letras? Suponga que la tasa de interés es constante.

A) 70 días B) 71 días C) 72 días
D) 73 días E) 74 días

Resolución:

Datos:

Vn_1 = S/.8000; Vn_2 = S/.20 000; Vn_3 = S/.40 000

t_1 = 30 días; t_2 = 60 días; t_3 = 90 días

Hallamos el tiempo de vencimiento común:

$$t = \frac{8000(30) + 20\,000(60) + 40\,000(90)}{8000 + 20\,000 + 40\,000} \Rightarrow \mathbf{t = 74{,}11}$$

∴ Como el problema pide el tiempo en días, se considerará 74 días.

Clave: E

PROBLEMA 6 (UNI 2011 - II)

Un empresario firma una letra por S/.48 000 a ser pagada en 8 meses al 7% de descuento anual. Luego de transcurridos 3 meses decide cancelar la letra, pues debe viajar para radicar en Australia. Calcula la diferencia entre la cantidad que recibió y canceló el empresario en nuevos soles, sabiendo que el acreedor cede un bono del 0,2% sobre el valor nominal, si se cancela al final.

A) 740 B) 742 C) 744
D) 746 E) 748

Resolución:

El empresario recibe:

$$Vac_{8meses} = 48\,000 - \frac{48\,000(7)(8)}{1200}$$

$$Vac_{8meses} = 48\,000 - 2240 = 45\,760$$

El empresario cancela:

$$Vac_{5meses} - \text{Bono} = 48\,000 - \frac{48\,000(7)(5)}{1200} - 0{,}2\%(48\,000)$$

$$Vac_{5meses} = 48\,000 - 1400 - 96 = 46\,504$$

∴ S/.46 504 − S/.45 760 = S/.744

Clave: C

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. El valor nominal de una letra es S/.4900, descontada racionalmente se obtiene por ella S/.4375. ¿Cuánto se obtendría si el descuento fuese comercial al mismo porcentaje?

   A) S/.4200 B) S/.4300 C) S/.4324
   D) S/.4312 E) S/.4336

2. Hallar el precio al contado de un artefacto, por el cual se firman 2 letras: una de $200 a 4 meses y otra de $240 a 5 meses, siendo la tasa de descuento de 24%.

   A) $400 B) $410 C) $420
   D) $415 E) $404

3. A cambio de una letra que vencía dentro de 3 meses, un acreedor recibió otra letra de S/.2370 pagadera a los 5 meses. ¿Cuál era el valor nominal de la primera? (Tasa de descuento 5%).

   A) S/.2350 B) S/.2365 C) S/.2370
   D) S/.2375 E) S/.2345

4. Dos letras, una de S/.1980 pagadera a los 60 días y otra de S/.1800 pagadera a los 84 días son descontadas al mismo porcentaje. ¿Cuál fue la tasa de descuento considerando que se recibió S/.185,40 más por la primera que por la segunda?

   A) 6,5% B) 3% C) 6%
   D) 4,5% E) 5%

5. El banquero descuenta dos letras: 30 y 50 días, respectivamente, ambas al 5%. Si los valores nominales están en la relación de 4 a 3. Hallar el valor actual de la segunda letra, si la suma de los descuentos es S/.13,50.

   A) S/.1000 B) S/.1072,5 C) S/.1740
   D) S/.1800 E) S/.1200

6. ¿Cuánto se recibirá por descontar una letra de S/.5400 el 10 de julio, al 5% cuatrimestral, sabiendo que dicho documento vence el 14 de octubre siguiente. Se sabe además, que el banco cobra 1,5% de comisión y el 2% por el cambio de plazo?

   A) S/.4995 B) S/.5184 C) S/.5211
   D) S/.4980 E) S/.4975

7. Dentro de que tiempo, se podrá pagar con S/.2500, colocados al 6% cuatrimestral, una letra de cambio que vence dentro de 2 años, descontable comercialmente al 15%. El valor nominal del documento es S/.3000.

   A) 2 años B) 16 meses
   C) 18 meses, 25 días D) 10 meses, 20 días
   E) 8 meses, 15 días

8. Al comprar una refrigeradora a crédito se dio una cuota inicial de $450 y por el saldo se firmó una letra de $600 pagadera a 8 meses y que será descontada al 36% anual. Hallar el precio al contado de la refrigeradora.

   A) $902 B) $904 C) $906
   D) $908 E) $910

9. Hallar el valor nominal de un documento, sabiendo que sus 2 descuentos (comercial y racional) suman S/.2880 y que están en la relación de 7 a 5, respectivamente.

   A) S/.4200 B) S/.3500 C) S/.6300
   D) S/.2800 E) S/.4900

10. En qué fecha ha sido aceptada una letra de S/.2340 al 18% y pagadera a los 45 días; si se sabe que al venderla el 16 de mayo se recibe por ella S/.2313,09.

    A) 20 de abril B) 22 de abril C) 24 de abril
    D) 26 de abril E) N. A.

11. ¿Cuánto menos se hubiera recibido por una letra de S/.42 000 si se hubiera descontado comercialmente, si al descontar racionalmente se obtiene S/.40 000?

    A) S/.250 B) S/.200 C) S/.120
    D) S/.100 E) S/.150

12. Calcular el valor nominal de una letra, que descontada por 4 meses al 5%, da una diferencia de S/.2 entre el descuento comercial y el descuento racional.

    A) S/.7320 B) S/.3230 C) S/.7050
    D) S/.4025 E) S/.7280

13. Hallar la tasa de descuento anual a la que ha sido descontado un documento, sabiendo que al ser descontado 8 meses antes de su vencimiento, se recibe el 75% de su valor nominal.

    A) 30,5% B) 32,75% C) 36%
    D) 37,5% E) 45%

14. El 5 de abril se firmó una letra por S/.2250 con fecha de vencimiento el 4 de julio; si se descontó dicha letra el 17 de mayo del mismo año, ¿cuánto se recibió por ella, considerando una tasa de descuento el 11% semestral?

    A) S/.2120 B) S/.2184 C) S/.2234
    D) S/.3000 E) S/.3500

15. Una persona debe a otra una letra de S/.12 000 pagadera a los 6 meses, conviene en pagar su deuda mediante 2 pagos iguales, que vence a los 2 y 8 meses, respectivamente. ¿Cuál es el valor nominal de estos pagos, si se aplicara un descuento comercial de 40% anual?

A) S/.5460 B) S/.4860 C) S/.5740
D) S/.5470 E) S/.5760

16. Hoy se firma una letra de cambio por una deuda, considerando un interés simple del 30%, con vencimiento en 8 meses. ¿Qué tasa de descuento se debe aplicar a dicho efecto de comercio para que al descontarla comercialmente dentro de 2 meses no exista pérdida de dinero?

A) 25% B) 36% C) 48%
D) 30% E) 35%

17. Una persona descuenta dos letras a 10 y 80 días, respectivamente, ambas al 20%. Si los valores nominales están en la relación de 16 a 5, determinar el valor de la segunda letra, si la suma de los descuentos es S/.70.

A) S/.1075 B) S/.1895 C) S/.5500
D) S/.2901 E) S/.3000

18. Calcular el valor nominal de una letra, que descontada por un año al 12%, da una diferencia de S/.36 entre el descuento abusivo y el descuento matemático.

A) S/.2000 B) S/.2300 C) S/.2800
D) S/.3200 E) S/.4200

19. El valor nominal de una letra es los 4/5 del valor de la otra. Se han descontado comercialmente al 4% la primera por un mes y 15 días y la segunda por 3 meses; el descuento de esta última fue de S/.2050. ¿Cuál fue el descuento de la primera?

A) S/.790 B) S/.800 C) S/.810
D) S/.820 E) S/.830

20. ¿Cuánto se recibirá por una letra de S/.8000, el 26 de agosto, sabiendo que vencía el 30 de noviembre y que fue descontada a una tasa de 5% bimestral?

A) S/.7360 B) S/.7350 C) S/.7340
D) S/.7330 E) S/.7320

21. Hallar el tiempo de vencimiento de un pagaré, si por ser descontada al 6% trimestral se recibió por ella el 80% de su valor nominal.

A) 10 meses B) 11 meses
C) 1 año D) 1 año, 2 meses
E) 1 año, 3 meses

22. ¿Cuál será el descuento comercial y el valor efectivo de un pagaré de S/.7200 que vence el 15 de noviembre y se negocia al 5% el 17 de agosto del mismo año?

A) S/.90 y S/.6300 B) S/.85 y S/.7114
C) S/.95 y S/.7105 D) S/.91 y S/.7109
E) S/.99 y S/.7110

23. La suma de los valores nominales de 2 letras es de S/.16 800; habiéndose recibido S/.16 560 por ambas descontadas al 6%, la primera por dos meses y la segunda por 3 meses. Hallar la diferencia de los valores nominales.

A) S/.10 000 B) S/.9600 C) S/.12 000
D) S/.11 600 E) S/.10 800

24. Faltan 75 días para el vencimiento de una letra y se sabe que los descuentos comercial y racional están en la relación de 4 a 3. ¿Cuántos días habrá que esperar para que los descuentos mencionados guarden la relación de 6 a 5?

A) 45 días B) 36 días C) 32 días
D) 30 días E) 12 días

25. Se va a reemplazar dos letras de S/.12 000 y S/.36 000 que vencen el 12 de noviembre y el 18 de diciembre de este año. ¿Cuándo vencerá la letra única que los reemplace?

A) 8 dic. B) 9 dic. C) 10 dic.
D) 11 dic. E) 12 dic.

26. Un señor deposita S/.135 000 en el banco, al 30% anual. Determinar en cuántos meses el monto producido por dicho capital será igual al valor actual de una letra de S/.180 000 que vence dentro de 16 meses y que es descontada al 15% anual.

A) 2,4 meses B) 3 meses C) 8/3 meses
D) 3,2 meses E) N. A.

27. Hallar el valor nominal de una letra que al ser descontada 1 año, 3 meses antes de su vencimiento al 24% anual se ha recibido por ella S/.4200.

A) S/.7200 B) S/.6300 C) S/.4900
D) S/.5600 E) S/.6000

28. El 10 de julio es aceptada una letra de S/.6000 que vence el 30 de octubre del mismo año. ¿Cuánto recibió por dicha letra si se descontó el 20 de setiembre al 9% semestral?

A) S/.5820 B) S/.5840 C) S/.5860
D) S/.5880 E) S/.5900

29. ¿Cuánto se recibirá por un pagaré de S/.12 000 que se descontará al 15% anual el día 20 de septiembre, sabiendo que dicho documento vence el 19 de noviembre del mismo año?

A) S/.116 000 B) S/.11 700 C) S/.11 500
D) S/.11 750 E) N. A.

30. ¿En qué fecha vencerá un documento de S/.28 800 que se giró el 12 de enero si por descontarse el 15 de marzo al 60% anual se recibió por ello S/.27 600?

A) 9 de abril B) 10 de abril C) 11 de abril
D) 12 de abril E) 13 de abril

31. ¿Cuál es la tasa de descuento anual a la que ha sido descontado un documento, sabiendo que al ser renegociado 4 meses antes de su vencimiento se recibe el 84% de su valor nominal?

A) 48% B) 36% C) 50%
D) 56% E) 45%

32. Al comprar un TV a crédito, se pagó una cuota inicial de $400 y por el saldo se firma una letra de $600 pagadera a los 5 meses y que será descontada al 24% anual. Hallar el precio al contado del TV.

A) $940 B) $960 C) $970
D) $980 E) $1000

33. Una videograbadora que al contado cuesta $1500, se compró a plazos dando una cuota inicial de $360 y por el saldo se firmó tres letras trimestrales por el mismo valor. Hallar el valor de cada letra, si la tasa de descuento es del 10% anual.

A) $500 B) $400 C) $460
D) $440 E) $420

34. Se negocia un pagaré 60 días antes del vencimiento; si el descuento fue el 5% del valor nominal del pagaré, ¿qué tasa de descuento comercial anual pagó?

A) 45% B) 30% C) 15%
D) 10% E) 20%

35. En un pagaré el descuento comercial y el valor actual comercial están en la relación de 1 a 3. ¿Qué porcentaje del valor nominal es el descuento interno?

A) 20% B) 35% C) 25%
D) 40% E) 30%

36. Una letra de $225 ha sido descontada al 8% anual obteniéndose $217,50. ¿Dentro de qué tiempo vencía la letra?

A) 5 meses B) 8 meses C) 10 meses
D) 6 meses E) 9 meses

37. La suma de los descuentos al 30% de 2 letras una por 4 meses y otra por 5 meses es S/.5750. Determinar la suma de los valores actuales si el valor nominal de la segunda letra es de S/.25 840.

A) S/.45 190 B) S/.45 490 C) S/.45 590
D) S/.45 390 E) S/.45 290

38. Una letra es pagadera dentro de 8 meses. Si se le descuenta el 5% en lugar del 6% se recibiría S/.32 más. Hallar el valor nominal de dicha letra.

A) S/.1200 B) S/.4800 C) S/.1440
D) S/.3600 E) S/.5400

39. El valor actual comercial de una letra es S/.4700 y el descuento racional es 3% del valor nominal. ¿Cuál es el valor nominal de la letra?

A) S/.4890 B) S/.4870 C) S/.4850
D) S/.4830 E) S/.4810

40. Se compró un objeto en S/.12 800, se dio S/.6500 de cuota inicial y se firmaron tres letras mensuales (de igual valor las tres); si la tasa del descuento es 6%, ¿cuál es el valor escrito en cada letra?

A) S/.2020,20 B) S/.2112,12
C) S/.2121,21 D) S/.2333,33
E) S/.2312,12

41. La suma de los valores nominales de dos letras es de S/.8400 habiéndose recibido S/.8280 por ambas descontadas al 6%, la primera por 2 meses y la segunda por 3 meses. Hallar el valor nominal de la letra mayor.

A) S/.5500 B) S/.6200 C) S/.6500
D) S/.7200 E) S/.7500

42. Calcular el valor de una letra que descontada 3 meses al 8% dé una diferencia de S/.3 entre el descuento comercial y racional.

A) S/.7650 B) S/.7250 C) S/.7150
D) S/.7000 E) N. A.

43. Se ofrece un automóvil por $8630 al contado, o una cuota anual inicial de $2000 y 18 letras mensuales por el mismo valor. ¿Cuál es el monto de cada letra si la tasa de descuento es el 10%?

A) $400 B) $200 C) $600
D) $800 E) N. A.

44. Un comerciante tiene tres letras por cancelar, la primera por S/.8000 dentro de 40 días, la segunda por S/.7000 y la tercera por S/.5000 dentro de 3 meses, 10 días. Se decide cambiar las letras por una sola cuyo valor nominal sea S/.20 000 y firmada para cancelar dentro de 47 días. ¿Dentro de cuánto tiempo vencía la segunda letra?

A) 90 días B) 98 días C) 60 días
D) 65 días E) 80 días

45. Para 3 letras se cumple lo siguiente:
Vn: fecha de vencimiento

1000: x de noviembre
2000: 2x de noviembre
1000: 3x de noviembre
Si la fecha de vencimiento común fue el 12 de noviembre, hallar "x".

A) 18 B) 9 C) 15
D) 6 E) 7

46. El valor nominal de una letra es S/.4900 descontada racionalmente se obtiene S/.4375. ¿Cuánto se obtendría si el descuento fuese comercial a la misma tasa?

A) S/.4000 B) S/.4200 C) S/.4212
D) S/.4312 E) S/.4300

47. El descuento comercial y el descuento matemático que tendrá una letra de S/.126 000 pagadera a los 75 días son entre sí como 8 es a 7. ¿Cuánto se recibió por dicha letra si se descuenta comercialmente?

A) S/.102 000 B) S/.106 000 C) S/.108 000
D) S/.112 000 E) S/.116 000

48. Ángela debe cancelar S/.4800 dentro de 8 meses. Aproximadamente cuánto pagará si la hiciera a los 4 meses. La tasa de descuento es del 6%.

A) S/.4500 B) S/.4700 C) S/.4600
D) S/.4100 E) S/.4300

49. Una persona recibe el 60% del valor de una letra al ser descontada al 48%. Si el descuento se hubiera aplicado racionalmente hace 7 meses se hubiera recibido S/.600. Hallar el valor nominal de dicha letra.

A) S/.1156 B) S/.1000 C) S/.1328
D) S/.1008 E) S/.1296

50. El valor actual comercial de una letra es 24 veces el descuento comercial de la misma. Si falta para su vencimiento 2 meses, ¿a qué tasa se descontó?

A) 24% B) 25% C) 26%
D) 30% E) 45%

51. En un pagaré, el descuento comercial y el valor actual comercial están en la relación de 1 a 8. ¿Qué porcentaje del valor nominal es el descuento interno?

A) 10% B) 15% C) 20%
D) 25% E) 30%

52. Dante compra un artefacto cuyo precio al contado es S/.1200; da una cuota inicial de S/.400 y firma una letra a 4 meses; la tasa de descuento es 5% mensual. ¿Cuál es la tasa de interés simple mensual que pagó?

A) 6,25% B) 3,75% C) 4,25%
D) 4,8% E) 5,25%

53. ¿Cuál es el valor nominal de una letra que descontada al 24% en 120 días, ha dado un valor actual de S/.23 920?

A) S/.29 320 B) S/.30 400 C) S/.24 000
D) S/.22 000 E) S/.26 000

54. Si una letra se cancela 2 meses antes, se le descuenta su 1,5%; si se paga 3 meses antes, S/.450 ¿Cuál es su valor nominal?

A) S/.15 000 B) S/.16 000 C) S/.17 000
D) S/.18 000 E) S/.20 000

55. Determinar el valor nominal de una letra que, descontada por seis meses al 10%, dé una diferencia de S/.2000 entre el descuento comercial y el descuento racional.

A) S/.840 000 B) S/.720 000 C) S/.600 000
D) S/.420 000 E) S/.810 000

56. ¿Cuál es el valor nominal de una letra que al 1% mensual y en 90 días ha dado un valor actual de S/.60 000?

A) S/.60 150,37 B) S/.61 855,67
C) S/.68 155,76 D) S/.62 340,21
E) S/.65 167,24

57. Para cancelar una deuda de S/.146 590 se firma 25 letras mensuales de igual valor, descontables al 10%. Hallar el valor nominal de cada letra.

A) S/.6576 B) S/.7000 C) S/.8000
D) S/.6900 E) S/.7450

58. Se debe S/.2490 que han de pagarse dentro de 20 meses. ¿Cuándo se puede saldar la deuda con S/.2400? El descuento racional es del 5%.

A) 9 meses B) 11 meses C) 7 meses
D) 13 meses E) 5 meses

59. Salvador debe pagar una letra de S/.5000 el 14 de abril; pero la letra se hace efectiva el 5 de marzo con un valor de S/.4950. ¿Cuál fue la tasa de descuento anual aplicada?

A) 9% B) 10% C) 12%
D) 15% E) 18%

60. Se compró un objeto en S/.12 800, se dio S/.6500 de cuota inicial y se firmaron 3 letras mensuales (de igual valor). Si la tasa de descuento es 6%, ¿cuál es el valor de cada letra?

A) S/.2020,20 B) S/.2112,12 C) S/.2121,21
D) S/.2333,33 E) S/.2312,12

61. Felipe tiene 2 letras, cuya fecha de vencimiento es la misma; son descontadas con la misma tasa del 7%. Si una de ellas fue firmada por S/.6200 más y

su descuento es S/.868 más que la otra. Hallar el tiempo de descuento.

A) 1 año B) 2 años C) 3 años
D) 4 años E) 9 meses

62. Al vender un auto en 4000 soles, se dio la cuota inicial 2010 soles y el resto se iba a pagar dentro de 45 días. Encontrar el valor nominal de la letra que equivaldría al resto sabiendo que se descuenta al 4%.

A) S/.1950 B) S/.2000 C) S/.2015
D) S/.3000 E) S/.1500

63. Una persona compra un artículo cuyo precio al contado es S/.6000; pagando S/.2562, al inicio, decide firmar letras mensuales de S/.450 cada una. ¿Cuántas letras firmó si el descuento comercial fue del 6% semestral?.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 10

64. Una letra es pagadera dentro de 8 meses. Si se le descuenta el 5% en lugar del 6% se recibiría S/.32 más. Hallar el valor nominal de dicha letra.

A) S/.4500 B) S/.4600 C) S/.4700
D) S/.4800 E) S/.4000

65. ¿En qué fecha debe descontarse una letra de S/.1 800 000, al 20% anual que fue aceptada el 21 de septiembre y pagadera a los 50 días, para que se reciba por esta S/.1 768 000?

A) 10 de septiembre B) 19 de octubre
C) 12 de noviembre D) 9 de octubre
E) 21 de noviembre

66. Por una letra de 9000 dólares se ha pagado 8635 dólares, sabiendo que faltaban 73 días para su vencimiento. Calcular la tasa de descuento.

A) 10% B) 15% C) 20%
D) 30% E) 40%

67. ¿Cuál es el valor nominal de una letra, si vence dentro de 15 días y al descontarla comercialmente al 33% anual, se ha recibido S/.15 780?

A) S/.16 000 B) S/.18 500 C) S/.17 000
D) S/.17 500 E) S/.20 000

68. Se tiene una letra que vence dentro de 6 meses y que se vende a una tasa de descuento racional del 15% mensual. ¿Qué tanto por ciento más se ganaría si se vendiera dentro de 2 meses?

A) 19% B) 10,5% C) 18,3%
D) 15,6% E) 18,75%

69. Si se descuenta matemáticamente una letra, su valor actual es los 10/11 del valor nominal. Si se descontara comercialmente, ¿qué porcentaje del valor nominal sería el valor actual?

A) 90% B) 95% C) 97%
D) 93% E) 98%

70. Una letra pagadera dentro de 2 meses se le descuenta al 3%. ¿Cuál es el valor nominal, sabiendo que la diferencia entre el valor actual racional y el valor actual comercial es S/.5?

A) S/.210 000 B) S/.201 000 C) S/.240 000
D) S/.234 000 E) S/.204 000

71. Se tiene una letra de S/.13 000 que vence el 15 de julio, una de S/.12 000 que vence el 19 de agosto, y otra de S/.20 000, si las 3 letras se pueden reemplazar por una de S/. 45 000 que vence el 24 de agosto. Hallar en qué día de septiembre vence la tercera letra.

A) 14 B) 17 C) 18
D) 22 E) 28

72. Al llenar una letra, que vence dentro de 3 meses, en un banco donde la tasa de descuento es del 20%, se recibe por ella S/.47 500. Pero si se llevara a otro banco, donde la tasa es del 18%, se recibiría S/.47 750. Hallar el valor nominal de la letra.

A) S/.50 000 B) S/.60 000 C) S/.20 000
D) S/.17 000 E) S/.25 000

73. El valor actual de una letra es S/.830, si se descontara dentro de los 3/7 del tiempo que falta para su vencimiento obtendría un descuento de S/.840. Hallar el valor nominal de la letra.

A) S/.2000 B) S/.210 C) S/.2300
D) S/.2500 E) S/.840

74. Un artículo se puede comprar de dos formas:
- Mediante dos letras de iguales valores nominales pagaderas al cabo de dos meses y tres meses, respectivamente, previa cuota inicial de S/.440.
- Mediante una sola letra cuyo valor nominal es de S/.700 pagadera dentro de 5 meses.

Calcular el valor nominal de las letras de la primera forma, considerando una tasa de descuento del 24% anual.

A) S/.510 B) S/.210 C) S/.110
D) S/.940 E) S/.100

75. Raquel, al comprar una computadora, da una cuota inicial de $250 y luego firma 9 letras mensuales de $120 cada una, a una tasa de descuento del 36% anual. ¿Cuál sería el precio al contado de la computadora?

A) $1142 B) $1168 C) $1230
D) $1570 E) $1580

76. Se tiene una letra de S/.280, que vence el 2 de noviembre. ¿En qué fecha debe descontarse para

recibir un valor actual de S/.210? Considerar la tasa del 45% semestral.

A) 28 de julio B) 25 de julio C) 26 de julio
D) 27 de julio E) 24 de julio

77. Una letra se descuenta racionalmente cinco meses antes de su vencimiento, a una tasa de interés simple de 52% anual. Si el descuento resultó S/.18 200, ¿cuál es el valor nominal de la letra?

A) S/.102 200 B) S/.180 340 C) S/.100 140
D) S/.80 560 E) S/.342 082

78. Una persona adquiere un automóvil cuyo precio al contado es de S/.20 000 paga al instante S/.5320 y por el saldo firma letras todas del mismo valor de S/.1600 con vencimiento mensual. Si la tasa de descuento es de 18%, ¿cuántas letras firmó?

A) 20 B) 12 C) 10
D) 18 E) 15

79. La suma de los valores nominales de dos letras es S/.8400 y se ha recibido por ellas S/.8280 descontadas al 6%, la primera por 2 meses y la segunda por 3 meses. Hallar la diferencia de los valores nominales de dichas letras de cambio.

A) S/.4200 B) S/.4500 C) S/.4800
D) S/.6000 E) S/.6600

80. Una letra de S/.370 000 se ha negociado faltando 36 días para su vencimiento. Si se hubiera negociado 13 días antes, su valor hubiera sido S/.9100 menos. ¿Cuánto se recibirá por dicha letra? Dar como respuesta la suma de sus cifras.

A) 12 B) 15 C) 18 D) 19 E) 20

81. Una letra es pagadera dentro de 8 meses. Si se descuenta el 5% en lugar del 6% se recibiría S/.32 más. Hallar el valor nominal de dicha letra.

A) S/.4500 B) S/.4600 C) S/.4700
D) S/.4800 E) S/.4000

82. Al calcular el vencimiento medio de k letras cuyos valores nominales son proporcionales a 1; 2; 3; ...; con vencimientos de 1; 3; 5; 7; ... meses, respectivamente, se obtiene una cantidad que es $\overset{\circ}{4} + 1$. Hallar el valor de k.

A) $\overset{\circ}{4}$ B) $\overset{\circ}{4} + 2$ C) $\overset{\circ}{3} + 1$
D) $\overset{\circ}{5} + 1$ E) $\overset{\circ}{7} - 1$

83. Se tiene una letra de S/.800. ¿Cuánto se recibirá por dicha letra, si se le descuenta al 10% trimestral, sabiendo que falta para su vencimiento 54 días?

A) S/.701 B) S/.720 C) S/.711
D) S/.758 E) S/.752

84. Se tienen tres letras de S/.1890; S/.1980 y S/.2070 pagaderos dentro de 30; 36 y 90 días. Calcular el valor nominal de la letra pagadera dentro de 50 días que produzca el mismo valor actual que la suma de los valores actuales de las tres letras. Se tomará el descuento racional al 15% trimestral

A) S/.5400 B) S/.5850 C) S/.5200
D) S/.5600 E) S/.6100

85. Determinar el valor nominal de una letra que, descontada por seis meses al 10%, dé una diferencia de S/.2000 entre el descuento comercial y el descuento racional.

A) S/.840 000 B) S/.720 000 C) S/.600 000
D) S/.420 000 E) S/.810 000

86. El precio al contado de un equipo es de S/.1020, en una compra se ha pagado S/.300 de cuota inicial y se ha firmado 4 letras trimestrales de igual valor nominal. Hallar el valor nominal común suponiendo un descuento comercial del 16%.

A) 100 B) 190 C) 200
D) 205 E) 280

87. Una persona debe pagar una letra de 5000 soles el 13 de abril. Paga el 4 de marzo 4990 soles, ¿cuál fue la tasa descontable?

A) 15% B) 8% C) 10%
D) 12% E) 9%

88. Tres letras han sufrido el mismo descuento y tienen como valores nominales a 800, 1000 y 1200 soles, siendo sus tasas de descuento 5%; 6% y 2,5%, respectivamente. Si el tiempo de descuento de las 3 letras suman 9 meses, ¿cuál es el valor actual de la letra descontada al 5%?

A) S/.790 B) S/.400 C) S/.1310
D) S/.7900 E) S/.5420

89. Si una letra se cancela 2 meses antes, se le descuenta su 1,5% y si se paga 3 meses antes, se le descuenta S/.450. ¿Cuál es su valor nominal?

A) S/.15 000 B) S/.17 000 C) S/.20 000
D) S/.24 000 E) S/.18 000

90. Una letra de 3000 soles vence el 10 de mayo. Si se paga el 20 de abril se descuenta 10 soles ¿Cuánto se pagará el 8 de abril?

A) S/.2934 B) S/.2534 C) S/.2734
D) S/.2834 E) S/.2634

CLAVES

1. D	13. D	25. B	37. E	49. D	61. B	73. C	85. A
2. A	14. B	26. C	38. B	50. A	62. B	74. E	86. C
3. A	15. E	27. E	39. C	51. A	63. D	75. B	87. E
4. C	16. A	28. D	40. C	52. A	64. D	76. B	88. A
5. B	17. A	29. B	41. D	53. E	65. D	77. A	89. C
6. A	18. C	30. A	42. A	54. E	66. C	78. C	90. A
7. D	19. D	31. A	43. A	55. A	67. C	79. D	
8. C	20. A	32. A	44. C	56. B	68. E	80. D	
9. A	21. A	33. B	45. D	57. A	69. A	81. D	
10. C	22. A	34. B	46. D	58. B	70. B	82. C	
11. D	23. C	35. A	47. E	59. A	71. D	83. E	
12. A	24. D	36. A	48. B	60. C	72. A	84. B	

Reparto proporcional | 16 capítulo

Nicómaco de Gerasa

Grecia, 60 - Grecia, 120

Nicómaco de Gerasa nació alrededor del año 100 d. C. en Gerasa (actualmente Jerash, en Jordania). Fue un filósofo y matemático neopitagórico. Autor de la obra de gran influencia *Arithmetike eisagoge* (Introducción a la aritmética), un tratado en donde aborda la teoría de los números, el cual se constituyó en el manual de base de lasescuelas platónicas;traducido en varias ocasiones, fue considerado una autoridad durante diez siglos.

Poco se sabe de la vida de Nicómaco con certeza, excepto que venía de Gerasa y que era pitagórico. La época en que vivió se infiere indirectamente por citaciones, tanto de Nicómaco mismo (cita a Trasilo de Mendés, que muere en el 36 d. C.) como de otros autores (Apuleyo traduce Introducción a la aritmética al latín en el siglo II).

La obra de Nicómaco es una observación de las propiedades de los números y permite comprender mejor la filosofía de Pitágoras y de Platón en el dominio de las matemáticas. Nicómaco reconoce cuatro «métodos científicos» o «ciencias hermanas»: la aritmética, la música, la geometría y la astronomía. Señalade la aritmética: «Preexiste a las otras en la mente del dios artesano». *Arithmetike eisagoge* (Introducción a la aritmética) es el primer trabajo en donde se trata la Aritmética de forma separada a la Geometría. En él, Nicómaco estudia los números y sus propiedades tanto metafísicas (cualidad, cantidad, forma, tamaño, etc.) como matemáticas (define los números pares e impares, los primos y los compuestos, los números perfectos y los números amigables).

Fuente: Wikipedia

DEFINICIÓN

El reparto proporcional es una operación que consiste en repartir una cantidad, en partes proporcionales a ciertos números, denominados números proporcionales.

PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LOS NÚMEROS PROPORCIONALES

Si a los números proporcionales, se les multiplica o dividen por una misma cantidad, el reparto no se altera.

CLASES DE REPARTO

Los repartos pueden ser: simple directo, simple inverso o compuesto.

Reparto simple directo

El reparto proporcional simple directo, consiste en repartir una cantidad, en partes que sean DP a ciertos números.

Ejemplo:

Repartir 9600 en partes que sean DP a los números: 48; 64 y 80. Indicar cada una de las partes.

Resolución:

Sean A, B y C las partes que se obtienen del reparto.

Partes	DP		
A	$48 = 3 \times 16$	$\rightarrow$	3k
B	$64 = 4 \times 16$	$\rightarrow$	4k
C	$80 = 5 \times 16$	$\rightarrow$	5k
		Total:	12k

Luego: $12k = 9600 \Rightarrow k = 800$

Las partes correspondientes, serán:

$A = 3 \times 800 = 2400$; $B = 4 \times 800 = 3200$

$C = 5 \times 800 = 4000$

En todo reparto simple directo, al menor número le corresponde la menor parte y al mayor número le corresponde la mayor parte.

Reparto simple inverso

El reparto proporcional simple inverso consiste en repartir una cantidad, en partes que sean IP a ciertos números.

El reparto inverso es equivalente a realizarlo en forma DP a las inversas de los números dados.

Ejemplo:

Repartir 5430 en partes que sean IP a los números 5/3; 4/5 y 6/7. Indicar cada una de las partes.

Resolución:

Multiplicamos los números proporcionales por el MCM de los denominadores y el reparto no se altera.

Sean A, B y C las partes que se obtienen del reparto.

Partes	IP <> DP	MCM(5; 4; 6) = 60		
A	$\frac{5}{3}$	$\left(\frac{3}{5}\right)60 = 36$	$\rightarrow$	36k
B	$\frac{4}{5}$	$\left(\frac{5}{4}\right)60 = 75$	$\rightarrow$	75k
C	$\frac{6}{7}$	$\left(\frac{7}{6}\right)60 = 70$	$\rightarrow$	70k
			Total:	181k

Luego: $181k = 5430 \Rightarrow k = 30$

Las partes correspondientes serán:

$A = 36 \times 30 = 1080$; $B = 75 \times 30 = 2250$

$C = 70 \times 30 = 2100$

Observaciones

- En el reparto inverso, al mayor número le corresponde la menor parte y al menor de los números le corresponde la mayor parte.
- Cuando los números proporcionales son fracciones, se les multiplica por el MCM de los denominadores y el reparto no se altera.

Reparto proporcional compuesto

El reparto proporcional compuesto consiste en repartir una cantidad en forma proporcional al producto de ciertos números.

Ejemplo:

Repartir 5320 en partes que sean IP a los números 14; 18; 15; a la vez DP a los números 35; 24 y 9. Indicar cada una de las partes.

Resolución:

Sean A; B y C las partes obtenidas del reparto.

Partes	IP <>	DP	DP	Multip. → DP		MCM(2; 3; 5) = 30		
A	14	$\frac{1}{14}$	35	$\frac{35}{14}$	$\rightarrow$	$\left(\frac{5}{2}\right)30 = 75$	$\rightarrow$	75k
B	18	$\frac{1}{18}$	24	$\frac{24}{18}$	$\rightarrow$	$\left(\frac{4}{3}\right)30 = 40$	$\rightarrow$	40k
C	15	$\frac{1}{15}$	9	$\frac{9}{15}$	$\rightarrow$	$\left(\frac{3}{5}\right)30 = 18$	$\rightarrow$	18k
							Total:	133k

Luego: $133k = 5320 \Rightarrow k = 40$

Las partes correspondientes serán:

$A = 75 \times 40 = 3000$; $B = 40 \times 40 = 1600$

$C = 18 \times 40 = 720$

REGLA DE COMPAÑÍA

La regla de compañía, es un caso especial del reparto proporcional; consiste en repartir las utilidades o las pérdidas de una sociedad (formada por varios socios) en forma proporcional al capital y al tiempo que han permanecido los socios en el negocio.

Se presentan 4 casos:

I. Capitales iguales y tiempos iguales.
El reparto se hace en partes iguales.

II. Capitales iguales y tiempos diferentes.
El reparto se hace en forma DP a los tiempos.
III. Capitales diferentes y tiempos iguales.
El reparto se hace en forma DP a los capitales.
IV. Capitales diferentes y tiempos diferentes.
El reparto se hace en forma DP al producto del capital por el tiempo.

Ejemplo:

Abraham y Bruno emprenden un negocio, el primero aporta S/.10 000 y el segundo S/.12 000. Si han permanecido en el negocio 8 y 5 meses, respectivamente, y si al liquidar el negocio quedó una utilidad, por repartir, de S/.8400:

Determinar:
a) La ganancia de cada socio.
b) El monto con el que se retira cada socio.

Resolución:

Hallamos los números proporcionales (dividimos los capitales por 2000):

Socio	Capital DP	Tiempo DP	→ DP		
Abraham	~~10 000~~ 5	8	$5\times8=40$	→	4k
Bruno	~~12 000~~ 6	5	$6\times5=30$	→	3k
				Total	7k

Luego: $7k = 8400 \Rightarrow k = 1200$

a) Hallamos la ganancia de cada socio:
Ganancia de Abraham: $4\times1200 =$ S/.4800
Ganancia de Bruno: $3\times1200 =$ S/.3600

b) Hallamos el monto, con el que cada socio se retira.
Sabemos que:
Monto = Capital + Ganancia o
Monto = Capital − Pérdida
Luego:
Monto de Abraham: 10 000 + 4800 = S/.14 800
Monto de Bruno: 12 000 + 3600 = S/.15 600

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Dividir 2480 en partes que sean DP a los números 2^n; 2^{n-1} y 2^{n+1} e IP a los números 3^{n-1}; 3^{n+1} y 3^n. Dar la menor de las partes.

Resolución:

Total: 2480

Partes	DP		IP <>	DP	→ DP
A	$2^n \Rightarrow$	$2^n=1$	$3^{n-1} \Rightarrow$	$\frac{3^n}{3}=3$	$3\times6=18k$
B	$2^{n-1} \Rightarrow$	$\frac{2^n}{2}=\frac{1}{2}$	$3^{n+1} \Rightarrow$	$3^n\times3=\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{6}\right)6=k$
C	$2^{n+1} \Rightarrow$	$2^n\times2=2$	$3^n \Rightarrow$	$3^n=1$	$2\times6=12k$
					Total = 31k

Luego: $31k = 2480 \Rightarrow k = 80$
∴ La menor de las partes: B = 80

2. Repartir 1750 en forma IP a los números 3; 15; 35; 63; ...; 2499. Dar como respuesta, la tercera parte obtenida.

Resolución:

Total: 1750

Partes	IP <>	DP
A	3	$\frac{1}{3}k$
B	15	$\frac{1}{15}k$
C	35	$\frac{1}{35}k$
⋮	⋮	⋮
D	2499	$\frac{1}{2499}k$
		Total = 1750

$$k\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+...+\frac{1}{2499}\right)=1750$$

$$k\left(\frac{2}{1\times3}+\frac{2}{3\times5}+\frac{2}{5\times7}+...+\frac{2}{49\times51}\right)=3500$$

$$k\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+...+\left(\frac{1}{49}-\frac{1}{51}\right)\right]=3500$$

$\Rightarrow k = 3570$
∴ Tercera parte: 102

3. Se reparte un número en forma DP a todos los divisores de 100; si la mayor de las partes es 2800, ¿cuál es el número repartido?

Resolución:

Sea N el número, tenemos:
Divisores de 100: 1; 2; 4; 5; ...; 100

Partes	DP
A	1k
B	2k
C	4k
⋮	⋮
D	100k
	Total = N

k(Suma divisores de 100) = N $\Rightarrow$ k(217) = N ...(1)
Pero, mayor parte: 2800
$\Rightarrow 100k = 2800 \Rightarrow k = 28$
En (1): $N = 28\times217 = 6076$
∴ El total repartido: 6076.

4. Hallar la suma repartida, si el reparto se hace en forma DP a los números 1; 4; 9; 16; 25; ...; 81. sabiendo que la mayor diferencia entre dos de las partes es de 400.

Resolución:

Sea N la cantidad repartida:

Partes	**DP**		
A	1	→	$1^2 \times k$
B	4	→	$2^2 \times k$
C	9	→	$3^2 \times k$
⋮	⋮		⋮
D	81	→	$9^2 \times k$

$$N = k(1^2 + 2^2 + ... + 9^2)$$

$$N = k\left(\frac{9 \times 10 \times 19}{6}\right) \Rightarrow N = 285k \quad ...(1)$$

Pero, mayor diferencia: 400

$\Rightarrow 81k - k = 400 \quad \Rightarrow k = 5$

$\therefore$ Cantidad repartida: $N = 285 \times 5 = 1425$

5. Se reparte una cantidad de dinero entre 3 hermanos en forma proporcional a los números $\overline{ab}$, $\overline{ba}$ y $\overline{bb}$; correspondiéndoles a los 2 primeros S/.576 y S/.1008, respectivamente. ¿Cuánto se repartió?

Resolución:

Hallamos "a" y "b", del reparto:

$\overline{ab}$: $576 = 36 \times 16 \quad \wedge \quad \overline{ba}$: $1008 = 63 \times 16$

$\Rightarrow a = 3;\ b = 6 \quad \wedge \quad k = 16$

Luego, la tercera parte $\overline{bb}$: $66 \times 16 = 1056$

Hallamos la cantidad repartida:

$\therefore 576 + 1008 + 1056 = 2640$

6. Al repartir S/.117 649 en partes DP a los números a; $3a^2$; $3a^3$ y a^4, de manera que al menor le corresponde 343, hallar el valor de $a^2 + 1$.

Resolución:

Del enunciado, simplificando el valor de "a":

Partes	DP		
A	$a \times 1$	→	$1 \times k$
B	$3a^2 \times 3a$	→	$3a \times k$
C	$3a^3 \times a^2$	→	$3a^2 \times k$
D	a^4a^3	→	$a^3 \times k$

Total: $k(1 + 3a + 3a^2 + a^3) = 117\,649$

$\Rightarrow k(1 + a)^3 = 117\,649 \quad ...(1)$

La menor parte: $k = 343 \quad ...(2)$

(2) en (1): $343(1 + a)^3 = 117\,649$

$\Rightarrow a = 6$

$\therefore a^2 + 1 = 37$

7. Se repartió la cantidad N, en razón inversa a los números: a; a^2; a^3; ....; a^n. Determine la enésima parte.

Resolución:

Cantidad a repartir: N

En el reparto IP se cambia al reparto DP a las inversas de las cantidades.

Partes	IP	<>	DP
1.ª	a	→	$\frac{1}{a}k$
2.ª	a^2	→	$\frac{1}{a^2}k$
3.ª	a^3	→	$\frac{1}{a^3}k$
⋮	⋮		⋮
n.ª	a^n	→	$\frac{1}{a^n}k$

Total: $k\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + ... + \frac{1}{a^n}\right) = N$

Efectuando: $k\left(\frac{a^{n-1} + a^{n-2} + ... + 1}{a^n}\right) = N$

También: $k\left(\frac{\frac{a^n - 1}{a - 1}}{a^n}\right) = N \quad \Rightarrow k = \left[\frac{a^n(a-1)}{a^n - 1}\right]N$

La enésima parte: $\frac{1}{a^n}\left[\frac{a^n(a-1)}{(a^n - 1)}\right]N = \left(\frac{a-1}{a^n - 1}\right)N$

$\therefore$ La enésima parte: $\left(\frac{a-1}{a^n-1}\right)N$

8. Al repartir cierta cantidad en forma DP a los números: 9; 10; 11; 12; ..., se observó, que en promedio recibieron S/.21 000 cada uno y la diferencia de dos partes consecutivas cualesquiera es S/.1000. Halla el número de partes.

Resolución:

Sea N la cantidad repartida.

Partes	DP
1.ª	9k
2.ª	10k
3.ª	11k
⋮	⋮
n	(n + 8)k

Total: $k[9 + 10 + 11 + ... + (n + 8)] = N$

$\Rightarrow k\left[\frac{n(n+17)}{2}\right] = N \quad \Rightarrow k = \frac{2N}{n(n+17)} \quad ...(1)$

Cantidad recibida en promedio: $\frac{N}{n} = 21\,000 \quad ...(2)$

Diferencia de 2 partes consecutivas: $k = 1000$ ...(3)

(2) y (3) en (1): $1000 = \frac{2 \times 21\,000}{n + 17} \quad \Rightarrow n = 25$

$\therefore$ La cantidad se repartió en 25 partes.

9. Si al dividir 6141 en partes DP a 1; 2; 4; 8; ....; 2^n, la mayor de las partes es 3072, ¿cuál es el valor de n?

Resolución:

Total a repartir: 6141

Partes	DP		
A	1	⇒	1k
B	2	⇒	2k
C	4	⇒	2^2k
⋮	⋮		
D	2^n	⇒	2^nk

Total = 6141

$k(1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n) = 6141$

$k(2^{n+1} - 1) = 6141$ ...(1)

Mayor parte: $2^n \times k = 3072$ ...(2)

$(1) \div (2)$: $\dfrac{2^{n+1} - 1}{2^n} = \dfrac{6141}{3072} = \dfrac{2047}{1024}$

$\Rightarrow 2^n = 1024 = 2^{10}$ $\therefore n = 10$

10. En una carrera de 2000 m participan tres ciclistas A; B y C, cuyas velocidades son: 15 m/s; 18 m/s y 20 m/s. Después de 80 segundos de iniciada la carrera, se suspende y se decide repartir el premio proporcionalmente a sus velocidades e IP a las distancias que les faltaba recorrer para terminar la carrera. Si C recibió S/.420 más que B, ¿cuánto recibió A?

Resolución:

Hallamos las distancias que les falta recorrer a cada competidor a los 80 segundos.
De A: $2000 - 15 \times 80 = 800$ m
De B: $2000 - 18 \times 80 = 560$ m
De C: $2000 - 20 \times 80 = 400$ m
En el reparto:
En la parte IP dividimos 80 y lo transformamos a la forma DP MCM(10; 7; 1) = 70

	DP	IP	<>	DP →	DP	
A:	15	800	10	$\frac{1}{10}$	$\left(\frac{15}{10}\right)70$	$\Rightarrow$ 105k
B:	18	560	7	$\frac{1}{7}$	$\left(\frac{18}{7}\right)70$	$\Rightarrow$ 180k
C:	20	400	5	$\frac{1}{5}$	4×70	$\Rightarrow$ 280k

Pero: $C - B = 420$

$280k - 180k = 420$ $\Rightarrow k = \dfrac{21}{5}$

$\therefore$ A recibió: $105\left(\dfrac{21}{5}\right) = $ S/.441

11. José antes de morir deja a su hermana $8400 y una cláusula en su testamento: "Si mi hermana tiene una hija, dejo para ésta los 2/3 y 1/3 para la madre; pero, si tiene un hijo, a éste le tocará 1/3 y 2/3 para la madre". Sucede, que la hermana de José, tiene un hijo y una hija. ¿Cuánto le tocará a la hija?

Resolución:

Cantidad a repartir: $8400
Si nace una niña:

$\dfrac{\text{Niña}}{\text{Madre}} = \dfrac{2/3}{1/3} \Rightarrow \dfrac{\text{Niña}}{\text{Madre}} = \dfrac{2}{1}$ ...(1)

Si nace un niño:

$\dfrac{\text{Niño}}{\text{Madre}} = \dfrac{1/3}{2/3} \Rightarrow \dfrac{\text{Niño}}{\text{Madre}} = \dfrac{1}{2}$ ...(2)

Pero, tuvo una niña y un niño.
De (1) y (2): niña = 4k; niño = k; madre = 2k
$\Rightarrow 4k + k + 2k = 8400$ $\Rightarrow k = 1200$
$\therefore$ Le tocará a la niña: $4 \times 1200 = \$4800$

12. Tres obreros se reparten el pago recibido por una obra que han realizado juntos, en razón directa a sus eficiencias. Se sabe que A solo lo haría en 10 días, B solo lo haría en 15 días, y C solo en 18 días. Si A recibe S/.720 más que C. ¿Cuánto recibe B?

Resolución:

Los tiempos que cada obrero emplea en hacer la obra por separado:
A = 10 días; B = 15 días; C = 18 días
Sabemos que: Eficiencia IP n.° días; entonces el reparto será IP al número de días.

	IP <> DP ⇒	DP MCM(10; 15; 18) = 90	
A	10	$\left(\frac{1}{10}\right)90 = 9$	→ 9k
B	15	$\left(\frac{1}{15}\right)90 = 6$	→ 6k
C	18	$\left(\frac{1}{18}\right)90 = 5$	→ 5k

Además: $A - C = 720$
$\Rightarrow 9k - 5k = 720$ $\Rightarrow k = 180$
$\therefore$ B recibe: $6 \times 180 = $ S/.1080

13. Se hizo un reparto IP a ciertos números, obteniéndose: S/.18 000; S/.14 400 y S/.12 000. Si el reparto hubiera sido DP a los mismos números, hallar la mayor parte.

Resolución:

Las cantidades, luego del reparto inverso.

		Números proporcionales
$A = 18\,000 = 15 \times 1200$	→	15
$B = 14\,400 = 12 \times 1200$	→	12
$C = 12\,000 = 10 \times 1200$	→	10
Total: 44 400		

Si el reparto es DP los números proporcionales serán: 1/15; 1/12; 1/10

	DP	(MCM(15; 12; 10) = 60)
A	$\left(\frac{1}{15}\right)60 = 4k$	
B	$\left(\frac{1}{12}\right)60 = 5k$	
C	$\left(\frac{1}{10}\right)60 = 6k$	
	Total = 15k = 44 400	$\Rightarrow$ k = 2960

Las partes son:
A = S/.11 840; B = S/.14 800; C = S/.17 760
$\therefore$ La mayor parte será: S/.17 760

14. Se reparte una determinada cantidad de dinero entre 4 personas. Lo que le toca a la primera es a lo de la segunda como 2 es a 3; lo de la segunda es a lo de la tercera como 4 es a 5 y lo de la tercera es a lo de la última como 6 es a 7. Si la última recibió S/.5600, determine la cantidad repartida.

Resolución:

Sean las personas: A; B; C y D.

Por dato y homogeneizando las cantidades:

$$\left.\begin{aligned}\frac{A}{B}&=\frac{2\times4\times2}{3\times4\times2}=\frac{16}{24}\\ \frac{B}{C}&=\frac{4\times3\times2}{5\times3\times2}=\frac{24}{30}\\ \frac{C}{D}&=\frac{6\times5}{7\times5}=\frac{30}{35}\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}A&=16k\\ B&=24k\\ C&=30k\\ D&=35k\end{aligned}$$

Total: 105k ...(1)

Pero: D = 5600 ⇒ 35k = 5600 ⇒ k = 160

En (1): Total = 105 × 160 = S/.16 800

∴ En total se repartió S/.16 800

15. Dos agricultores tienen, respectivamente, 6 y 9 ha, que desean sembrar. Cuando ya habían sembrado 2/5 de cada propiedad, contratan a un peón y a partir de entonces los agricultores y el peón trabajan en partes iguales. ¿Cuánto aportó cada agricultor para pagar al peón, si en total deben pagarle S/. 600?

Resolución:

Lo que falta sembrar:

Del 1.°: $\left(\frac{3}{5}\right)6=\frac{18}{5}$ ha

Del 2.°: $\left(\frac{3}{5}\right)9=\frac{27}{5}$ ha

En total falta sembrar = 9 ha

Los 2 agricultores y el peón sembraron: $\frac{9}{3}=3$ ha cada uno

Hallamos la parte que siembra el peón en cada terreno.

Del 1.°: $\frac{18}{5}-3=\frac{3}{5}$ ha

Del 2.°: $\frac{27}{5}-3=\frac{12}{5}$ ha

Ahora, repartimos los S/.600 DP a 3/5 y 12/5,
Dividiendo las cantidades por 3/5:

	DP	<>	DP
1.°:	$\frac{3}{5}=1$	⇒	k
2.°:	$\frac{12}{5}=4$	⇒	4k
	Total:		5k = 600 ⇒ k = 120

∴ Lo que aportará cada agricultor:
1.°: S/.120 y 2.°: S/.480

16. Cuatro agricultores A; B; C y D deciden cultivar en conjunto, sus terrenos que son de: 7 ha; 8 ha; 9 ha y 11 ha, respectivamente. Para concluir más rápido contratan a 2 obreros que reciben ai finalizar el trabajo S/.2100 cada uno. ¿Cuánto desembolsa el agricultor D, sabiendo que los 6 tienen el mismo rendimiento?

Resolución:

Área total a cultivar: 7 + 8 + 9 + 11 = 35 ha

A los 4 agricultores y los 2 obreros les corresponde cultivar: 35/6 ha cada uno.

Hallamos la parte hecha por los obreros en cada terreno:

De A: $7-\frac{35}{6}=\frac{7}{6}$ ha

De B: $8-\frac{35}{6}=\frac{13}{6}$ ha

De C: $9-\frac{35}{6}=\frac{19}{6}$ ha

De D: $11-\frac{35}{6}=\frac{31}{6}$ ha

Repartimos los S/.4200 DP a la parte hecha por los obreros:

	DP
A:	7k
B:	13k
C:	19k
D:	31k
	70k = 4200 ⇒ k = 60

Desembolsan:

A: 7 × 60 = S/.420; B: 13 × 60 = S/.780

C: 19 × 60 = S/.1140; D: 31 × 60 = S/.1860

∴ El cuarto agricultor desembolsa: S/.1860

17. Se reparten N soles DP a las edades de A; B y C, correspondiéndole a A S/.67 200 y a B S/.100 800. Si los N soles se reparten IP a las edades de A y B, B recibirá S/.118 720. Hallar la edad de C, si la suma de las 3 edades es 53 años.

Resolución:

1.^{er} reparto: hallamos los números proporcionales a las edades de A y B, descomponiendo las cantidades dadas:

			N.° proporcional
A:	67 200 = 2 × 33 600	⇒	2
B:	100 800 = 3 × 33 600	⇒	3

2.° reparto: hallamos N, que solo se reparte entre A y B.

	IP	<> DP	DP
A	2	$\left(\frac{1}{2}\right)6$ →	3k
B	3	$\left(\frac{1}{3}\right)6$ →	2k

La parte de B: 2k = 118 720 ⇒ k = 59 360

La parte de A: 3 × 59 360 = 178 080

El valor de N: 178 080 + 118 720 = S/.296 800

Hallamos los números proporcionales del primer reparto:

A: 67 200 = 12 × 5600 ⇒ 12

B: 100 800 = 18 × 5600 ⇒ 18

C: 296 800 − 168 000 = 128 800 = 23 × 5600 ⇒ 23

Donde la suma de las edades: 53

∴ La edad de C es 23 años.

18. Juan Carlos decide repartir $48 000 en forma DP al orden en que nacieron sus hijos, dejando adicionalmente $16 000 para el mayor, de tal modo que el primer y el último de los hijos reciban igual cantidad. ¿Cuántos hijos como máximo tiene Juan Carlos?

Resolución:

Del enunciado:

Orden de nacimiento de hijos DP

1.°	1k
2.°	2k
3.°	3k
⋮	
n.°	nk

Total: $k(1 + 2 + 3 + ... + n) = 48\,000$

$\Rightarrow k\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] = 48\,000$ ...(1)

Además: (Mayor hijo) + 16 000 = (Menor hijo)

$\Rightarrow k + 16\,000 = nk$

$16\,000 = k(n-1) \Rightarrow k = \frac{16\,000}{n-1}$ ...(2)

(2) en (1): $\frac{16\,000}{(n-1)}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] = 48\,000$

$\Rightarrow n = 2 \vee 3$ $\therefore$ El mayor número de hijos: 3

19. Repartir 14 280 DP a los números: 1; 4; 9; 16; ... ("n" cantidades) de tal manera que la diferencia entre la mayor y menor de las partes es 2304. Hallar "n".

Resolución:

Total: 14 280

Partes	DP		
1.ª	1	⇒	1^2k
2.ª	4	⇒	2^2k
3.ª	9	⇒	3^2k
⋮	⋮		⋮
n	n^2	⇒	$n^2 \times k$

Total: $k(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) = 14\,280$

$\Rightarrow k\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 14\,280$ ...(1)

Además: (Mayor parte) − (Menor parte) = 2304

$n^2k - k = 2304 \Rightarrow k = \frac{2304}{n^2-1}$ ...(2)

(2) en (1):

$$\frac{2304}{(n+1)(n-1)}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = 14\,280$$

$\Rightarrow n = 17$ $\therefore$ El valor de "n" es 17.

20. Hallar el menor número natural, que pueda repartirse exactamente, ya sea DP o IP a los números: 15; 16 y 18.

Resolución:

Sea N el menor número natural.

1.^{er} reparto: En forma DP a los números 15; 16 y 18.

Partes	DP	
A	$15k_1$	
B	$16k_1$	$k_1(15 + 16 + 18) = N$
C	$18k_1$	$\Rightarrow k_1 = \frac{N}{49}$ ...(1)

2.° reparto: En forma IP a los números: 15; 16 y 18.

Partes	IP	<> DP	MCM (15; 16; 18) = 720
P	15	$\left(\frac{1}{15}\right)720 = 48k_2$	
Q	16	$\left(\frac{1}{16}\right)720 = 45k_2$	$k_2(48 + 45 + 40) = N$
R	18	$\left(\frac{1}{18}\right)720 = 40k_2$	$\Rightarrow k_2 = \frac{N}{133}$ ...(2)

De (1) y (2), para que N se reparta exactamente:

$N = \overset{\circ}{49} \wedge N = \overset{\circ}{133} \Rightarrow N = MCM(49; 133) = 931$

$\therefore$ El menor número natural: 931

21. Se reparte N en forma proporcional a $\sqrt{294}$; $\sqrt{1014}$; $\sqrt{1350}$ y $\sqrt{1734}$. De las partes obtenidas, se sabe que la suma de las dos partes intermedias, excede a la diferencia de la mayor y menor en 666. Hallar el valor de N.

Resolución:

Partes	DP	
A	$\sqrt{294} = 7\sqrt{6}$	→ 7k
B	$\sqrt{1014} = 13\sqrt{6}$	→ 13k
C	$\sqrt{1350} = 15\sqrt{6}$	→ 15k
D	$\sqrt{1734} = 17\sqrt{6}$	→ 17k

Por dato: $(B + C) - (D - A) = 666$

$(13k + 15k) - (17k - 7k) = 666$

$18k = 666 \Rightarrow k = 37$

Hallamos: $N = k(7 + 13 + 15 + 17) = 37 \times 52$

$\therefore N = 1924$

22. Se repartió una suma de dinero en forma DP a las edades de 4 hermanos, correspondiendo a cada uno S/.13 500; S/.18 000; S/.22 500 y S/.30 000, respectivamente. ¿Cuánto le habría correspondido al tercero, si el reparto hubiera sido IP a sus edades?

Resolución:

Hallamos el total y los números proporcionales:

			DP
1.°:	13 500 = 9 × 1500	→	9
2.°:	18 000 = 12 × 1500	→	12
3.°:	22 500 = 15 × 1500	→	15
4.°:	30 000 = 20 × 1500	→	20

Total: S/.84 000

Hallamos el reparto IP MCM(9; 12; 15; 20) = 180

	IP	<> DP		
1.°	9	$\frac{1}{9}180 = 20$	$\rightarrow$	20k
2.°	12	$\frac{1}{12}180 = 15$	$\rightarrow$	15k
3.°	15	$\frac{1}{15}180 = 12$	$\rightarrow$	12k
4.°	20	$\frac{1}{20}180 = 9$	$\rightarrow$	9k
			Total:	56k = 84 000

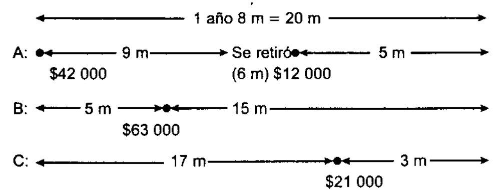
$\Rightarrow$ k = 1500

$\therefore$ El tercero recibió: 12 × 1500 = S/.18 000.

23. "A" inicia un negocio con $42 000; luego de 5 meses aceptó un socio "B" quien aportó $63 000, luego de 4 meses se retira "A"; 6 meses más tarde vuelve a reingresar "A" aportando $12 000 y 2 meses más tarde aceptan un socio "C" quien aportó $21 000. Al año 8 meses de iniciado el negocio, éste se liquida y la ganancia fue $96 400. Halla la ganancia de A.

Resolución:

Hacemos una línea de tiempo:



Simplificamos el capital:

Socio	Capital		Tiempo	DP
A	42 000	14	9	14 × 9 = 126k
A'	12 000	4	5	4 × 5 = 20k
B	63 000	21	15	21 × 15 = 315k
C	21 000	7	3	7 × 3 = 21k
				Total: 482k

Luego: 482k = 96 400 $\Rightarrow$ k = 200

Hallamos la ganancia de A:

k(126 + 20) = 200 × 146 = $29 200

$\therefore$ A ganó $29 200.

24. El capataz de una obra tiene como peones a A; B y C; semanalmente se reparten S/.736 entre los que trabajan. En la semana que trabaja A y B, A recibe 1/2 más que B y en la semana que trabaja B y C, B recibe 1/4 menos que C. ¿Cuánto recibe B en la semana que trabajan los tres?

Resolución:

Si trabajan A y B: $A = \left(1 + \frac{1}{2}\right)B \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{3}{2}$ ...(1)

Si trabajan B y C: $B = \left(1 - \frac{1}{4}\right)C \Rightarrow \frac{B}{C} = \frac{3}{4}$ ...(2)

De (1) y (2): A = 9k; B = 6k; C = 8k

Pero: A + B + C = 736

9k + 6k + 8k = 736 $\Rightarrow$ k = 32

Lo que reciben:

A = 9 × 32 = S/.288; B = 6 × 32 = S/.192;

C = 8 × 32 = S/.256

$\therefore$ B recibe: S/.192

25. Diariamente se reparte 2002 pesos entre 2 obreros A y B en forma DP a sus rendimientos. El lunes A recibió 462 pesos más que B; al día siguiente disminuyó su rendimiento en 25% y B aumentó el suyo en 20%. ¿Cuánto recibió A el martes?

Resolución:

Día lunes: 2002 pesos

	DP (rendimiento)
A = 1232 = 8 × 154	$\rightarrow$ 8
B = 770 = 5 × 154	$\rightarrow$ 5

Día martes:	DP	
Rendimiento A: 75%(8)	= 6	1k
Rendimiento B: 120%(5)	= 6	1k
		2k = 2002

$\Rightarrow$ k = 1001; A y B reciben lo mismo:

$\therefore$ A recibió: 1001 pesos

26. Se divide un número en tres partes de modo que las raíces cúbicas de la primera y tercera parte son DP a 4 y 3, y los cuadrados de la primera y la segunda son DP a 4096 y 81. ¿Qué porcentaje del número que se repartió es la segunda parte?

Resolución:

Sean las partes A; B y C, tal que:

$$\frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{C}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{A}{C} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} \quad ...(1)$$

$$\frac{A^2}{B^2} = \frac{4096}{81} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{\sqrt{4096}}{81} = \frac{64}{9} \quad ...(2)$$

De (1) y (2), los números proporcionales son:

A = 64k; B = 9k; C = 27k

Total: 64k + 9k + 27k = 100k

La parte de B: $\left(\frac{9k}{100k}\right)100 = 9\%$

$\therefore$ B le corresponde el 9% del total.

27. Las edades de 7 hermanos son números consecutivos. Si se reparte una suma de dinero en forma proporcional a sus edades, el menor recibe la mitad del mayor y el tercero recibe S/.8000. ¿Cuál es la cantidad repartida?

Resolución:

Sea N la cantidad repartida:

Edades (DP)

1.°: (n + 3)k
2.°: (n + 2)k
3.°: (n + 1)k
4.°: nk
5.°: (n − 1)k
6.°: (n − 2)k
7.°: (n − 3)k

Total = **N**

k[(n+3) + (n+2) + (n + 1) + n + (n − 1) + (n − 2) + (n − 3)] = **N**

7kn = N ...(1)

Además:

(La parte del menor) = $\frac{1}{2}$(La parte del mayor)

$(n-3)k = \frac{1}{2}(n+3)k \Rightarrow n = 9$

También: 3.^{er} hermano = 8000

$\Rightarrow \underset{\underset{9}{\downarrow}}{(n+1)}k = 8000 \Rightarrow k = 800$

En (1): $N = 7 \times 800 \times 9 = 50\,400$

$\therefore$ Se repartió en total: S/.50 400

28. Un tío antes de morir repartió su fortuna entre sus tres sobrinos en partes que son entre sí como 7; 6 y 5. Por un segundo testamento, cambia su disposición y el reparto lo hace proporcionalmente a los números 4; 3 y 2 de tal manera que uno de los sobrinos recibe $7200 más. Calcular el valor de la herencia.

Resolución:

Sea T el valor de la herencia.

1.^{er} reparto: En forma DP a 7; 6 y 5:

	DP	
A:	$7k_1$	Total = T
B:	$6k_1$	$7k_1 + 6k_1 + 5k_1 = T$
C:	$5k_1$	$k_1 = \frac{T}{18}$

Les correspondió a cada sobrino:

$A = \frac{7}{18}T$; $B = \frac{6}{18}T$; $C = \frac{5}{18}T$

2.° reparto: En forma DP a 4; 3 y 2:

	DP	
A:	$4k_2$	Total = T
B:	$3k_2$	$4k_2 + 3k_2 + 2k_2 = T$
C:	$2k_2$	$k_2 = \frac{T}{9}$

Les correspondió a cada sobrino:

$A = \frac{4}{9}T$; $B = \frac{3}{9}T$; $C = \frac{2}{9}T$

Uno de los sobrinos recibió $7200 más.

Se trata de A: $\frac{4}{9}T - \frac{7}{18}T = 7200$

$\Rightarrow T = 129\,600$

$\therefore$ El valor de la herencia: $129 600

29. Un padre deja como herencia a sus hijos 0,4176 ha para que se repartan DP a sus edades que son: 15; 18 y 25 años, respectivamente; pero, antes de morir el padre le pidió que el reparto se hiciera en partes iguales. Cuánto dejó de recibir el que se perjudicó con el cambio.

Resolución:

Sabemos que: 1 ha = 10 000 m^2

Herencia: 4176 m^2

1.^{er} reparto: En forma DP a sus edades

	DP	
A:	15k	$15k + 18k + 25k = 4176$
B:	18k	$k = 72$
C:	25k	

Les correspondió a cada hijo:

$A = 15 \times 72 = 1080$ m^2; $B = 18 \times 72 = 1296$ m^2

$C = 25 \times 72 = 1800$ m^2

2.° reparto: En partes iguales

A cada hijo le corresponde: $\frac{4176}{3} = 1392$ m^2

De los 3 hijos, C deja de tener:

$1800 - 1392 = 408$ m^2

$\therefore$ C se perjudicó con 408 m^2

30. Se reparte una cantidad proporcionalmente a los números 1; 2; 3 y 4; pero, luego se decide hacerlo proporcionalmente a 2; 3; 4 y 6 motivo por el cual una de las partes, disminuye en S/.180. Hallar la parte del cuarto número.

Resolución:

Sea N, la cantidad repartida.

1.^{er} reparto:

	DP	
A:	$1k_1$	
B:	$2k_1$	$k_1 + 2k_1 + 3k_1 + 4k_1 = N$
C:	$3k_1$	$k_1 = \frac{N}{10}$
D:	$4k_1$	

Lo que le correspondió a cada parte:

$A = \frac{N}{10}$; $B = \frac{2N}{10}$; $C = \frac{3N}{10}$; $D = \frac{4N}{10}$

2.° reparto:

	DP	
A:	$2k_2$	
B:	$3k_2$	$2k_2 + 3k_2 + 4k_2 + 6k_2 = N$
C:	$4k_2$	$k_2 = \frac{N}{15}$
D:	$6k_2$	

Lo que les correspondió a cada parte:

$A = \frac{2N}{15}$; $B = \frac{3N}{15}$; $C = \frac{4N}{15}$; $D = \frac{6N}{15}$

Una de las partes disminuye en: S/.180

Se trata de C: $\frac{3N}{10} - \frac{4N}{15} = 180 \Rightarrow N = $ S/.5400

$\therefore$ La cuarta parte del nuevo reparto:

$\left(\frac{6}{15}\right)5400 = $ S/.2160

31. Una cantidad de N (en dólares) se reparte entre 2 personas, de la siguiente forma: 2/5 del dinero en forma IP a 4 y 3; el resto de lo que queda IP a 4 y 5. Si la diferencia de lo que cada uno tuvo al final es de $80, hallar N.

Resolución:

Sean las personas A y B:

1.^{er} reparto: IP <> DP

$\frac{2}{5}N$ A: 4 $\left(\frac{1}{4}\right)12 = 3k_1$; B: 3 $\left(\frac{1}{3}\right)12 = 4k_1$ $\Big\}$ $3k_1 + 4k_1 = \frac{2}{5}N \Rightarrow k_1 = \frac{2}{35}N$

Partes correspondientes: A: $\frac{6}{35}N$; B: $\frac{8}{35}N$

2.° reparto: IP <> DP

$\frac{3}{5}N$ A: 4 $\left(\frac{1}{4}\right)20 = 5k_2$; B: 5 $\left(\frac{1}{5}\right)20 = 4k_2$ $\Big\}$ $5k_2 + 4k_2 = \frac{3}{5}N \Rightarrow k_2 = \frac{1}{15}N$

Partes correspondientes: A: $\frac{5}{15}N$; B: $\frac{4}{15}N$

Al final: Total de A – Total de B = 80

$\left(\frac{6}{35}N + \frac{5}{15}N\right) - \left(\frac{8}{35}N + \frac{4}{15}N\right) = 80 \Rightarrow N = 8400$

$\therefore$ El valor de N es \$8400.

32. Tres socios han ganado en un negocio \$24 000. El primero contribuyó con \$25 000, el segundo con \$40 000 durante 6 meses, y el tercero con \$20 000 durante 8 meses. El primero tuvo una ganancia de \$6000. Calcular el tiempo que tuvo impuesto su capital el primero.

Resolución:

Ganancia ha repartir: \$24 000:

Socios		Capital	Tiempo ⇒	DP
A	5	25 000	t	5tk
B	8	40 000	6	48k
C	4	20 000	8	32k

Como el primero ganó \$6000, los otros ganaron \$18 000 entre los dos:

Luego: $g_B + g_C = 18\,000$

$\Rightarrow 48k + 32k = 18\,000 \Rightarrow k = 225$

Pero: $g_A = 6000 \Rightarrow 5 \times t \times k = 6000$

$\Rightarrow 5 \times t \times 225 = 6000 \Rightarrow t = 16/3$ meses

$\therefore$ t = 5 meses 10 días

33. Dos personas A y B obtienen S/.3700 de utilidad total en cierto negocio. A contribuyó con S/.900 durante 5 meses y B con cierto capital durante 7 meses. Si B ganó los 7/5 de lo que impuso, determinar dicho capital.

Resolución:

Utilidad total: S/.3700

Socio	Capital	Tiempo	DP
A	900	5	4500k
B	C	7	7Ck

Pero: $g_B = \left(\frac{7}{5}\right)C \Rightarrow 7Ck = \frac{7}{5}C \Rightarrow k = \frac{1}{5}$

Además: $g_A + g_B = 3700$

$4500k + 7Ck = 3700 \Rightarrow \frac{1}{5}(4500 + 7C) = 3700$

$\Rightarrow C = 2000$ $\therefore$ El capital de B: S/.2000

34. Tres socios participan en un negocio aportando \$ 2000; \$3000 y \$5000. Si luego de terminado el negocio en forma satisfactoria, al primer socio se le entrega el 10% de la ganancia por la administración, de tal forma que recibe una suma total de \$1400. Calcular la ganancia total que se obtuvo.

Resolución:

Sea N la ganancia total.

El primer socio recibe 10%N por administración. Solo se repartirá 90%N entre los 3 socios.

Socio	Capital		DP
1.°	2000	→	2k
2.°	3000	→	3k
3.°	5000	→	5k

$2k + 3k + 5k = 90\%N$

$k = \left(\frac{9}{100}\right)N$

Ganancia del primer socio: $\frac{18}{100}N$

Por dato: El primer socio en total recibió = 1400

$10\%N + \frac{18}{100}N = 1400 \Rightarrow N = 5000$

$\therefore$ La ganancia total: S/.5000

35. Una persona, para incrementar los ingresos en su negocio decide aceptar mensualmente un socio. Si el negocio duró 2 años 1 mes y cada socio aporta un capital proporcional a su orden de ingreso y si el socio que entró inicialmente recibió S/.2500 de beneficio, ¿cuánto recibió el más beneficiado?

Resolución:

Duración del negocio: 2 años 1 mes <> 25 meses

Socio	Capital	Tiempo →	DP
1.°:	1	25	25k
2.°:	2	24	48k
3.°:	3	23	69k
⋮	⋮	⋮	⋮
25.°:	25	1	25k

Por dato, ganancia del 1.^{er} socio: S/.2500

$25k = 2500 \Rightarrow k = 100$

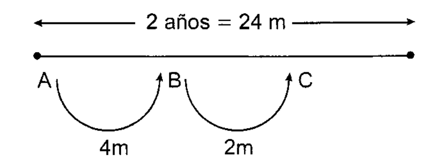
El más beneficiado: 13.° socio = (13)(13)k

$\therefore$ 13.° socio: S/.16 900

36. Un fabricante empezó un negocio con S/.8000; 4 meses después aceptó otro socio con S/.12 000 y 2 meses más tarde aceptaron a un tercero, que aportó S/.10 000. Si a los dos años de iniciado el negocio, se liquidó el negocio, y el primero recibió S/.15 200 menos de ganancia que los otros dos juntos, ¿cuánto ganó el tercero?

Resolución:

Sean los socios: A; B y C.



Socio	Capital		Tiempo		DP	
A	8000	4	24	12	$4\times12=48$	$\rightarrow$ 16k
B	12 000	6	20	10	$6\times10=60$	$\rightarrow$ 20k
C	10 000	5	18	9	$5\times9=45$	$\rightarrow$ 15k

Por dato: $(g_B + g_C) - g_A = 15\,200$

$20k + 15k - 16k = 15\,200 \Rightarrow k = 800$

Hallamos la ganancia de cada socio:

$g_A = 16 \times 800 =$ S/.12 800;

$g_B = 20 \times 800 =$ S/.16 000;

$g_C = 15 \times 800 =$ S/.12 000

$\therefore$ El tercero ganó: S/.12 000

37. Tres personas A, B y C forman una empresa, aportando capitales iguales. A como gerente debe recibir 5/9 de la utilidad total, B como subgerente recibe 1/5 de lo que recibe A. Al cabo de cierto tiempo liquidan la empresa y con las utilidades forman otra por 2 años, en el cual todos intervienen solo como socios. Si la utilidad total, en esta nueva empresa es S/.54 000, ¿cuánto de esto recibió A?

Resolución:

1.ª sociedad (capitales iguales)

Sea U la utilidad total.

Según el cargo, a cada socio le correspondió:

Gerente: $A = \frac{5}{9}U$

Subgerente: $B = \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{5}{9}\right)U = \left(\frac{1}{9}\right)U$

$C = U - \frac{5}{9}U - \frac{1}{9}U = \left(\frac{3}{9}\right)U$

2.ª sociedad (el capital social lo forman con las utilidades)

Socio	Capital	DP	
A	$\left(\frac{5}{9}\right)U$	5k	Total = 54 000
B	$\left(\frac{1}{9}\right)U$	1k	$k(5 + 1 + 3) = 54\,000$
C	$\left(\frac{3}{9}\right)U$	3k	$\Rightarrow k = 6000$

$\therefore$ Ganancia de A: $5 \times 6000 =$ S/.30 000

38. A forma una empresa con \$2000 y se asocia con B y C, los cuales aportan \$3000 y \$4000. A los 3 meses, A incrementa su capital en \$1000; un mes más tarde B retira \$1500 y 2 meses después, C duplica su capital. Al año de constituida la empresa se disuelve, habiendo acumulado un monto total de \$55 500. De este monto, ¿cuánto recibe A?

Resolución:

De la línea de tiempo:

Inicio — Final

1 año = 12 m

3 m — 1 m — 2 m

A' = \$3000 B' = \$1500 C' = \$8000

A = \$2000; B = \$3000; C = \$4000

Al final, capital social:

3000 + 1500 + 8000 = \$12 500

Además:

Monto total: \$55 500 = Cap. social + Utilidades (Cap. social = \$12 500)

$\Rightarrow$ Utilidades = \$43 000

Hallamos los números proporcionales: (el tiempo lo deducimos de la línea de tiempo).

Socio	Capital	DP	Tiempo	DP		
A	2000	4	3	$4\times3=12=2\times6$	$\rightarrow$ 2k	$g_A = 11k$
A'	3000	6	9	$6\times9=54=9\times6$	$\rightarrow$ 9k	
B	3000	6	4	$6\times4=24=4\times6$	$\rightarrow$ 4k	$g_B = 8k$
B'	1500	3	8	$3\times8=24=4\times6$	$\rightarrow$ 4k	
C	4000	8	6	$8\times6=48=8\times6$	$\rightarrow$ 8k	$g_C = 24k$
C'	8000	16	6	$16\times6=96=16\times6$	$\rightarrow$ 16k	

Luego: $g_{Total} =$ \$43 000

$k(11 + 8 + 24) = 43\,000 \Rightarrow k = 1000$

Hallamos la ganancia de cada socio:

$g_A = 11 \times 1000 =$ \$11 000

$g_B = 8 \times 1000 =$ \$8000

$g_C = 24 \times 1000 =$ \$ 24 000

Hallamos el monto de A:

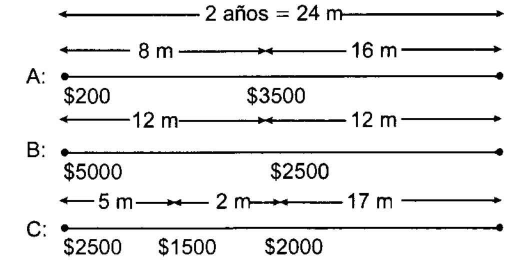
Monto = Capital + Ganancia

$\therefore$ Monto = 3000 + 11 000 = \$14 000

39. A, B y C se asocian para un negocio que dura 2 años. A impone \$2000 y al cabo de 8 meses \$1500 más. B impone al principio \$5000 y después de un año retira la mitad; C, que había impuesto al principio \$2500, retira a los 5 meses \$1000 y dos meses más tarde agrega \$500. Si hay una pérdida de \$4230, ¿con cuánto se retira uno de los socios?

Resolución:

Hallamos el tiempo con el que trabaja cada socio y su respectivo capital.



Hallamos el reparto:

Socio	Capital	Tiempo		DP	
A	2000	4	8	$4\times8=32k$	$P_A=144k$
A'	3500	7	16	$7\times16=112k$	
B	5000	10	12	$10\times12=120k$	$P_B=180k$
B'	2500	5	12	$5\times12=60k$	
C	2500	5	5	$5\times5=25k$	$P_C=99k$
C'	1500	3	2	$3\times2==6k$	
C"	2000	4	17	$4\times17=68k$	
				Total: 423k	

Pérdida total = $4230

$423k = 4230 \Rightarrow k = 10$

Hallamos la pérdida de cada socio:

A: 144×10 = $1440

B: 180×10 = $1800

C: 99×10 = $990

Hallamos el monto con el que se retira cada socio:

A: 3500 − 1440 = $2060

B: 2500 − 1800 = $700

C: 2000 − 990 = $1010

∴ Uno de los montos: $1010

40. El administrador de una compañía reparte $12 100 entre tres de sus empleados, tomando en cuenta sus años de servicio y las inasistencias que tuvieron en ese lapso. Si los empleados tienen 10; 5 y 3 años de servicio y 9; 4 y 3 inasistencias respectivamente, hallar la mayor diferencia entre dos empleados que reciben la repartición.

Resolución:

La cantidad será repartida en forma DP a los años de servicio e IP a las inasistencias.

Empl.	Años de serv. (DP)	Inasist. (IP)	<> DP ⇒	MCM (9; 4; 1) = 36 DP
A	10	9	$\frac{1}{9}$	$10\left(\frac{1}{9}\right)\Rightarrow\left(\frac{10}{9}\right)36=40k$
B	5	4	$\frac{1}{4}$	$5\left(\frac{1}{4}\right)\Rightarrow\left(\frac{5}{4}\right)36=45k$
C	3	3	$\frac{1}{3}$	$3\left(\frac{1}{3}\right)\Rightarrow1\times36=36k$
				$121k=12\,100 \Rightarrow k=100$

∴ Mayor diferencia: B − C = 4500 − 3600 = $900

41. En cierto reparto de utilidades, uno de los socios observó que había ganado 30% de su capital que aportó durante 5 meses. ¿Cuál será el porcentaje total que ganará otro socio que aportó su capital durante 9 meses?

Resolución:

Se cumple: $\frac{C_1T_1}{G_1}=\frac{C_2T_2}{G_2}\Rightarrow\frac{C_1\times5}{30\%\,C_1}=\frac{C_2\times9}{(x\%\,C_2)}$

$\therefore\ x=\frac{30\times9}{5}=54\%$

42. Un grupo de personas forman una sociedad aportando cada una el doble que el anterior. Pasado un cierto tiempo lograron una ganancia de S/.31 000, donde la suma del primero y el último de las utilidades es S/.17 000. Hallar el número de socios.

Resolución:

$$\frac{U_1}{C}=\frac{U_2}{2C}=\frac{U_3}{4C}=\frac{U_4}{8C}=\dots\frac{U_n}{2^{n-1}C}$$

$$\Rightarrow\frac{U_1}{1}=\frac{U_2}{2}=\frac{U_3}{4}=\dots=\frac{\text{Total}}{\underbrace{1+2+4+\dots2^{n-1}}_{S}}$$

Luego: $S=1+2+4+\dots+2^{n-1}$ ...(α)

$\Rightarrow 2S=2+4+8+\dots2^n$ ...(β)

Restando (β) − (α): $S=2^n-1$

Se cumple: $\frac{U_1}{1}=\frac{U_n}{2^{n-1}}=\frac{\text{Total}}{2^n-1}$

$\Rightarrow\frac{17\,000}{1+2^{n-1}}=\frac{31\,000}{2^n-1}$

Haciendo: $x=2^{n-1}$; $2x=2^n$

$\Rightarrow\frac{17}{1+x}=\frac{31}{2x-1}\Rightarrow x=16$

$\Rightarrow x=2^4=2^{n-1}\quad\therefore n=5$

43. Tres personas A, B y C compraron una fábrica e invirtieron S/.792; S/.924 y S/.1056, respectivamente, si la exploraron durante 3 años y correspondió de utilidad a B S/.1800 más que A. ¿Cuánto le correspondió a C (capital más utilidad)?

Resolución:

	DP	Utilidad
Inversión	$792=132\times6\rightarrow$	6k
	$924=132\times7\rightarrow$	7k
	$1056=132\times8\rightarrow$	8k

$\underbrace{\text{Utilidad B}}_{7k}-\underbrace{\text{Utilidad A}}_{6k}=1800\Rightarrow k=1800$

⇒ Utilidad C = 8(1800) = S/.14 400

∴ C recibe: 14 400 + 1056 = S/.15 456

44. Tres personas forman una empresa aportando S/.792, S/.924 y S/.1056, después de cierto tiempo se liquidó la empresa. Si el socio que menos aportó se retiró con S/.1242, ¿cuál fue la ganancia del socio que obtuvo la mayor ganancia.

Resolución:

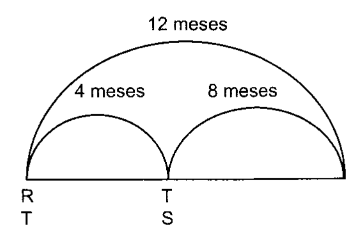
$$\frac{G_1}{792}=\frac{G_2}{924}=\frac{G_3}{1056}$$

$\frac{792+G_1}{792}=\frac{1056+G_3}{1056}$ El primero se retira con su aporte y ganancia

$\Rightarrow\frac{1242}{792}=\frac{1056+G_3}{1056}\quad\therefore G_3=\text{S/.}600$

45. Roberto inició un negocio con S/.6000 en sociedad con Tito, quien aporta S/.4000. Al cabo de 4 meses Roberto se retira e ingresa Stephany con S/.8000 y así el negocio termina al año de haberse iniciado. Si éste arrojó una ganancia de S/.34 000, ¿cuánto le toco a Tito?

Resolución:



		Capital DP	Tiempo DP		
Roberto	→	S/.6000 ×	4 = 24	→	3k
Tito	→	S/.4000 ×	12 = 48	→	6k
Stephany	→	S/.8000 ×	8 = 64	→	8k

$k = \frac{34\,000}{17} = 2000$

∴ Tito recibió: $6 \times 2000 =$ S/12 000

46. Tres socios forman una compañía invirtiendo inicialmente cada uno de ellos S/.20 000, S/.15 000 y S/.10 000, al cabo de 4 meses de iniciado el negocio el que invirtió más y el que invirtió menos retiraron S/.6000 y S/.2000 respectivamente. El otro socio en cambio incrementó su capital en S/.5000; faltando 4 meses para que se disuelva la compañía el socio que invirtió inicialmente S/.20 000 aumentó su capital en S/.2000, pero el socio que invirtió inicialmente S/.15 000 retiró S/.7000. Si la compañía se disolvió a los 15 meses de iniciada, obteniendo una utilidad total de S/.8096, entonces el que invirtió menos obtuvo una cantidad de:

Resolución:

Primer socio:

– 6000 ↓ 20 000 por 4 meses
+ 2000 ↓ 14 000 por 7 meses
16 000 por 4 meses } 15 meses

Segundo socio:

+ 5000 ↓ 15 000 por 4 meses
– 7000 ↓ 20 000 por 7 meses
13 000 por 4 meses } 15 meses

Tercer socio

– 2000 ↓ 10 000 por 4 meses
8000 por 11 meses } 15 meses

Simplificando los miles de soles:

$$\frac{U_1}{20\times4+14\times7+16\times4} = \frac{U_2}{15\times4+20\times7+13\times4} = \frac{U_3}{10\times4+8\times1}$$

$$\Rightarrow \frac{U_1}{242} = \frac{U_2}{252} = \frac{U_3}{128}$$

$$\Rightarrow \frac{U_1}{121} = \frac{U_2}{126} = \frac{U_3}{64} = \frac{8086}{121+126+64}$$

El que invirtió menos es el tercero:

∴ $U_3 = 64 \times 26 = 1664$

47. Un comerciante invirtió en un negocio $50 000, cinco meses después se incorporó otro comerciante aportando $60 000, luego de trabajar juntos durante 5 meses se necesitó más capital por lo que aceptaron a otro comerciante. Al cabo de cierto tiempo se repartieron las utilidades correspondiendo al primer comerciante los 5/4 del segundo y al tercero del doble del primero. Determine al aporte del tercer comerciante.

Resolución:

Aportes y tiempos:

1.^{er} comerciante: $50 000; (10 + t) meses

2.° comerciante: $60 000; (5 + t) meses

3.^{er} comerciante: C, t meses

Donde: $U_1 = \frac{5}{4}U_2$; $U_3 = 2U_1$

Si: $U_2 = 4k$; $U_1 = 5k$; $U_3 = 10k$

$$\Rightarrow \frac{50\,000(10+t)}{5k} = \frac{60\,000(5+t)}{4k} = \frac{Ct}{10k}$$

Se obtiene t = 5, luego:

$$\Rightarrow \frac{50\,000(10+5)}{5} = \frac{C(5)}{10}$$

∴ C = $300 000

48. Dos personas A y B ganaron en un negocio $222, donde A contribuyó con $60 durante 9 meses y B, contribuyó con cierto capital durante 5 meses. Si el socio B obtuvo una ganancia igual a los 3/2 de su capital. Hallar el capital de B.

Resolución:

		Capital	Tiempo		Ganancia
222 {	A	60	9	⇒	G
	B	C	5		3C/2

Se cumple: $\frac{G_A}{60\times9} = \frac{3C/2}{C\times5} \Rightarrow G_A = 162$

Si: $\underbrace{G_A}_{162} + G_B = 222 \Rightarrow G_B = 60 = 3C/2$

∴ Capital de B: $C = \frac{2}{3}(60) = \$40$

49. Dos personas A y B realizan un negocio, el socio A aporta S/.2000 durante 3 meses y luego se retira. Faltando 2 meses para que termine el negocio retorna aportando S/.4000, el socio B aportó S/.3000 y se mantuvo todo el tiempo en el negocio el cual duró x meses. Halle la suma de las cifras de x, si el socio B obtuvo una ganancia de un 200% más que la ganancia que obtuvo el socio A?

Resolución:

Socio A:
Aporta S/.2000 durante 3 meses
Aporta S/.4000 durante 2 meses
Socio B:
Aporta S/.3000 durante x meses
Donde: ganancia B = ganancia A + 200%
$\Rightarrow G_B = G_A + 200\%G_A = 300\%G_A$

Luego: $G_B = 3G_A \Rightarrow \dfrac{G_A}{2000\times 3 + 4000\times 2} = \dfrac{G_B}{3000x}$

$\Rightarrow \dfrac{G_A}{6+8} = \dfrac{3G_A}{3x} \Rightarrow x = 14$ meses

$\therefore$ Suma de cifras: 5

50. Edy inicia un negocio con S/.40 000 a los 7 meses admite un socio de S/.30 000 de capital y 5 meses después admite otro socio con S/.20 000 de capital. Si a los 6 años de iniciado se liquidó el negocio y se determinó que el monto de las utilidades fue de S/.36 180. ¿Cuánto le corresponde a Edy?

Resolución:

$$36180\begin{cases} 40 & 72 \to 288 \\ 30 & 65 \to 195 \\ 20 & 60 \to 120 \end{cases} \qquad k = \frac{36\,180}{603}, \quad k = 60$$

$\therefore$ A Edy le toca: $288 \times 60 =$ S/.17 280

51. Una persona invierte en un negocio 1000 soles, pero necesitando más dinero se asocia con 3 personas en épocas diferentes. Si a los 30 meses de iniciado el negocio se disuelve la empresa, recibiendo todos la misma utilidad. ¿A los cuántos meses de haber entrado el segundo, entró el tercero, sabiendo que invirtieron 2000 y 3000 soles respectivamente?

Resolución:

Sea: $\dfrac{1000\times 30}{U_1} = \dfrac{2000t_2}{U_2} = \dfrac{3000t_3}{U_3} = \dfrac{Ct_4}{U_4}$

Como las utilidades son iguales:
$1000 \times 30 = \underbrace{2000t_2}_{t_2 = 15\text{ m}} = \underbrace{3000t_3}_{t_3 = 10\text{ m}}$

$\therefore$ Entra 5 meses después

52. Un grupo de capitalistas forman una empresa, aportando distintos capitales; después aceptaron otros socios en distintas fechas, 2 de los cuales, los socios A y B ingresaron respectivamente, 8 y 6 meses antes del reparto de la utilidad obtenida en cierto periodo. Si A aportó 40% del capital que aportaron entre los 2 juntos y sus utilidades suman el 20% de la utilidad total repartida. ¿Qué porcentaje de la utilidad total recibió B?

Resolución:

A aporta 40% total por 8 meses
B aporta 60% total por 6 meses

$\Rightarrow \dfrac{U_A}{40\%T\times 8} = \dfrac{U_B}{60\%\%\times 6}$

$\Rightarrow \dfrac{U_A}{8} = \dfrac{U_B}{9} = \dfrac{(U_A+U_B)}{8+9} = \dfrac{20\%U_{Total}}{17}$

$\therefore U_B = 10{,}59\%\ U_{Total}$

53. Lolo inició un negocio, 6 meses después se asoció con Pedro quien aportó 3/5 del capital de Lolo, 2 meses más tarde se les unió José que aportó los 7/8 de lo que Lolo y Pedro habían puesto en el negocio. Si después de 1 año de iniciado el negocio se obtuvo una ganancia de S/.889 000. ¿Cuál es la utilidad que le corresponde a Pedro?

Resolución:

Si x es el capital aportado por Lolo se tendrán los siguientes datos:

6 meses	2 meses	4 meses

Lolo: 5c Pedro: 3c José: $\dfrac{7}{8}(5c + 3c) = 7c$

Repartiendo la ganancia:

$$\text{S/.689 000}\begin{cases} 5c \times 12 = 30 \\ 3c \times 6 = 9 \\ 7c \times 4 = 14 \end{cases} \quad \text{DP}, \quad \text{total } 53$$

$\therefore$ Utilidad de Pedro: $9 \times \dfrac{689\,000}{53} =$ S/.117 000

54. Se tiene que x + y = 15 y que al repartir 855 en 4 partes directamente proporcional a: x; 1/x; 1/y se obtiene como constante de reparto 56. Halle la mayor de las partes.

Resolución:

Constante de Reparto: $\dfrac{855}{x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}} = 56$

Se obtiene: $xy = 56 \wedge x + y = 15$
$\Rightarrow x = 7 \wedge y = 8$

$\therefore$ Mayor parte: $8 \times 56 = 448$

55. En una sociedad, A aporta S/.25 000 y B S/.36 000. Luego de 8 meses C y D ingresan a la sociedad aportando S/.40 000 y S/.20 000 respectivamente. Si el beneficio al término de un año fue de S/.43 740. ¿Qué parte le corresponde a B? (en soles)

Resolución:

$$43\,740\begin{cases} 25\,000 \times 12 \Rightarrow 25 \times 3 = 75 \\ 36\,000 \times 12 \Rightarrow 36 \times 3 = 108 \\ 40\,000 \times 4 \Rightarrow 40 \times 1 = 40 \\ 20\,000 \times 4 \Rightarrow 20 \times 1 = 20 \end{cases}$$

$K = \dfrac{43\,740}{75 + 108 + 40 + 20} = 180$

$\therefore$ A B le toca: $180 \times 108 =$ S/.19 440

56. El gerente de una fábrica reparte S/.121 000 entre sus tres empleados, tomando en cuenta sus años de servicio y las inasistencias en ese lapso. Si los empleados tuvieron 10; 5 y 3 años de servicio 9; 4 y 3 inasistencias respectivamente; hallar la mayor diferencia de soles recibidos entre dos empleados si se sabe que dichas inasistencias perjudican a cada uno.

Resolución:

Según el enunciado:

$$121\,000\begin{cases} \begin{array}{cccl} \text{DP} & \text{IP} & \rightarrow & \text{DP} \\ 10 & 9 & \rightarrow & \left(\frac{10}{9}\right)36 = 40 \\ 5 & 4 & \rightarrow & \left(\frac{5}{4}\right)36 = 45 \\ 3 & 3 & \rightarrow & \left(\frac{3}{3}\right)36 = \underline{36} \\ & & & \quad\quad\quad\; 121 \end{array} \end{cases}$$

$$\Rightarrow k = \frac{121000}{121} = 1000$$

Observamos que la mayor diferencia se establece entre las partes que tienen como índice a 45 y 36.

$\therefore$ Mayor diferencia: $(45 - 36)1000 =$ S/.9000

57. A forma una empresa con un capital de \$45 000, al mes de iniciado el negocio admitió a un socio B, quien aportó \$60 000. El socio A administró el negocio y por esto recibió el 10% de las utilidades antes de cualquier reparto, ¿cuántos meses funcionó la empresa? Sabiendo que cuando se disolvió a cada socio le correspondió la mitad de la utilidad total.

Resolución:

Cada socio recibe la mitad de la utilidad, esto es el 50%, pero el primero recibe 10% por administración solo el 40% es por el capital aportado y tiempo de permanencia:

$$\frac{40\%}{45\,000 \times t} = \frac{50\%}{60\,000(t-1)} \Rightarrow 15t = 16(t-1)$$

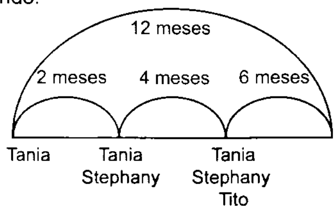
$\therefore$ $t = 16$ meses

58. Tania inicia un negocio, y a los 2 meses acepta a Stephany como socia y 4 meses más tarde admiten a Tito como tercer socio. Si los tres aportaron el mismo capital y se tienen que repartir al año un capital de \$2800, ¿cuánto le toca a Tania?

Resolución:

Aquí se nota que los capitales aportados son todos iguales, así que solo se hará el reparto a los tiempos en que colocarán su dinero.

Graficando:



Tiempo de Tania: 12 meses
Tiempo de Stephany: 10 meses
Tiempo de Tito: 6 meses

\$2800 DP a 12; 10 y 6
6 5 3 (Propiedad)

$$\left.\begin{array}{l} 6k \\ 5k \\ 3k \end{array}\right\} \begin{array}{l} k = \dfrac{2800}{14} \\ k = 200 \end{array} \left\} \begin{array}{l} \text{Tanía: \$1200} \\ \text{Stephany: \$1000} \\ \text{Tito: \$600} \end{array}\right.$$

$\therefore$ Tania recibe: \$1200

59. Tres socios reunieron un capital de S/.30 000 para hacer un negocio. El primero aportó S/.8000 durante 5 meses, el segundo S/.10 000 durante 3 meses y el tercero los restantes durante 6 meses. Se quiere calcular el beneficio de cada socio, sabiendo que el beneficio total fue de 213 000 soles.

Resolución:

Disponiendo los datos, se tiene:

$$213\,000\begin{cases} \begin{array}{lclcl} \text{DP} & & \text{DP} & & \text{Partes} \\ 8000 - 4 & \rightarrow & 5 & \Rightarrow & g_1 = 4 \times 5 \times k = 20k \\ 10\,000 - 5 & \rightarrow & 3 & \Rightarrow & g_2 = 5 \times 3 \times k = 15k \\ 12\,000 - 6 & \rightarrow & 6 & \Rightarrow & g_3 = 6 \times 6 \times k = 36k \end{array} \end{cases}$$

Donde: $k = \dfrac{213\,000}{20 + 15 + 36} = 3000$

Luego las partes son:

$g_1 =$ S/.60 000; $g_2 =$ S/.45 000; $g_3 =$ S/.108 000

60. Un padre reparte S/.8,91 entre sus tres hijos en forma DP a los promedios de notas que obtuvieron y que fueron 15,3; 14,4 y 12,6 e IP a las faltas que tuvieron durante el año que fueron 3; 2 y 3 respectivamente. ¿Cuál es la diferencia de lo que recibieron el segundo y el tercero?

Resolución:

Efectuando el reparto:

$$\text{S/.}8{,}91\begin{cases} \begin{array}{ccc} \text{DP} & \text{IP} & \text{DP} \\ 15{,}3 & 3 & 1/3 \\ 14{,}4 & 2 & 1/2 \\ 12{,}6 & 3 & 1/3 \end{array} \end{cases}$$

DP cancelando el factor 1,3:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{15{,}3}{3} = 5{,}1 \rightarrow 17; \\ \dfrac{14{,}4}{2} = 7{,}2 \rightarrow 24; \\ \dfrac{12{,}6}{3} = 4{,}2 \rightarrow 14 \end{array}\right\} \Rightarrow k = \frac{8{,}91}{55} = \frac{81}{500}$$

$\therefore$ Del 2.° y 3.°: $(24 - 14)\dfrac{81}{500} = 1{,}62$

61. Un señor inicia una empresa con un capital de S/.60 000; para conseguir más capital se asocia con tres personas en distintas fechas que aportaron S/.48 000; S/.75 000 y S/.50 000. Después de 1 año y 8 meses se separan y cada uno recibe

la misma parte de las utilidades. ¿Cuántos meses estuvo en la empresa el socio que aportó mayor capital?

Resolución:

Efectuando el reparto:

60×20
$48 \times a$
$75 \times b$ (el de mayor capital)
$50 \times c$

Como reciben la misma utilidad, entonces todos los índices son iguales. Por ello: $75 \times b = 60 \times 20$

$\therefore$ El tiempo es: $b = 16$ meses

62. El producto de la suma de la mayor y menor de las partes por la parte intermedia que resulta de repartir un número directamente proporcional a 3; 5 y 7 es 45 000. Hallar dicho número.

Resolución:

Como el reparto es directo entonces las partes son proporcionales a los índices por lo cual las partes serán:

1.°: 3k; 2.°: 5k; 3.°: 7k

Total: $3k + 5k + 7k = 15k$ ...(α)

Por dato: $(3k + 7k)(5k) = 45\,000 \Rightarrow k = 30$

$\therefore$ El número es: $15k = 15 \times 30 = 450$

63. Cuatro socios forman un negocio aportando S/.5600; S/.4200; S/.8000 y S/.2200. El negocio fracasa y lo que pierden los dos primeros es S/.80 menos que los que pierden los dos últimos. ¿Cuánto pierde el primero?

Resolución:

La pérdida de cada socio es DP a sus aportaciones.

$$\text{Pérdida}\begin{cases} \left.\begin{array}{l} 5600 = 28k \\ 4200 = 21k \end{array}\right\} 49k \\ \left.\begin{array}{l} 8000 = 40k \\ 2200 = 1k \end{array}\right\} 51k \end{cases}$$

- Siendo la constante de reparto: $k = \dfrac{\text{Pérdida}}{100}$
- Por dato: $49k = 51k - 80 \Rightarrow k = 40$

$\therefore$ $P_1 = 28 \times 40 =$ S/.1120

64. Dividir 3600 en tres partes, de modo que la segunda sea la triple de la primera y la tercera, la mitad de la suma de las dos primeras partes. Dar como respuesta las dos mayores partes.

Resolución:

Sean las partes: a, b y c

Donde: $a + b + c = 3600$ ... (1)

Por dato tenemos: $b = 3a$ ...(α)

Y además: $c = \dfrac{a+b}{2}$ ...(2)

Reemplazando (α) en (2): $c = 2a$ ...(β)

Reemplazando (α) y (β) en (1):

$a + 3a + 2a = 3600 \Rightarrow a = 600$

$\therefore$ Se tiene: $b = 1800 \wedge c = 1200$

65. Dos ganaderos arriendan un pastizal por S/.6546. El primero introduce 150 reses durante 180 días, dejándolas en él 10 horas diarias. El segundo introduce 80 reses durante 260 días dejándolas 8 horas diarias. ¿Qué suma debe pagar el segundo ganadero?

Resolución:

Resulta evidente que el reparto del pago deberá ser DP tanto al número de reses como al número de días y al número de horas diarias.

$$\text{S/.6546}\begin{cases} \begin{array}{ccc} \text{DP} & \text{DP} & \text{DP} \\ 150 & 180 & 10 \\ 80 & 260 & 8 \end{array} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ DP

$$\left.\begin{array}{l} 150 \times 180 \times 10 = 675 \\ \underbrace{80 \times 260 \times 8}_{\text{cancelando el factor 400}} = 416 \end{array}\right\} k = \frac{6546}{675 + 416} = 6$$

$\therefore$ El 2.° pagará: $416 \times 6 =$ S/.2496

66. Las edades de 7 hermanos son números consecutivos. Si se reparte una suma de dinero proporcionalmente a sus edades, el menor recibiría la mitad del mayor y el tercero S/.80 000. ¿Cuánto recibirá el quinto?

Resolución:

Sean las edades de mayor a menor:

n; $n - 1$; $n - 2$; $n - 3$; $n - 4$; $n - 5$; $n - 6$

Asimismo, sea N la cantidad a repartir:

$$\begin{array}{l} N \rightarrow \text{DP} \\ n \\ n-1 \\ n-2 \\ n-3 \\ n-4 \\ n-5 \\ n-6 \\ \hline 7n-21 \end{array}$$

Constante de reparto: $k = \dfrac{N}{7n-21}$

Lo del menor: $(n - 6)k$

Lo del mayor: nk

Por dato: $(n - 6)k = \dfrac{1}{2}nk \Rightarrow n = 12$

Lo del tercero: $(n - 2)k = 80\,000 \Rightarrow k = 8000$

$\therefore$ Lo del quinto: $(12-4)8000 =$ S/.64 000

67. Descomponer 70 en tres partes cuyos cuadrado sean directamente proporcionales a 0,2; 0,5; 0,4 e inversamente proporcional a 3; 1,2 y 8/3. Dar la mayor parte.

Resolución:

Expresando cada decimal por una fracción:

	A^2	B^2	C^2
DP	2	5	4
DP	1/3	5/5	3/8

(× a la izquierda; × 10 a la derecha)

DP a: $\left.\frac{2}{3}; \frac{25}{6}; \frac{3}{2}\right\} \times 6 \Rightarrow$ DP a: 4; 25 y 9

Extrayendo raíz cuadrada:

$\frac{A}{2} = \frac{B}{5} = \frac{C}{3} \Rightarrow k = \frac{70}{10} = 7$

$\therefore$ Mayor parte: B= 35

68. Dividir el número 300 en 4 partes que sean DP a 2^{201}; 2^{202}; 2^{203} y 2^{204}.

Resolución:

Sean las partes: x_1, x_2, x_3 y x_4

Se cumplen: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 300$ ...(1)

$\frac{x_1}{2^{201}} = \frac{x_2}{2^{202}} = \frac{x_3}{2^{203}} = \frac{x_4}{2^{204}}$ ...(2)

En la igualdad (2) se puede escribir:

$$\frac{x_1}{1 \times 2^{201}} = \frac{x_2}{2 \times 2^{201}} = \frac{x_3}{2^2 \times 2^{201}} = \frac{x_4}{2^3 \times 2^{201}}$$

Simplificando las consecuentes: $\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{4} = \frac{x_4}{8}$

Aplicando la propiedad fundamental:

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{4} = \frac{x_4}{8} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{1 + 2 + 4 + 8} = \frac{300}{15} = 20$$

De aquí:

$x_1 = 1 \times 20 = 20$ $x_2 = 2 \times 20 = 40$

$x_3 = 4 \times 20 = 80$ $x_4 = 8 \times 20 = 160$

69. Se desea repartir S/.N en partes DP a los números: 5; a^2; $3a^2$; b; 3b e IP a los números: ab^2; b^2; ab; a; b. Si el reparto se hubiera hecho en partes iguales, la primera tendría S/.6300 más. Hallar N, si a + b= 5.

Resolución:

En el primer reparto: $x_1 + x_2 + x_3 = x_4 = N$ ...(1)

$$\frac{x_1}{\frac{5}{ab^2}} = \frac{x_2}{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{x_3}{\frac{3a^2}{ab}} = \frac{x_4}{\frac{b}{a}} = \frac{x_5}{\frac{3b}{b}}$$

Multiplicando los consecuentes por ab^2 resulta:

$$\frac{x_1}{5} = \frac{x_2}{a^3} = \frac{x_3}{3a^2b} = \frac{x_4}{b^3} = \frac{x_5}{3ab^2}$$

Aplicando la propiedad fundamental:

$$\frac{x_1}{5} = \frac{x_2}{a^3} = \frac{x_3}{3a^2b} = \frac{x_4}{b^3} = \frac{x_5}{3ab^2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5 + a^3 + 3a^2b + b^3 + 3ab^2}$$

$$= \frac{N}{5 + (a + b)^3} = \frac{N}{5 + 5^3} = \frac{N}{130}$$

De donde: $x_1 = 5N/130 = N/26$

Si el reparto se realiza en partes iguales:

$y'_1 = y'_2 = y'_3 = y'_4 = y'_5 = N/5$

Por dato: N/5 − N/26 = 6300

$\Rightarrow$ 26N − 5N = 5 × 26 × 6300

$\Rightarrow$ N = (5 × 26 × 6300)/21 $\therefore$ N = S/.39 000

70. Cuatro hermanos se reparten una herencia en forma DP a ciertos números, correspondiéndoles S/.340 000, S/.170 000, S/.102 000 y S/.68 000. ¿Cuántos les correspondería si el reparto se hiciera en forma IP a los mismos números?

Resolución:

Primer reparto: DP a los números A, B, C y D.

Es evidente que el monto de la herencia es la suma de las partes, es decir:

Herencia = 370 000 + 170 000 + 102 000 + 68 000

Herencia = S/.680 000

Siendo el reparto DP, se cumple que:

$$\frac{340\,000}{A} = \frac{170\,000}{B} = \frac{102\,000}{C} = \frac{680\,000}{D}$$

Simplificando antecedentes: $\frac{10}{A} = \frac{5}{B} = \frac{3}{C} = \frac{2}{D}$

Se puede observar que los números proporcionales utilizados son como 10; 5; 3 y 2.

Segundo reparto: se hará en forma IP a los números 10; 5; 3 y 2, luego:

$$\frac{x_1}{\frac{1}{10}} = \frac{x_2}{\frac{1}{5}} = \frac{x_3}{\frac{1}{3}} = \frac{x_4}{\frac{1}{2}}$$

Multiplicando los consecuentes por:

30 = MCM(10; 5; 3; 2), se obtiene la siguiente igualdad de razones:

$$\frac{x_1}{3} = \frac{x_2}{6} = \frac{x_3}{10} = \frac{x_4}{15}$$

Aplicando la propiedad fundamental:

$$\frac{x_1}{3} = \frac{x_2}{6} = \frac{x_3}{10} = \frac{x_4}{15} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{3 + 6 + 10 + 15} = \frac{680\,000}{34} = 20\,000$$

$\therefore$ De aquí: $x_1 = 3 \times 20\,000 =$ S/.60 000

$x_2 = 6 \times 20\,000 =$ S/.120 000

$x_3 = 10 \times 20\,000 =$ S/.200 000

$x_4 = 15 \times 20\,000 =$ S/.300 000

71. Salvador decide repartir su herencia que, consiste en S/.480 000, de modo que S/.360 000 se repartan entre todos los hijos en forma DP al orden en que nacieron y los S/.120 000 restantes para el hijo mayor, de modo que él y el último reciban la misma suma. Hallar el número de hijos sabiendo que es más de 2.

Resolución:

Reparto de los S/.360 000 entre todos los hijos DP al orden de nacimiento:

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{3} = \dots \frac{x_n}{n} = \frac{x_1 + x_2 \dots + x_n}{1 + 2 + \dots + n} = \frac{360\,000}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

El 1.^er^ hijo recibe: $x = \frac{2(360\,000)}{n(n+1)} = \frac{720\,000}{n(n+1)}$

El último hijo recibe: $x_n = \frac{2n(360\,000)}{n(n+1)} = \frac{720\,000}{(n+1)}$

Según dato: $x_1 + 120\,000 = x_n$

$$\frac{720\,000}{n(n+1)} + 120\,000 = \frac{720\,000}{(n+1)}$$

$$\frac{6}{n(n+1)} + 1 = \frac{6}{(n+1)}$$

6 + n(n + 1) = 6n $\Rightarrow$ 6 = n(5 − n)

$n^2 - 5n + 6 = 0 \Rightarrow (n - 3)(n - 2) = 0$

$\Rightarrow n = 2 \lor n = 3 \quad \therefore n = 3$

72. Un hombre muere dejando a su esposa embarazada un testamento de S/.130 000, que se repartirá de la siguiente forma:

- 2/5 a la madre y 3/5 a la criatura si nace varón.
- 4/7 a la madre y 3/7 a la criatura si nace niña.

Pero sucede que la señora da a luz un varón y una niña. Determine lo que les toca a la niña y el varón, en ese orden.

Resolución:

La herencia es S/.130 000

La relación de las partes será:

- Si nace varón:
  Madre 2/5, Varón: 3/5 $\Big\}\ \dfrac{R_{madre}}{2\times 2}=\dfrac{R_{varón}}{3\times 2}$
- Si nace mujer
  Madre: 4/7, Niña: 3/7 $\Big\}\ \dfrac{R_{madre}}{4}=\dfrac{R_{niño}}{3}$

Como nació varón y niña estableceremos una relación entre lo que recibe la madre, el varón y la niña

$$\frac{R_{madre}}{4}=\frac{R_{varón}}{6}=\frac{R_{niña}}{3}=\frac{130\ 000}{13}=10\ 000$$

Observamos que: $R_{madre}+R_{varón}+R_{niña}=130\ 000$

$\therefore\ R_{varón}=6\times 10\ 000=$ S/.60 000

$R_{niña}=3\times 10\ 000=$ S/.30 000

73. Una cantidad N de soles se reparte en forma DP a las edades de tres personas A, B y C, correspondiendo a A S/.359 100 y a B S/.718 200. Si los S/.N se reparte entre A y B en forma IP a sus edades, entonces B recibe S/.837 900. Si la suma de las edades es 49, ¿cuál es la suma de los cuadrados de dichas edades?

Resolución:

Si las edades son:

a, b y c $\Rightarrow$ $a+b+c=49$ ...(1)

En el primer reparto que es DP a sus edades.

Se tiene: $\dfrac{359\ 100}{a}=\dfrac{718\ 200}{b}=\dfrac{x}{c}$

De aquí, tomando la 1.ª y 2.ª razón y simplificando las antecedentes: $\dfrac{1}{a}=\dfrac{2}{b}$ $\Rightarrow b=2a$

En el segundo reparto realizado solo entre A y B en forma IP a sus edades.

Se tiene: $\dfrac{N-837\ 900}{\frac{1}{a}}=\dfrac{837\ 900}{\frac{1}{b}}$

Luego: $a(N-837\ 900)=b(837\ 900)$

$a(N-837\ 900)=2a(837\ 900)\Rightarrow N=$ S/.2 513 700

Siendo: S/.2 513 700 la cantidad repartida, en el primer reparto.

Entonces: $359\ 100+718\ 200+x=2\ 513\ 700$

$\Rightarrow x=$ S/.1 436 400

En la serie (2): $\dfrac{359\ 100}{a}=\dfrac{718\ 200}{b}=\dfrac{1\ 436\ 400}{c}$

Simplificando: $\dfrac{1}{a}=\dfrac{2}{b}=\dfrac{4}{c}$

Según la ecuación (1):

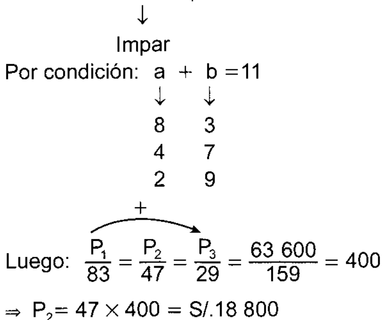
$$\frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{4}{c}=\frac{1+2+4}{a+b+c}=\frac{7}{49}=\frac{1}{7}$$

De donde: a = 7; b = 14; c = 28

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=7^2+14^2+28^2=1029$

74. Se reparte S/.63 600 DP a 3 números primos de la forma $\overline{ab}$. Obtener la cantidad intermedia y dar como respuesta la suma de sus cifras, sabiendo además que a + b = 11.

Resolución:



Luego: $\dfrac{P_1}{83}=\dfrac{P_2}{47}=\dfrac{P_3}{29}=\dfrac{63\ 600}{159}=400$

$\Rightarrow P_2=47\times 400=$ S/.18 800

$\therefore$ Suma de cifras P_2: 1 + 8 + 8 = 17

75. En cierto examen se pidió repartir un número N en forma IP a 2/3, 3/4 y 5/6, pero cierto alumno, lo hizo en forma DP y al comparar sus respuestas con las correctas, observó que una de las partes que él había obtenido tenía 988 unidades menos que la parte correcta correspondiente. Hallar N.

Resolución:

Reparto pedido: IP a 2/3; 3/4 y 5/6: $\dfrac{x_1}{\frac{3}{2}}=\dfrac{x_2}{\frac{4}{3}}=\dfrac{x_3}{\frac{6}{5}}$

$$\frac{x_1}{\frac{3}{2}(30)}=\frac{x_2}{\frac{4}{3}(30)}=\frac{x_3}{\frac{6}{5}(30)};\ 30=\text{MCM}(2;3;5)$$

$$\frac{x_1}{45}=\frac{x_2}{40}=\frac{x_3}{36}=\frac{x_1+x_2+x_3}{45+40+36}=\frac{N}{121}$$

De donde las partes son:

$x_1=\dfrac{45N}{121}=\dfrac{1215N}{3267}$; $x_2=\dfrac{40N}{121}=\dfrac{4080N}{3267}$

$x_3=\dfrac{36N}{121}=\dfrac{972N}{3267}$

Reparto por el alumno: DP a 2/3; 3/4 y 5/6

$$\frac{y_1}{\frac{2}{3}(12)}=\frac{y_2}{\frac{3}{4}(12)}=\frac{y_3}{\frac{5}{6}(12)};\ 12=\text{MCM}(3;4;6)$$

$$\frac{y_1}{8}=\frac{y_2}{9}=\frac{y_3}{10}=\frac{y_1+y_2+y_3}{8+9+10}=\frac{N}{27}$$

De aquí obtenemos las partes que equivocadamente ha obtenido el alumno.

$y_1=\dfrac{8N}{27}=\dfrac{968N}{3267}$; $y_2=\dfrac{9N}{27}=\dfrac{1089N}{3267}$

$y_3=\dfrac{10N}{27}=\dfrac{1210N}{3267}$

El problema dice que una de estas partes tiene 988 unidades menos que la parte correcta correspondiente, y para saber cuál de ellas es, debemos compararlas.

De lo anterior se deduce que se refiere a la primera parte, luego:

$$\frac{1215N}{3267}-\frac{968N}{3267}=988$$

$\Rightarrow$ 1215N − 968N = 988 × 3267 $\quad\therefore$ N = 13 068

76. Un grupo de 6 alumnos resuelve en 5 horas una tarea consistente en 10 problemas de igual dificultad. La siguiente tarea consiste en resolver 4 problemas cuya dificultad es el doble que la de los anteriores. Si no se presentan dos integrantes del grupo, entonces los restantes alumnos terminarán la tarea en:

Resolución:

Observamos que en el problema intervienen 4 magnitudes con sus valores correspondientes.

		1.°	2.°
	N.° de alumnos (A)	6	4
I.P.	(IP) Tiempo empleado en horas (T)	5	n
D.P.	(DP) N.° de problemas resueltos (P)	10	4
D.P.	(DP) Dificultad (D)	1	2

De las relaciones de proporcionalidad concluimos:

$$\frac{A\times T}{P\times D}=\text{constante}$$

Luego, reemplazando los valores correspondientes se tiene:

$$\overbrace{\frac{6\times 5}{10\times 1}}^{1.^a}=\overbrace{\frac{4\times n}{4\times 2}}^{2.^a}\qquad\therefore n=6$$

77. Jorge y María forman una empresa con S/.500 y S/.300 respectivamente, si al cabo de 2 meses Jorge decide aumentar en S/.200 su capital y luego de 3 meses más decide retirar S/.100. Si el negocio duró 9 meses al cabo de los cuales se repartió una ganancia de S/.8200, y luego María la ganancia que obtuvo decide repartirlo a 3 de sus hijos en forma directamente proporcional a sus edades que son 7, 5 y 15 años. Calcular cuánto le toca al mayor de los hijos.

Resolución:

Tiempo = 9 meses

Jorge: 500 (2 meses), 700 (3 meses), 600 (4 meses)

María: 300 (9 meses)

Ganancia total S/.8200

$$\frac{G_{Jorge}}{500\times 2+700\times 3+600\times 4}=\frac{G_{María}}{300\times 9}$$

$$\frac{G_{Jorge}}{55}=\frac{G_{María}}{27}=\frac{8200}{82}=100;\quad G_{María}=S/.2700$$

Luego: S/.2700 se reparte DP a 7; 5 y 15, entonces al mayor de los hijos de María le toca:

$$\therefore 15\left(\frac{2700}{7+5+15}\right)=1500$$

78. Calcular la rentabilidad porcentual mensual obtenida por los socios de una empresa comercial, si se sabe que uno de ellos aportó S/.30 000 durante 4 meses y luego en los 2 meses siguientes aportó S/.15 000 más, recibiendo al final del ejercicio S/.115 000, incluyendo su capital

Resolución:

Sea a% el porcentaje pedido:

I. Por el capital de S/.30 000 gana:
   a%(30)(6 meses) = 180(a%)

II. Por el capital de S/.15 000 gana:
   a%(15)(2 meses) = 30(a%)

$\Rightarrow$ Gana: 180a% + 30a% = 115 − $\underbrace{(30+15)}_{\text{Capital}}$

$\Rightarrow$ 210a% = 70 $\quad\therefore$ a = 33,33

79. Dos agricultores A y B tienen respectivamente 8 y 7 hectáreas de terreno que desean sembrar. Cuando ya habían sembrado 3/5 de cada propiedad contratan a un obrero C y a partir de ese momento A, B y C trabajan igual. Al final se le pagó S/.1200 a C. ¿Cuánto pagó A y B?

Resolución:

Son 8 + 7= 15 ha

Han sembrado 3/5, falta sembrar: $\frac{2}{5}(15)=6$ ha

A, B, C siembran: 6/3= 2 ha, cada uno

$\Rightarrow$ Lo que hace C en:

A: $\frac{2}{5}(8)-2=\frac{6}{5}$ (Falta; Hace A)

B: $\frac{2}{5}(7)-2=\frac{4}{5}$ (Falta; Hace B)

El reparto se hace proporcional a lo que hace C.

	DP	Índices
1200	6/5 (en A)	3
	4/5 (en B)	2

$$\Rightarrow k=\frac{1200}{3+2}=240$$

$\therefore$ Recibe: 3(240) = 720 ∧ 2(240) = 480

80. Bill formó una empresa y cada 3 meses incorporó un socio con un capital igual al suyo, hasta incorporaron 2 socios, después de algunos meses se repartieron las utilidades, a Bill le tocó el cuádruplo de lo recibido por el último socio incorporado. Si el segundo socio incorporado recibió S/.10 000 de utilidad. ¿A cuánto ascendió la utilidad de la empresa?

Resolución:

$$U\begin{cases} c & t \\ c & t-3 \\ c & t-6 \end{cases} \Rightarrow \frac{U_1}{t}=\frac{U_2}{t-3}=\frac{U_3}{t-6}$$

Pero: $U_1 = 4U_3$; $t = 4(t-6) \Rightarrow t = 8$

Luego: $\frac{U_1}{8}=\frac{U_2}{5}=\frac{U_3}{2}=\frac{\text{Total}}{8+5+2}$

Como: U_3 = S/.10 000 ∴ Total = S/.75 000

81. Un padre al morir deja una herencia a sus 3 hijos para que supongan de ella en forma directamente proporcional a sus edades que son 6 años, 9 años y 12 años; pero deciden no hacerlo si no hasta que todos sean mayores de edad. ¿Qué porcentaje de lo que le correspondía al morir el papá perdió uno de ellos?

Resolución:

Sea H la herencia.

Si el reparto es inmediato:

$$H\begin{cases} 6 & 2 \rightarrow & 2k \\ 9 & 3 \rightarrow & 3k \\ 12 & 4 \rightarrow & 4k \end{cases} \Rightarrow H = 9k \quad (\text{Partes})$$

Para que todos sean mayores de edad, deben pasar 12 años

$$9k\begin{cases} 18 & 6 \rightarrow 6(9k/21) = 18k/7 \\ 21 & 7 \rightarrow 7(9k/21) = 21k/7 \\ 24 & 8 \rightarrow 8(9k/21) = 24k/7 \end{cases}$$

El tercero debió recibir: $4k = 28k/7$

Pero recibe: $24k/7 \Rightarrow$ Deja de recibir $4k/7$

Luego, perdió: $4k/7 = x\%(28k/7) \Rightarrow x = 25$

∴ Perdió 25%

82. Cierta persona deja una herencia de S/.111 millones a 2 sobrinos, 3 sobrinas y 5 primos, de modo que en el reparto cada primo reciba S/.3 por cada S/.4 que reciba cada sobrina y por cada S/.2 que recibe cada sobrina, cada sobrino debe recibir S/.0,50 más. ¿Cuánto recibió cada sobrino, en millones de soles?

Resolución:

Del enunciado: $\frac{P}{3}=\frac{S_A}{4} \wedge \frac{S_A}{2}=\frac{S_O}{2+0,5}$

$\Rightarrow \frac{P}{3}=\frac{S_A}{4}=\frac{S_O}{5} \Rightarrow P = 3m;\ S_A = 4m;\ S_O = 5m$

En el reparto:

$$111\begin{cases} 2(5m) & \rightarrow 10 \\ 3(4m) & \rightarrow 12 \\ 5(3m) & \rightarrow 15 \end{cases} \Rightarrow k = \frac{111}{10+12+15} = 3 \quad (\text{Índices})$$

A los sobrinos les tocaría: $10 \times 3 = 30$

∴ Cada sobrino recibe: $\frac{30}{2} = 15$

83. Un premio tiene que repartirse en partes proporcionales a las notas que obtienen 3 personas que son: 20, 17 y 14. Pero en el momento del reparto se hizo el reparto proporcionalmente a 21, 18 y 15. Por lo que uno de ellos quedó perjudicado en $60. ¿Cuál fue el monto del premio? Dar como respuesta la suma de sus cifras.

Resolución:

Primer reparto

$$N\begin{cases} 20 \rightarrow 20k \\ 17 \rightarrow 17k \\ 14 \rightarrow 14k \end{cases}$$

Segundo reparto

$$N\begin{cases} 21 \rightarrow 21k' \\ 18 \rightarrow 18k' \\ 15 \rightarrow 15k' \end{cases}$$

$N = (20 + 17 + 14)k = (21 + 18 + 15)k'$

$\Rightarrow N = 51k = 54k' \Rightarrow 17k = 18k'$

Haciendo $k = 18m$; $k' = 17m$

Al reemplazar

$20k = 360m$ $\quad 21k' = 357m$

$17k = 306m$ $\quad 18k' = 306m$

$14k = 252m$ $\quad 15k' = 255m$

Comparando, se observa que el primero se perjudica:

$360m - 357m = 60 \Rightarrow m = 20$

Monto: $N = 51k = 51(18 \times 20) \Rightarrow N = 18\,360$

∴ Suma de cifras: 18

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2003 - I)

Dos amigas compran a y b papayas (a > b) respectivamente; en el camino se encuentran con un amigo y deciden compartir entre los tres las papayas, en partes iguales. Si el amigo pagó P nuevos soles por su parte, entonces la repartición del dinero entre las dos amigas es:

A) $\frac{(a-b)P}{a+b}; \frac{2bP}{a+b}$ B) $\frac{2aP}{a+b}; \frac{(a-b)P}{a+b}$

C) $\frac{(b-2a)P}{a+b}; \frac{(a-2b)P}{a+b}$ D) $\frac{(2a-b)P}{a+b}; \frac{(2b-a)P}{a+b}$

E) $\frac{aP}{a+b}; \frac{bP}{a+b}$

Resolución:

Dividiendo cada papaya en tres partes, se tiene:

$3(a + b)$ partes

Cada uno come: $a + b$ partes

La primera amiga dio: $3a - (a + b) = 2a - b$ partes

La segunda amiga dio: $3b - (a + b) = 2b - a$ partes

Las amigas se reparten la recompensa de P nuevos soles, de manera proporcional a sus aportes:

$$\frac{P_1}{2a-b}=\frac{P_2}{2b-a}=\frac{P_1+P_2}{a+b}$$

$$\therefore P_1 = \frac{(2a-b)P}{a+b} \wedge P_2 = \frac{(2b-a)P}{a+b}$$

Clave: D

PROBLEMA 2 (UNI 2004 - I)

La repartición de una herencia fue inversamente proporcional a las edades de tres personas, el reparto fue de: 29 400; 16 800; 39 200, respectivamente. Proporcione la suma de las cifras de la cantidad que hubiese recibido la persona de menor edad, si la repartición hubiera sido directamente proporcional a sus edades.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

Resolución:

Analizando el primer caso: (parte)(edad) = cte

Aplicando: $(29\,400)E_1 = (16\,800)E_2 = (39\,200)E_3$

$21E_1 = 12E_2 = 28E_2$

Dividiendo por 84, se tiene: $\frac{E_1}{4} = \frac{E_2}{7} = \frac{E_3}{3}$ ...(1)

En el segundo caso: $\frac{(\text{parte})}{(\text{edad})} = \text{cte.}$

Aplicando: $\frac{P_1}{E_1} = \frac{P_2}{E_2} = \frac{P_3}{E_3}$ ...(2)

De (1) y (2): $\frac{P_1}{4} = \frac{P_2}{7} = \frac{P_3}{3} \Rightarrow P_1 = 4k;\ P_2 = 7k;\ P_3 = 3k$

Luego: $14k = 29\,400 + 16\,800 + 39\,200$

$k = 6100 \Rightarrow P_3 = 18\,300$

∴ Suma de cifras: 12

Clave: C

PROBLEMA 3 (UNI 2005 - I)

Un padre deja una herencia a sus 3 hijos. La reparte en partes inversamente proporcionales a los números 6; 4 y 3 empezando por el hijo mayor, respectivamente. Si el valor de la herencia asciende a 36 000 dólares ¿Cuánto le corresponde al hijo menor?

A) \$4000 B) \$8000 C) \$9000
D) \$12 000 E) \$16 000

Resolución:

Herencia: 36 000 dólares

	Mayor	intermedio	Menor
Sean las partes:	a	b	c
Son IP a:	6	4	3

Entonces se cumple: $6a = 4b = 3c$ ...(α)

Pero: $a + b + c = 36\,000$

Al dividir la relación (α) entre 12 tendremos:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{a+b+c}{2+3+4} = \frac{36\,000}{9} = 4000$$

∴ Le corresponde al menor: c = \$16 000

Clave: E

PROBLEMA 4 (UNI 2009 - II)

Tres socios A, B y C deberían repartirse una utilidad de M dólares proporcionalmente a sus edades, las cuales son x del socio A, (x − 3) del socio B y (x − 6) del socio C. Como el reparto se realizó un año después, calcule la cantidad que recibe el socio que más se perjudica.

A) $\frac{M(x+1)}{3(x-2)}$ B) $\frac{M(x-2)}{x+1}$ C) $\frac{M(x+3)}{x-1}$
D) $\frac{M(x-1)}{x-3}$ E) $\frac{M(x+1)}{2(x-3)}$

Resolución:

Nos piden: cantidad que recibe el socio que más se perjudica

Socio	Cantidad a recibir al inicio	Cantidad recibida en un año
A	xn	(x + 1)m
B	(x − 3)n	(x − 2)m
C	(x − 6)n	(x − 5)m
Total:	3(x − 3)n	3(x − 2)n

Sabemos que el total repartido al inicio y luego de un año es el mismo, entonces:

$$3(x-3)n = 3(x-2)m$$

$\Rightarrow m = \frac{(x-3)n}{(x-2)}$ ...(1)

Además: $3(x-3)n = M$ (cantidad que debían repartirse)

$\Rightarrow n = \frac{M}{3(x-3)}$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1) tenemos: $m = \frac{M}{3(x-2)}$

De la tabla, el socio A es el que más se perjudica y este recibe:

$$(x+1)m = (x+1)\frac{M}{3(x-2)} = \frac{M(x+1)}{3(x-2)}$$

Clave: A

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Hallar la mayor parte que resulta de repartir 1740 en forma proporcional a los números 42^2; 28^2 y 56^2.

A) 1456 B) 1546 C) 1564
D) 1465 E) 960

2. Divide 630 000 en 21 partes que son DP a 21 números enteros consecutivos. Si la diferencia entre la mayor y la menor parte es 8000, hallar la suma de los 21 números consecutivos.

A) 1475 B) 1550 C) 1525
D) 1575 E) 1600

3. Hallar la diferencia entre la mayor y menor de las partes, que resulta de repartir 1560 en forma proporcional a los números:

1/12; 1/20; 1/30; ....; 1/240.

A) 399 B) 418 C) 437
D) 456 E) 465

4. Repartir 8232 en partes inversamente proporcionales a los números: 2; 6; 12; 20; 30; ...; 2450. Si se ordenan de mayor a menor, ¿cuál es la parte que ocupa el lugar 15?

A) 15 B) 35 C) 21
D) 25 E) 32

5. Se reparte el número 145 800 en partes proporcionales a todos los números pares, desde 10 a 98. ¿Cuánto le toca al que es proporcional a 72?

A) 1111 B) 214 C) 4320
D) 1580 E) N. A.

6. Repartir S/.3936 entre tres personas, de modo que la parte de la primera sea a la segunda como 7 es a 6 y que la parte de la segunda sea a la tercera como 4 es a 5. Determine la parte intermedia.

A) 1344 B) 1152 C) 1536
D) 1056 E) 1440

7. Una cantidad que debía repartirse IP a los números 3/4; 5/6 y 3/8 respectivamente; por equivocación, se hizo DP a dichos números, por lo cual uno resultó recibiendo S/.11 780 menos de lo que debía recibir. Determine la suma de las cifras de la cantidad que se reparte.

A) 21 B) 22 C) 23
D) 24 E) 25

8. Repartir S/.2712 entre tres personas de modo que, la parte de la primera sea a la de la segunda como 8 es a 5 y que la parte de la segunda a la de la tercera como 6 es a 7. La diferencia entre la mayor y menor de las partes es:

A) S/.384 B) S/.408 C) S/.480
D) S/.432 E) S/.456

9. Al repartir una cantidad en forma DP a 36; 60 y 45 e IP a 16; 24 y 60, se observó que la diferencia entre la mayor y menor de las partes es S/.5600. La suma de cifras de la cantidad repartida es:

A) 14 B) 15 C) 16
D) 17 E) 18

10. Al repartir S/.15 500 IP a los números $\sqrt[3]{24}$; $\sqrt[3]{81}$ y $\sqrt[3]{375}$, ¿cuántos soles recibe el mayor?

A) 7500 B) 5000 C) 4500
D) 3600 E) N. A.

11. Se reparte "N" en forma proporcional a 2, "a" y "b", observándose que la parte de "a" es 720 y es la media aritmética de las otras dos partes. Hallar "N".

A) 3120 B) 2840 C) 2160
D) 1620 E) 2130

12. Una cantidad se reparte IP a los números 2/5; 1/4; 2/9; 1/5 y 1/N. Siendo la parte de 1/N, un tercio del total, ¿cuál es el valor de N?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

13. Si se reparte "N" en partes DP a los números 24; 15 y 20 e IP a 40; 24 y 25, se obtiene, que entre las dos primeras exceden a la tercera en 76. La suma de las cifras de N es:

A) 18 B) 16 C) 19
D) 15 E) 17

14. Se reparte S/.14 400 entre 3 personas A, B y C, proporcionalmente a sus edades. Se sabe que la edad de A es el doble que la de B y que a C le corresponde S/.4200. Hallar la edad de A, sabiendo que la suma de las 3 edades es 72.

A) 31 B) 32 C) 33
D) 34 E) 35

15. A, B y C poseen juntos un terreno, siendo sus partes proporcionales a 4; 2,5 y 1,5. "A" vende la mitad de su parte a "C" y éste vende 100 m^2 a "B"; por lo que las partes de "B" y "C" resultan iguales. Hallar el área correspondiente inicialmente a "A".

A) 160 m^2 B) 400 m^2 C) 240 m^2
D) 220 m^2 E) 420 m^2

16. Se desea repartir una herencia entre tres hermanos, dos de ellos de 18 y 32 años; discuten si hacerlo directa o inversamente proporcional a sus edades; le piden al tercero que opine y él respon-

de: "Me da igual". Determinar la herencia, si al tercero le tocó S/.12 000.

A) S/.39 000 B) S/.38 000 C) S/.37 000
D) S/.36 000 E) S/.35 000

17. Diariamente se reparten S/.330 entre 2 obreros A y B en forma DP a su rendimiento. Un día A recibe S/.176 y B el resto; al otro día, A disminuye su eficiencia en un 25% y B la aumenta en un 20%. Hallar la diferencia entre las cantidades que recibirán A y B en este nuevo reparto.

A) S/.54 B) S/.55 C) S/.56
D) S/.57 E) S/.58

18. Se reparte una herencia entre 5 hermanos, en forma DP a sus edades que son números pares consecutivos. Si lo que recibe el menor es la mitad de lo que recibe el mayor y la diferencia entre lo que recibe el segundo y cuarto hermano es $6000. La herencia repartida es:

A) $90 000 B) $60 000 C) $80 000
D) $75 000 E) $10 500

19. Tres amigos compraron un billete de lotería de S/.10. El primero contribuyó con S/.3,4; el segundo con S/. 5,1 y el tercero con el resto. El billete salió premiado con S/.50 000 y dieron al lotero los 3/25 del premio. ¿Cuánto correspondió al primero de los amigos?

A) S/.19 460 B) S/.18 520 C) S/.14 960
D) S/.15 280 E) S/.22 500

20. Tres obreros se reparten una gratificación en partes proporcionales a sus jornales, que son: S/.2400; S/.3000 y S/.4200. No pareciéndoles justo el reparto, después de efectuado, acuerdan que fueran por partes iguales y para ello, entrega el tercero S/.10 000 al segundo y éste una cierta cantidad al primero. ¿Cuál fue esa cantidad que el segundo entregó al primero?

A) S/.8000 B) S/.8120 C) S/.8110
D) S/.9000 E) S/.9800

21. José decide repartir una suma de dinero entre sus tres sobrinos, proporcionales a sus edades de éstos, sabiendo que sus edades son números pares consecutivos. Si lo que le toca al mayor, es 5 veces de lo que le toca al menor, y ambas partes suman S/.800, determinar la suma que se repartió.

A) S/.2000 B) S/.1000 C) S/.1500
D) S/.2500 E) S/.1200

22. Tres obreros A, B y C trabajan en cierta obra. El propietario de la obra entrega quincenalmente S/.7400. En la quincena que trabaja A y B corresponde a A los 3/4 de B; en la quincena que trabaja B y C, el primero cobró los 3/4 de C. Determinar la cantidad que debe recibir B en la quincena que trabajan los 3.

A) S/.1800 B) S/.2400 C) S/.3200
D) S/.1600 E) N. A.

23. Se ha repartido S/.6000 entre 10 personas. Si a cualquiera de las 5 primeras le toca 1/5 que a cualquiera de las otras 5, ¿cuánto le tocó a la primera persona?

A) S/.100 B) S/.200 C) S/.700
D) S/.150 E) N. A.

24. Dos pastores llevan 5 y 3 panes respectivamente; se encuentran con un cazador hambriento, y comparten con éste los 8 panes en partes iguales. Si el cazador pagó S/.4,8 por su parte, ¿cuánto corresponde a cada pastor?

A) S/.4,2; S/.0,6 B) S/ 4; S/.0,8
C) S/.4,1; S/.0,7 D) S/.4,5; S/.0,3
E) N. A.

25. Dividir 3024 directamente proporcional a 3 números de manera que el primero y el segundo están en la relación de 3 a 4 y el segundo con el tercero en la relación de 5 a 7. Dar como respuesta la mayor cantidad.

A) 180 B) 1344 C) 950
D) 2111 E) N. A.

26. Un muchacho vive en el último piso de un edificio y en una de sus salidas baja los escalones de 2 en 2 y los sube de 3 en 3, dando en total 100 pasos. ¿Cuántos peldaños tiene la pieza?

A) 180 B) 150 C) 120
D) 130 E) N. A.

27. Se reparte 2800 en forma DP a A y B; si lo correspondiente a A es una cantidad entera, determinar lo correspondiente a B, si: A − B = 7.

A) 1300 B) 1200 C) 1500
D) 1100 E) 1120

28. En la puerta de una iglesia se encuentran generalmente 2 mendigos: siempre un ciego y alternando un cojo y un manco. Una persona caritativa manda a su criado con 519 monedas de plata y le dice: "Si está el ciego y el cojo por cada 9 monedas que da al ciego le das 7 al cojo, pero si está el ciego y el manco, por cada 8 monedas que des al ciego le das 5 al manco".
Por casualidad aquel día estaban los 3 mendigos; el criado, hábil en las matemáticas realizó el reparto correcto con los 3 mendigos. ¿Cuánto le correspondió al ciego?

A) 48 B) 216 C) 315 D) 246 E) 316

29. Se reparte una cantidad de dinero entre 5 hermanos, en forma DP a sus edades, que son números consecutivos. Si lo que recibe el menor es 1/4 menos de lo que recibe el mayor y la diferencia entre lo que recibe el 2.° y 4.° hermano es S/.3000, hallar la cantidad de dinero repartido.

A) S/.105 000 B) S/.100 000 C) S/.24 000
D) S/.120 000 E) N. A.

30. Un canal para riego cuya construcción ha costado 1 644 000 soles fue construido y usado en común por tres propietarios. La superficie de riego del segundo propietario es 5/8 que la del primero y la del tercero es 4/9 que la del segundo. ¿Cuál es la aportación del tercer propietario?

A) S/.350 000 B) S/.530 000
C) S/.240 000 D) S/.420 000
E) S/.300 000

31. Un señor tiene 3 sobrinos A, B y C, cuando se encuentra con A y B les da propina, a A le da el triple que B; cuando encuentra a A y C, a A le da el doble de C. Un día se encuentra con los tres y reparte entre ellos S/.187. ¿Cuántó le toca a C?

A) S/.34 B) S/.102 C) S/.51
D) S/.120 E) N. A.

32. Un padre decide repartir una cantidad en forma directamente proporcional a las edades de sus hijos 18; 15 y 10 años e inversamente proporcional al tiempo que les falta para terminar sus estudios superiores, que son respectivamente: de 3; 7 y 11 años. Si el mayor recibirá S/.184 800, ¿a cuánto asciende la herencia?

A) S/.278 800 B) S/.284 200
C) S/.292 000 D) S/.268 400
E) S/.274 500

33. Se hizo un reparto IP a ciertos números, obteniéndose 18 000; 14 400 y 12 000. Si el reparto hubiera sido DP a los mismos números, una de las partes es:

A) 11 860 B) 14 700 C) 17 760
D) 11 480 E) 14 880

34. Se desea repartir una cantidad proporcionalmente a tres enteros consecutivos, si el reparto se hiciera proporcionalmente a los tres siguientes consecutivos, ¿cómo varía la segunda parte?

A) Aumenta 1/3 B) Disminuye 1/6
C) Aumenta 1/5 D) Disminuye 1/4
E) No varía

35. Una herencia dejada por su padre a sus 3 hijos se repartió inversamente proporcional a sus edades, siendo: 12; n y 24 años. Si el reparto hubiera sido directamente proporcional a sus edades, el que tiene "n" años hubiera recibido los 13/12 de lo que recibió. Hallar "n".

A) 13 B) 18 C) 15
D) 16 E) 17

36. Dividir 1320 en partes que sean directamente proporcionales a $\sqrt{1183}; \sqrt{1372}$ y $\sqrt{2023}$. Dar como respuesta la mayor cantidad.

A) 510 B) 450 C) 380
D) 190 E) N. A.

37. Repartir un grupo de obreros de 2420 hombres en 3 cuadrillas, de modo que los efectivos asignados a cada uno de ellos sean entre sí como los números $2\frac{1}{2}; 3\frac{1}{3}$ y $4\frac{1}{4}$ e indicar con cuántos obreros cuenta una de las cuadrillas.

A) 1020 B) 1000 C) 500
D) 750 E) N. A.

38. Un moribundo deja S/.74 000 a dos sobrinos, 3 sobrinas y 5 primos, advirtiendo que la parte de cada primo debe ser los 3/4 de la de una sobrina y la de cada sobrina 4/5 de la de un sobrino. ¿Cuánto le toca a cada sobrino?

A) S/.6400 B) S/.7200 C) S/.6000
D) S/.8000 E) S/.10 000

39. Se desea repartir una gratificación de $1290 entre 3 trabajadores A, B y C en forma DP a los años de servicio, DP a su rendimiento e IP a sus minutos de tardanza de acuerdo al cuadro siguiente:

	Años	Rendimiento	Tardanza
A	15	80	40 h
B	12	90	30 h
C	10	70	35 h

¿Cuánto le corresponde al que recibe la parte mayor de la gratificación?

A) $640 B) $720 C) $620
D) $680 E) $540

40. Si se reparte "N" en partes DP a los números 24; 15 y 20 e IP a 40; 24 y 15, se obtiene que entre las dos primeras exceden a la tercera en 765. La suma de cifras de N es:

A) 18 B) 16 C) 19
D) 15 E) 17

41. Se reparte S/.10 500 entre 4 personas; lo que le toca a la primera es a lo que le toca a la segunda como 2 es a 3; lo de la segunda es a la tercera como 4 es a 5 y lo de la tercera es a lo de la última como 6 es a 7. ¿Cuánto recibe la tercera persona?

A) S/.30 B) S/.3000 C) S/.300
D) S/.50 E) N. A.

42. Al repartir S/.2550 en partes que sean directamente proporcionales a 1; 2; 3; 4; ...; n se obtiene que la suma de las 20 primeras partes resulta S/.420. Hallar "n".

A) 17 B) 450 C) 20
D) 50 E) N. A.

43. Repartir S/.4536 en 4 partes cuyos cuadrados sean directamente proporcionales a 4; 9; 16 y 25. ¿Cuál es la mayor cantidad repartida?

A) S/.1296 B) S/.1620 C) S/.972
D) S/.648 E) N. A.

44. Si al dividir 12 276 en partes DP a 1; 2; 4; 8; ...; 2n la mayor de las partes es 6144, ¿cuál es el valor de n?

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

45. Dos socios forman una compañía aportando $200 y $500. Al cabo de 3 meses ingresa otro socio aportando cierto capital, 5 meses después se reparten las utilidades, tocándole igual parte a los que aportaron mayor capital. ¿Cuál fue el capital impuesto por el tercer socio?

A) $800 B) $100 C) $200
D) $400 E) N. A.

46. Cuando se liquida una empresa sus tres socios reciben entre aportes y ganancias S/.45 000; S/.70 000 y S/.85 000 respectivamente. Si la ganancia total fue de S/.20 000, ¿cuál fue la mayor de las 3 ganancias?

A) S/.6500 B) S/.7000 C) S/.7500
D) S/.8000 E) S/.8500

47. Dos personas A y B se unen para formar un negocio aportando cada uno S/.4000 y S/.7000; 4 meses después, C entra al grupo aportando S/.5000. ¿Cuántos meses después de iniciado el negocio entró D a la sociedad, sabiendo que aportó S/.8000 y que del beneficio anual de S/.86 700, A recibió S/.20 400?

A) 8 B) 7 C) 6
D) 9 E) 10

48. Una persona inicia un negocio aportando S/.5000; 2 meses después ingresa un segundo socio aportando S/.8000; 3 meses más tarde admiten un tercer socio cuyo aporte es de S/.10 000; luego de 5 meses más, el primer socio aumenta su capital en 2/5 de una inversión. Si el negocio duró 20 meses, hallar la ganancia del último, si en total se ganó S/. 6210.

A) S/.2500 B) S/.3000 C) S/.2000
D) S/.2250 E) S/.2800

49. Dos amigos se asociaron para explotar un negocio que va a durar 2 años. El primero impone S/.2000 y al cabo de 8 meses S/.1500 más; el segundo impone al principio S/.2500, retira a los 5 meses S/.1000 y 2 meses más tarde agrega S/.500. Si hay una pérdida de S/.12 150, ¿cuánto le corresponde perder al segundo?

A) S/.4790 B) S/.4950 C) S/.4650
D) S/.4750 E) N. A.

50. Un fabricante empezó un negocio con $8000 de capital, cuatro meses después aceptó un socio con $12 000 de aporte, y 2 meses más tarde aceptaron un tercer socio con $10 000 de capital. Si a los 2 años de iniciado el negocio éste se liquidó y al ser repartida la utilidad el primer socio recibió $15 200 menos que los otros 2 juntos, ¿cuál fue la ganancia del tercer socio?

A) $10 000 B) $11 000
C) $12 000 D) $1250
E) $13 000

51. Dos personas A y B forman una compañía, el capital que aporta A es la mitad que el de B, pero el tiempo que permanece A en la compañía es el triple del tiempo que permanece B. Si al repartir las utilidades, la diferencia entre la utilidad de A y la de B fue de S/.40 000, hallar la utilidad total de la compañía.

A) S/.240 000 B) S/.400 000
C) S/.120 000 D) S/.200 000
E) S/.18 000

52. Dos amigos reunieron un capital de 10 000 unidades monetarias para hacer un negocio. El primero dejó su capital durante 3 meses y el otro durante 2 meses; al terminar el negocio las ganancias fueron iguales. Averiguar el capital que impuso el primer socio.

A) 4000 B) 6000 C) 3000
D) 7000 E) 5400

53. Tres personas forman una sociedad, el primero puso $6000, el segundo $4000 durante 6 años y el tercero $2000 durante 8 años. Al repartirse la utilidad de $10 000 proporcionales a los capitales y tiempo, el segundo y el tercero recibieron juntos $5000. ¿Qué tiempo estuvo colocado el capital del primero?

A) 4 años 2 meses B) 5 años 6 meses
C) 6 años 8 meses D) 6 años 9 meses
E) 4 años 8 meses

54. Cuatro socios reúnen $20 000, de los cuales el primero pone $4000, el segundo los 3/4 de lo que puso el primero, el tercero los 5/3 de lo que puso el segundo y el cuarto lo restante. Explotan una

industria durante 4 años; si hay que repartir una ganancia de $15 000, ¿cuánto le toca al cuarto?

A) $8000 B) $5000 C) $3000
D) $9000 E) $6000

55. Cuatro amigos forman una sociedad: el segundo aportó 1/5 más que el primero, el tercero 3/5 más que el primero y el cuarto S/.36 000 más que los tres juntos. La ganancia total del negocio es S/.888 000 y el cuarto recibió S/.454 800 de ganancia. ¿Qué capital puso el primero?

A) S/.200 000 B) S/.220 000 C) S/.210 000
D) S/.190 000 E) S/.180 000

56. Cuatro personas hicieron un fondo común y han ganado S/.24 000. El primero recibió S/.8000, el segundo S/.6000, el tercero S/.5900 y el cuarto que había colocado S/.16 400 recibió el resto de la ganancia. ¿Cuánto invirtió el primer socio?

A) S/.30 000 B) S/.32 000 C) S/.34 000
D) S/.36 000 E) N. A.

57. Dos individuos A y B ganaron en un negocio S/.18 500; A contribuyó con S/.3750 durante 8 meses, B con un cierto capital durante 5 meses. Se sabe que B triplicó su capital, hallar el capital de B.

A) S/.3300 B) S/.3310 C) S/.3350
D) S/.3320 E) S/.3250

58. Se tienen 2 socios A y B, los cuales han aportado capitales de S/.300 000 y S/.500 000 respectivamente y han permanecido tiempos que son proporcionales a 4 y 3 respectivamente. Si al final A se retira con S/.314 400, producto de su capital y ganancia, ¿con cuánto se retira B?

A) S/.518 000 B) S/.524 000
C) S/.520 000 D) S/.530 000
E) S/.508 000

59. Un fabricante empezó un negocio con $8000 de capital, cuatro meses después aceptó un socio con $12 000 de aporte y 2 meses más tarde aceptaron un tercer socio con $10 000 de capital. Si a los 2 años de iniciado el negocio éste se liquida y al ser repartida la utilidad el primer socio recibió $15 200 menos que los otros 2 juntos. ¿Cuál fue la ganancia del tercer socio?

A) $10 000 B) $11 000 C) $12 000
D) $12 500 E) $13 000

60. Tres socios reunieron un capital para hacer un negocio: el capital del primero fue S/.12 000 y lo impuso durante 2 años, el segundo fue su capital ia mitad del primero pero lo impuso durante 30 meses y el tercero, su capital fue S/.18 000 y lo impuso durante 6 meses. Al final se obtuvo una ganancia de S/.32 000. ¿Cuánto de ganancia obtuvo el tercero?

A) S/.6000 B) S/.12 000 C) S/.8000
D) S/.7500 E) N. A.

61. Varios socios forman una empresa y como utilidad se reparten $72 600, sabiendo que cada socio aporta el triple que el anterior y que el primer socio recibió por todo $900 incluido su capital y ganancia, siendo su utilidad el doble de lo que se aporta. Calcular el número de socios.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

62. Un industrial empezó un negocio, a los 9 meses admitió un socio y 3 meses después de éste entró un tercer socio. Cada uno de ellos aportó en el negocio la misma cantidad. Si el negocio duró 16 meses al cabo de los cuales la utilidad fue de S/.81 000, ¿cuánto le tocó a cada uno?

A) S/.48 000; S/.21 000; S/.12 000
B) S/.40 000; S/.29 000; S/.12 000
C) S/.45 000; S/.24 000; S/.12 000
D) S/.50 000; S/.19 000; S/.12 000
E) S/.50 000; S/.15 000; S/.16 000

63. Después de 3 meses que "A" había fundado una empresa, para lo cual depositó S/.12 000 se asoció con B que aportó 20% menos que A; 2 meses más tarde se les unió C que aportó el 75% de lo que habían depositado A y B; al cabo de 2 meses más liquidaron la empresa y tuvieron que afrontar una pérdida de S/.7740. ¿Cuánto de la pérdida le corresponde al socio C?

A) S/.1290 B) S/.1920 C) S/.1620
D) S/.1260 E) S/.4200

64. Tres socios, cuando ha sido disuelta su sociedad, han retirado en forma conjunta su aporte y su ganancia. El primero S/.39 400, el segundo S/.32 320 y el tercero S/.13 640. Sabiendo que la ganancia ha sido de S/.10 670, se pide hallar cuáles son los aportes y las ganancias de cada uno de los asociados. Dar como respuesta el aporte menor.

A) S/.13 935 B) S/.11 935 C) S/.14 935
D) S/.13 195 E) S/.11 395

65. La ganancia obtenida en un negocio es repartida en forma proporcional al capital aportado por cada uno de ellos. Si los capitales son $600; $800 y $1000 respectivamente y sabiendo que en el reparto al tercero le toca $100 más que al primero, entonces al segundo le corresponde:

A) $150 B) $400 C) $300
D) $100 E) $200

66. Tres socios se reparten los beneficios obtenidos en un negocio, correspondiéndole al primero S/.5040, al segundo S/.3780 y al tercero S/.2940; pero les

dicen que tienen que pagar entre los tres S/.420 de impuesto. ¿Cuánto recibe realmente el primer socio?

A) S/.4820 B) S/.4830 C) S/.4840
D) S/.4850 E) S/.4860

67. Tres personas se asociaron para establecer un negocio; la primera puso mercaderías y la segunda S/.10 000. Obtuvieron una ganancia de S/.20 000, de los cuales, la primera recibió S/.8000 y la tercera S/.7000. Calcular el importe de las mercaderías.

A) S/.14 000 B) S/.16 000
C) S/.18 000 D) S/.12 000
E) S/.20 000

68. Dos socios aportan $1500 y $3500 en una empresa; a los 6 meses se retira el primero; la empresa se liquidó al terminar el año y el primero ganó $510. Hallar la ganancia del segundo.

A) $2360 B) $2370 C) $2380
D) $2400 E) $2600

69. Tres socios intervienen en un negocio aportando capitales de S/.2000; S/.3000 y S/.7000 durante 2; 3 y 5 años respectivamente. Si el negocio quebró dejando una pérdida de S/.48 000, halle la pérdida del primer socio.

A) S/.4000 B) S/.40 000 C) S/.3500
D) S/.35 000 E) S/.9000

70. Tres socios A, B y C forman una empresa, aportando B el doble de A y C 25% más que B. Después de algunos meses, todos incrementan su capital en un 20% y cuando se reparten las utilidades, el que menos ganó obtuvo S/.20 000. La utilidad total es:

A) S/.100 000 B) S/.105 000
C) S/.110 000 D) S/.115 000
E) S/.120 000

71. Cuatro socios reúnen S/.200 000; de los cuales, el primero pone S/.40 000; el segundo los 3/4 de lo que puso el primero; el tercero los 5/3 de lo que puso el segundo y el cuarto lo restante. Explotan una industria durante 4 años. Si hay que repartir una ganancia de S/.150 000, calcular cuánto le tocó al cuarto socio.

A) S/.40 000 B) S/.30 000 C) S/.50 000
D) S/.60 000 E) S/.56 000

72. Para explotar un negocio por 2 años se asociaron tres personas A; B y C. A empezó con $6000 y a los 8 meses aumentó su capital en un 25%; B empezó con $8000 y a los 12 meses disminuyó su capital en un 25%; C empezó con $10 000 y a los 18 meses retiró su capital. Si al liquidar la sociedad la utilidad neta fue de $34 400, ¿qué utilidad le corresponde a C?

A) $11 200 B) $12 000 C) $12 200
D) $14 000 E) N. A.

73. "A" inició un negocio, 6 meses después se asoció con "B" quien aportó el 60% del capital que "A" había impuesto; 2 meses más tarde se les unió "C" que aportó el 7 por 8 de los que "A" y "B" habían impuesto en el negocio, si después de un año de empezado el negocio obtuvieron una utilidad de $37 100, ¿cuál es la utilidad líquida que le corresponderá a "C", considerando que tiene que pagar un impuesto a la renta de 4,5%?

A) $98 000 B) $44 000
C) $93 590 D) $47 500
E) $57 500

74. Se reparte "N" en forma proporcional a los 4 primeros números impares. La parte del tercero se reparte en forma IP a los números 16; 12; y 6 correspondiéndole S/.6000 al segundo. Calcular "N".

A) S/.72 000 B) S/.69 000
C) S/.64 000 D) S/.75000
E) S/.81 000

75. Dividir el número 4560 en tres sumandos cuyos cuadrados sean DP a las raíces cúbicas de 56; 875 y 2401 e IP a 2/9; 5/36 y 7/100, respectivamente. ¿Cuál será la mayor de las partes?

A) 720 B) 1440 C) 2880
D) 2400 E) 1200

76. Dividir el número 1520 en tres sumandos, cuyos cuadrados sean directamente proporcionales a las raíces cúbicas de 24; 375 y 1029 e inversamente proporcionales a $\frac{2}{9}$; $\frac{5}{36}$ y $\frac{7}{100}$ respectivamente. ¿Cuál será la menor de las partes?

A) 180 B) 200 C) 270
D) 240 E) 300

77. Álvaro dispuso que se repartieran s/.330 000 entre sus tres hijos A, B y C en forma inversa a sus edades. A, que tenía 30 años recibió S/.88 000, pero renunció a ello y lo repartió entre los otros dos directamente proporcional a sus edades y de estos S/.88 000 a B le tocó S/.8000 más que a C. Hallar la diferencia entre las edades de B y C.

A) 4 años B) 5 años C) 3 años
D) 8 años E) 9 años

78. Dos hermanos se reparten una herencia de la siguiente manera, la quinta parte DP a 2 y 3, los 2/5 del resto IP a 5 y 3, el resto DP a 5 y 7. Si a uno de los hermanos le tocó S/.7000 más que al otro, hallar el monto de la herencia.

A) S/.27 500 B) S/.47 500 C) S/.53 000
D) S/.42 500 E) S/.35 000

79. Al repartir 855 en forma directamente proporcional a 3 números impares consecutivos, una de ellas es 315. Hallar cuánto le hubiera correspondido a dicha parte si el reparto se hubiera hecho en forma inversamente proporcional a dichos números.

A) 245,4 B) 254,9 C) 265,7
D) 276,3 E) 255,9

80. Tres hermanos A, B y C disponen de S/.100; S/.120 y S/.140, respectivamente mientras que su cuarto hermano D había gastado su dinero. Los hermanos A; B y C acuerdan reunir sus partes y repartir el total entre los cuatro en partes iguales. El padre, al conocer dicha acción generosa, les entrega a los hermanos A, B y C S/.360 para que se repartan entre los 3. ¿Cuánto le tocó a C?

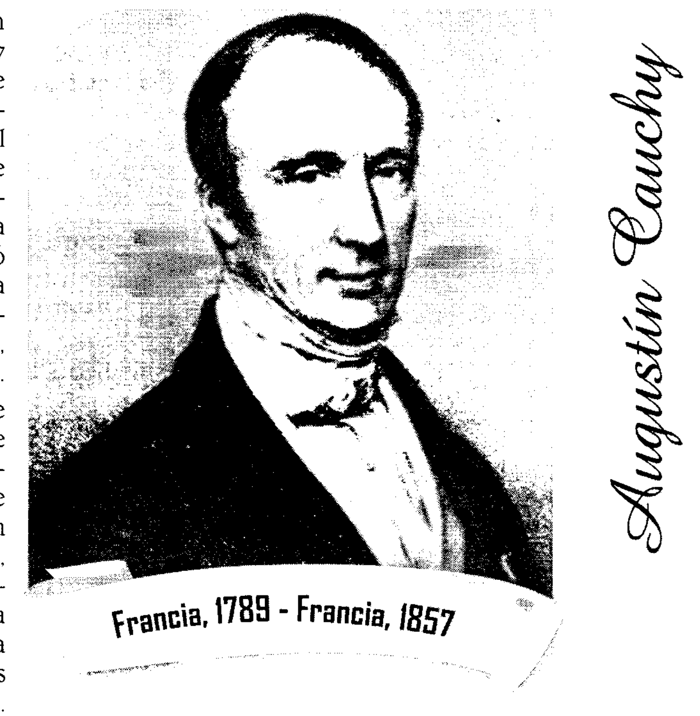
A) S/.120 B) S/.140
C) S/.240 D) S/.230
E) S/.200

CLAVES

1. E	11. C	21. E	31. C	41. B	51. D	61. A	71. D
2. D	12. D	22. B	32. A	42. D	52. A	62. A	72. B
3. D	13. A	23. B	33. C	43. B	53. C	63. C	73. C
4. B	14. D	24. A	34. E	44. D	54. E	64. B	74. A
5. C	15. B	25. B	35. B	45. A	55. D	65. E	75. D
6. A	16. C	26. C	36. A	46. E	56. B	66. E	76. D
7. A	17. B	27. E	37. A	47. A	57. E	67. B	77. A
8. D	18. A	28. B	38. E	48. D	58. E	68. C	78. E
9. A	19. C	29. A	39. E	49. B	59. C	69. A	79. E
10. E	20. A	30. C	40. A	50. C	60. A	70. C	80. E

Promedios | 17 capítulo

Augustin Louis Cauchy nació en París (21 de agosto de 1789) y murió en Sceaux (23 de mayo de 1857). Fue un matemático francés. Cauchy fue pionero en el análisis matemático y la teoría de grupos de permutaciones, contribuyendo de manera medular a su desarrollo. También investigó la convergencia y la divergencia de las series infinitas, ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidad y física matemática.



Cauchy empezó a educarse tempranamente con su padre quien ocupó varios puestos públicos menores y era amigo de Lagrange y Laplace. Estudió en la Escuela politécnica de París, donde obtuvo su título en Ingeniería. Comenzó a dedicarse a la investigación científica intensiva y a la publicación de varias obras importantes en rápida sucesión. Fue promovido a miembro de la Academia Francesa de las Ciencias en lugar de Gaspard Monge, quien fue expulsado por razones políticas.

En 1814 publicó la memoria de la integral definida que llegó a ser la base de la teoría de las funciones complejas. Cauchy precisa los conceptos de función, de límite y de continuidad en la forma actual o casi actual, tomando el concepto de límite como punto de partida del análisis y eliminando de la idea de función toda referencia a una expresión formal, algebraica o no, para fundarla sobre la noción de correspondencia. Murió en Sceaux, solo, abandonado por su familia y amigos. En su lecho de muerte se arrepentiría de lo que consideraba como su único error en la vida, no haber dedicado más tiempo a la matemática.

Fuente: Wikipedia

DEFINICIÓN

El promedio, de un conjunto de números ordenados según su magnitud, es un número que tiende a situarse en el centro de dicho conjunto de números.
Sea "P" el promedio de "n" cantidades ordenados según su magnitud.

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$$

Se cumple: $\boxed{a_1 < P < a_n}$

CLASES DE PROMEDIOS

Los promedios, como medidas de tendencia central, son: aritmético, geométrico, armónico y ponderado.
Sean "n" cantidades: $a_1; a_2; a_3; \ldots ; a_n$

Promedio aritmético (PA)

El promedio aritmético es el resultado de dividir la suma de las "n" cantidades entre "n".

$$\boxed{PA = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}}$$

Ejemplo:

Hallar el promedio aritmético (PA) de los siguientes números: 21; 28; 33; 46 y 24.

Resolución:

El promedio aritmético de los 5 números es:

$$PA = \frac{21 + 28 + 33 + 46 + 24}{5} = 30{,}4$$

$\therefore$ PA = 30,4

Promedio geométrico (PG)

El promedio geométrico es la raíz enésima del producto de las "n" cantidades positivas.

$$\boxed{PG = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times a_3 \times \ldots \times a_n}}$$

Ejemplo:

Hallar el promedio geométrico (PG) de los siguientes números: $9; 9^2; 9^3; 9^4; 9^5$.

Resolución:

El promedio geométrico de los 5 números es:

$$PG = \sqrt[5]{9 \times 9^2 \times 9^3 \times 9^4 \times 9^5} = \sqrt[5]{9^{15}} = 9^3 = 729$$

$\therefore$ PG = 729

Promedio armónico (PH)

El promedio armónico es el resultado de dividir la cantidad de números entre la suma de las inversas de dichas cantidades.

$$\boxed{PH = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}}}$$

Ejemplo:

Hallar el promedio armónico (PH) de los siguientes números: 24; 12; 18 y 36

Resolución:

El promedio armónico de los cuatro números es:

$$PH = \frac{4}{\frac{1}{24} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36}} = \frac{4}{\frac{15}{72}} = 19{,}2$$

$\therefore$ PH = 19,2

En el caso de dos números "a" y "b", los promedios serán:

a) Media aritmética (MA)

$$\boxed{MA = \frac{a + b}{2}}$$

b) Media geométrica (MG)

$$\boxed{MG = \sqrt{ab}}$$

c) Media armónica (MH)

$$\boxed{MH = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a + b}}$$

PROPIEDADES DE LOS PROMEDIOS

a) Si a un mismo conjunto de números se calculan los tres promedios (PA, PG y PH), se cumple:

$\boxed{PA > PG > PH}$ o $\boxed{MA > MG > MH}$

Ejemplo:

Hallar el PA, PG y PH de los siguientes números: 3; 4; 6 y 12

Resolución:

Hallamos los respectivos promedios:

* $PA = \frac{3 + 4 + 6 + 12}{4} = 6{,}25$

* $PG = \sqrt[4]{3 \times 4 \times 6 \times 12} = 5{,}42$

* $PH = \frac{4}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}} = 4{,}8$

Verificamos que: PA > PG > PH

Observaciones

Debemos tener presente para los promedios, lo siguiente:
* El mayor promedio: PA
* El promedio intermedio: PG
* El menor promedio: PH

b) Solo para dos números, se cumple:

$\boxed{MG^2 = MA \times MH}$ o $\boxed{MG = \sqrt{MA \times MH}}$

Ejemplo:

Sean los números 12 y 48.
Calcular sus tres promedios.

Resolución:

$MA = \dfrac{12+48}{2} = 30 \qquad MG = \sqrt{12 \times 48} = 24$

$$MH = \dfrac{2}{\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{48}} = \dfrac{2 \times 12 \times 48}{60} = 19{,}2$$

Se verifica que:
$MG^2 = 24^2 = 576; \ MA \times MH = 30 \times 19{,}2 = 576$
o $MG = \sqrt{30 \times 19{,}2} = 24$

c) Si se tiene un conjunto de números que forman una progresión aritmética, su promedio aritmético es la semisuma de sus términos equidistantes.

Ejemplo:

Sean los términos en progresión aritmética:
21; 24; 27; 30; 33
Hallar su promedio aritmético.

Resolución:

Promedio aritmético de los 5 números, por definición, es:

$$PA = \dfrac{21+24+27+30+33}{5} = 27$$

Otra forma: (términos equidistantes)

$$PA = \dfrac{21+33}{2} = \dfrac{24+30}{2} = 27$$

Ejemplo:

Sean los términos en progresión aritmética 17; 22; 27; 32; 37 y 42. Hallar su promedio aritmético.

Resolución:

El promedio aritmético de los 6 números es:

$$PA = \dfrac{17+22+27+32+37+42}{6} = 29{,}5$$

Otra forma: (términos equidistantes)

$$PA = \dfrac{17+42}{2} = \dfrac{22+37}{2} = \dfrac{27+32}{2} = 29{,}5$$

Observaciones

- Si la cantidad de términos de una progresión aritmética es impar, su promedio aritmético será el término central.
- Si la cantidad de términos de una progresión aritmética es par, su promedio aritmético será la semisuma de los términos centrales.

PROMEDIO PONDERADO

El promedio ponderado es el promedio aritmético de un conjunto de números que se repiten bajo una cierta frecuencia, período, peso o ponderación.

Ejemplo:

Calcular el promedio aritmético de los números: 8; 12; 5; 8; 5; 5; 12; 8; 5 y 18

Resolución:

Ordenamos los números, indicando su respectiva frecuencia (peso o período o ponderación) de repetición.

Números	Frecuencia
5	4
8	3
12	2
18	1

$$PA = \dfrac{5(4)+8(3)+12(2)+18(1)}{4+3+2+1} = \dfrac{86}{10} = 8{,}6$$

A este tipo de PA se le denomina promedio ponderado.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. La diferencia de dos números naturales es 11 y la suma de su media geométrica y su media aritmética es 60,5. Hallar la diferencia entre la media aritmética y la media geométrica.

Resolución:

Sean los números: a y b
Por datos: $a - b = 11$ ...(1)

Además: $MG(a; b) + MA(a; b) = 60{,}5$

$$\sqrt{ab} + \dfrac{a+b}{2} = 60{,}5 \Rightarrow 2\sqrt{ab} + a + b = 121$$

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = 121 \Rightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b} = 11 \quad ...(2)$$

De (1):

$$\underbrace{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}_{11}(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = 11 \Rightarrow \sqrt{a}-\sqrt{b} = 1 \quad ...(3)$$

De (2) y (3): $a = 36; \ b = 25$

Luego: $\underbrace{MA(36; 25)}_{30{,}5} - \underbrace{MG(36; 25)}_{30} = 0{,}5$

∴ La diferencia pedida: 0,5

2. Tres números enteros a, b y c tienen una media aritmética de 5 y una media geométrica de $\sqrt[3]{120}$.

Además, se sabe que el producto bc = 30. Hallar la media armónica de estos números.

Resolución:

Sean los números: a; b y c

Del enunciado:

$\frac{a+b+c}{3} = 5 \Rightarrow a + b + c = 15$ ...(1)

$\sqrt[3]{abc} \Rightarrow abc = 120$ ...(2)

$bc = 30$ ...(3)

(3) en (2): a = 4

En (1): b + c = 11 ...(4)

De (3) y (4): b = 6; c = 5

Nos piden: $MH(4; 5; 6) = \frac{3}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}} = \frac{360}{74}$

$\therefore MH(4; 5; 6) = \frac{360}{74}$

3. Los promedios de las edades de 30 hombres, 50 mujeres y 20 niños son 20; 18 y 10 años, respectivamente. Si disminuimos 3 años a cada hombre, aumentamos 3 años a las mujeres y disminuimos 1 año a los niños, ¿cuál será el promedio de las edades de las 100 personas?

Resolución:

Del enunciado:

PA(30 hombres) = 20; PA(50 mujeres) = 18; PA(20 niños) = 10

Luego:

Los hombres, 3 años menos

⇒ PA(30 hombres) = 20 − 3 = 17

Las mujeres, 3 años más

⇒ PA(50 mujeres) = 18 + 3 = 21

Los niños, 1 año menos

⇒ PA(20 niños) = 10 − 1 = 9

Hallamos el nuevo promedio:

$\therefore PA = \frac{17(30)+21(50)+9(20)}{30+50+20} = 17,4$

4. La media geométrica de cuatro números enteros diferentes es $2\sqrt{2}$. Calcular la media aritmética de dichos números enteros.

Resolución:

Sean los números: a; b; c y d

Se tiene: $\sqrt[4]{abcd} = 2\sqrt{2}$

Elevando a la cuarta: abcd = 64

Descomponiendo en cuatro factores diferentes:

abcd = 1 × 2 × 4 × 8

⇒ a = 1; b = 2; c = 4; d = 8

$\therefore PA = \frac{1+2+4+8}{4} = 3,75$

5. El promedio de las edades de 4 hermanos es 30 años. Si ninguno de ellos es mayor de 35 años, ¿cuál será la mínima edad que uno de ellos puede tener?

Resolución:

Sean a; b; c y d las edades de los 4 hermanos.

Por dato: PA(a; b; c; d) = 30

⇒ a + b + c + d = 120 ...(1)

Si ninguno es mayor de 35 años: $E_{máx.} = 35$

Hallamos la edad mínima de uno de ellos:

En (1): $35 + 35 + 35 + d_{mín.} = 120 \quad \therefore d_{mín.} = 15$

6. La serie: 2; 4; 8; 16; ... de "n" términos tiene a 2048 como promedio geométrico. Hallar "n".

Resolución:

La serie: $\underbrace{(2; 2^2; 2^3; .... ; 2^n)}_{\text{"n" términos}}$

$PG(2; 2^2; 2^3; ...; 2^n) = 2048$

$\sqrt[n]{2\times2^2\times2^3\times...2^n} = 2^{11} \Rightarrow \sqrt[n]{2^{\frac{n(n+1)}{2}}} = 2^{11}$

$\Rightarrow \frac{n+1}{2} = 11 \quad \therefore n = 21$

7. Sabiendo que la media aritmética y la media geométrica de "a" y "b" son números consecutivos, hallar: $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$.

Resolución:

Como la MA y MG de "a" y "b" son consecutivos se cumple: MA(a; b) − MG(a; b) = 1

$\Rightarrow \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = 1 \Rightarrow a + b - 2\sqrt{ab} = 2$

$\therefore (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 2$

8. En un curso, la nota promedio de las secciones A y B son 12 y 10, respectivamente; la sección B tiene 2/3 del número de alumnos que tiene A. Luego de los reclamos presentados por los alumnos, el promedio de la sección A sube 10% y el de B sube 20%. Hallar el promedio de ambas secciones.

Resolución:

Del número de alumnos: $B = \left(\frac{2}{3}\right)A \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{3}{2}$

Hallamos el promedio, luego de los reclamos:

	Cantidad	Promedio
Sección A:	3	12 + 10%(12) = 13,2
Sección B:	2	10 + 20%(10) = 12

$PA = \frac{3\times13,2+2\times12}{5} = 12,72$

∴ El PA de ambas secciones es 12,72.

9. El promedio geométrico de 30 números es 144 y de otros 60 números es 72. ¿Cuál es el promedio geométrico de los 90 números?

Resolución:

Del enunciado:

MG(30 números) = 144: $\sqrt[30]{a_1 \times a_2 \times \ldots a_{30}} = 144$

$\Rightarrow a_1 \times a_2 \times \ldots a_{30} = 144^{30}$ ...(1)

MG(60 números) = 72: $\sqrt[60]{b_1 \times b_2 \times \ldots b_{60}} = 72$

$\Rightarrow b_1 \times b_2 \times \ldots b_{60} = 72^{60}$ ...(2)

Hallamos el PG de los 90 números:

PG(90 números) = $\sqrt[90]{(a_1 \times a_2 \times \ldots a_{30})(b_1 \times b_2 \times \ldots b_{60})}$

PG(90 números) = $\sqrt[90]{144^{30} \times 72^{60}}$

$\Rightarrow \sqrt[90]{72^{90} \times 2^{30}} = 72\sqrt[3]{2}$

$\therefore$ PG(90 números) = $72\sqrt[3]{2}$

10. Hallar el promedio aritmético de los números: 4; 10; 18; 28; ... ; 460

Resolución:

De la serie: 4; 10; 18; 28; ...; 460
Enésimo término: $a_n = n^2 + 3n$
Número de términos: n = 20
Hallamos la suma de todos los términos:

$$S = \sum_{n=1}^{20}(n^2 + 3n) = \sum_{n=1}^{20} n^2 + 3\sum_{n=1}^{20} n$$

$$S = \frac{20 \times 21 \times 41}{6} + 3\left(\frac{20 \times 21}{2}\right) = 3500$$

$$\therefore PA = \frac{3500}{20} = 175$$

11. La media armónica de 3 números enteros es 72/11; la media aritmética de los números es 8 y su media geométrica es igual a uno de ellos multiplicado por $\sqrt[3]{6}$. Hallar el mayor de los números.

Resolución:

Sean los números: a; b y c

Del enunciado: PH(a; b; c) = $\frac{72}{11}$

$\Rightarrow \frac{3abc}{ab + ac + bc} = \frac{72}{11}$ ...(1)

PA(a; b; c) = 8 $\Rightarrow$ a + b + c = 24 ...(2)

PG(a; b; c) = $a\sqrt[3]{6} \Rightarrow \sqrt[3]{abc} = a\sqrt[3]{6}$

$\Rightarrow bc = 6a^2$ ...(3)

(3) en (1): $\frac{3abc}{ab + ac + 6a^2} = \frac{72}{11}$

$\Rightarrow \frac{3 \times 6a^2}{\underbrace{a + b + c}_{24} + 5a} = \frac{72}{11}$

Reduciendo: $\frac{a^2}{24 + 5a} = \frac{4}{11} \Rightarrow a = 4$

En (2): b + c = 20
En (3): bc = 96
} b = 12, c = 8

$\therefore$ El mayor número es 12.

12. El promedio de las notas en un curso de 30 alumnos es 56; los primeros 6 obtuvieron un promedio de 80 y los últimos 10 obtuvieron 36 de promedio, sabiendo que de los restantes ninguno superó los 62 puntos, calcular el menor promedio posible que alcanzaron 4 alumnos de esos restantes.

Resolución:

Del PA:

		Cantidad	Promedio
30 alumnos	Primeros:	6	80
		14	x
	Últimos:	10	36

Sabemos que: PA(30 alumnos) = 56

$$\frac{6(80) + 14x + 10(36)}{30} = 56 \Rightarrow x = 60$$

Suma de notas de los 14 alumnos: 14 × 60 = 840
Hallamos el menor promedio de los 4 alumnos, si los demás no superaron los 62 puntos.

$$\underbrace{62 + 62 + \ldots + 62}_{10 \text{ alumnos}} + a + a + a + a = 840 \Rightarrow a = 55$$

$\therefore$ El menor promedio es 55.

13. Calcular el promedio armónico de los siguientes números: 2; 6; 12; ....; 600

Resolución:

La serie: 2; 6; 12; ...; 600
↓ ↓ ↓ ↓
$\underbrace{1 \times 2 \quad 2 \times 3 \quad 3 \times 4 \quad 24 \times 25}_{24 \text{ números}}$

Hallamos el PH:

$$PH = \frac{24}{\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \ldots + \frac{1}{24 \times 25}}$$

$$PH = \frac{24}{\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{25}\right)}$$

$$PH = \frac{24}{1 - \frac{1}{25}} \qquad \therefore PH = 25$$

14. El PH de 20 números diferentes es 18 y el PH de otros 30 números diferentes es 54. Hallar el PH de los 50 números.

Resolución:

Del enunciado:

PH(20 números) = 18 $\Rightarrow \frac{20}{SI(20 \text{ números})} = 18$

$\Rightarrow$ SI (20 números) = $\frac{20}{18}$ ...(1)

PH(30 números) = 54 $\Rightarrow \frac{30}{SI(30 \text{ números})} = 54$

$\Rightarrow$ SI(30 números) = $\frac{30}{54}$ ...(2)

Luego:

PH(50 números) = $\frac{50}{SI(20 \text{ nros.}) + SI(30 \text{ nros.})}$

$$PH(50\text{ números}) = \frac{50}{\frac{50}{18} + \frac{30}{54}} = 30$$

$\therefore$ PH(50 números) = 30

15. Se tienen 4 números enteros y positivos; se seleccionan 3 cualesquiera de ellos y se calcula su media aritmética, a la cual se agrega el entero restante, esto da 29; repitiendo el proceso 3 veces más, se obtienen como resultados: 23, 21 y 17. Hallar uno de los enteros originales.

Resolución:

Sean los números: a; b; c y d.

Del enunciado:

$\frac{a+b+c}{3} + d = 29 \Rightarrow a + b + c + 3d = 87$ ...(1)

$\frac{d+a+b}{3} + c = 23 \Rightarrow a + b + d + 3c = 69$ ...(2)

$\frac{c+d+a}{3} + b = 21 \Rightarrow c + d + a + 3b = 63$ ...(3)

$\frac{b+c+d}{3} + a = 17 \Rightarrow b + c + d + 3a = 51$ ...(4)

De (1), (2), (3) y (4): a = 3; b = 9; c = 12; d = 21

$\therefore$ Uno de los números es 21.

16. La edad promedio de los "p" alumnos de un aula de secundaria es "t". La edad promedio de las mujeres es "u" y la edad promedio de los varones es "v". ¿Cuántas mujeres había en el aula?

Resolución:

Tenemos:

		Cantidad	Promedio
"p" alumnos	Mujer:	x	u
Edad prom. = t	Varón:	p – x	v

Luego: $t = \frac{x(u) + (p-x)v}{p}$

Efectuando: p(t) = x(u – v) + p(v)

$\therefore$ El número de mujeres: $x = \frac{p(t-v)}{u-v}$

17. Si la MG de dos números es 8 veces la MH de dichos números, hallar la suma de las razones geométricas que se pueden formar con dichos números.

Resolución:

Sea los números: a y b

Por dato: MG(a; b) = 8 × MH(a; b)

$\Rightarrow \sqrt{ab} = 8\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \Rightarrow a + b = 16\sqrt{ab}$

Al cuadrado: $a^2 + 2ab + b^2 = 256ab$

Dividiendo entre: ab

$\frac{a}{b} + 2 + \frac{b}{a} = 256 \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 254$

$\therefore$ Suma de las razones: 254

18. El promedio aritmético de 3 números pares es 28/3; el promedio geométrico es igual a uno de ellos y el promedio armónico es 48/7. ¿Cuál es el menor de los números?

Resolución:

Sean los números pares: a; b y c

Por dato:

$PA(a; b; c) = \frac{28}{3} \Rightarrow a + b + c = 28$ ...(1)

$PG(a; b; c) = a \Rightarrow \sqrt[3]{abc} = a \Rightarrow bc = a^2$ ...(2)

$PH(a; b; c) = \frac{48}{7} \Rightarrow \frac{3abc}{ab + ac + bc} = \frac{48}{7}$ ...(3)

(2) en (3): $\frac{abc}{ab + ac + a^2} = \frac{16}{7} \Rightarrow bc = 64$ ...(4)

En (2): $a^2 = 64 \Rightarrow a = 8$

En (1): b + c = 20 ...(5)

De (4) y (5): b = 16; c = 4

$\therefore$ El menor de los números: 4

19. El mayor promedio de dos números es 400, mientras su menor promedio es 144. Hallar la diferencia de los números.

Resolución:

Sean los números: a y b

Del enunciado:

Mayor promedio: MA(a; b) = 400

$\Rightarrow a + b = 800$ ...(1)

Menor promedio: MH(a; b) = 144

$\Rightarrow \frac{2ab}{a+b} = 144$ ...(2)

(1) en (2): $\frac{2ab}{800} = 144 \Rightarrow ab = 72 \times 800$ ....(3)

De (3): ab = 720 × 80

Con (1): a = 720; b = 80 $\therefore$ a – b = 640

20. Si la media geométrica de 3 números pares consecutivos es $4\sqrt[3]{42}$, hallar la media aritmética de dichos números.

Resolución:

Sean los números: a – 2; a y a + 2 ("a" es par)

Por dato: $\sqrt[3]{(a-2)(a)(a+2)} = 4\sqrt[3]{42}$

(a – 2)(a)(a + 2) = 64 × 42

Descomponemos adecuadamente:

(a – 2)(a)(a + 2) = 12 × 14 × 16 $\Rightarrow$ a = 14

Los números son: 12; 14 y 16

$\therefore PA = \frac{12 + 14 + 16}{3} = 14$

21. Calcular la diferencia entre 2 números enteros, si su MG es $8\sqrt{15}$. Además, la MA y MH de dichos números son 2 enteros pares consecutivos.

Resolución:

Sean los números a y b, tal que:

$MG(a; b) = 8\sqrt{15} \Rightarrow \sqrt{ab} = 8\sqrt{15}$

$ab = 960$ ...(1)

Como la MA y MH son números pares consecutivos, se cumple: MA(a; b) − MH(a; b) = 2

$$\Rightarrow \frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} = 2$$

$$\frac{a+b}{2} - \frac{2 \times 960}{a+b} = 2 \Rightarrow a + b = 64 \quad ...(2)$$

De (1) y (2): a = 40; b = 24 $\therefore$ a − b = 16

22. ¿Cuántos pares de números enteros y diferentes entre sí existen, tales que el producto de su MA, MG y MH sea 13 824?

Resolución:

Sean los números a y b. ($a \neq b$)

Tales que: MA × MG × MH = 13 824 ...(1)

Por propiedad: MA × MH = MG^2

En (1): $MG^3 = 13\,824 \Rightarrow MG = 24$

$\sqrt{ab} = 24 \Rightarrow ab = 576$

Hallamos la cantidad de parejas de números, que multiplicados resulte 576.

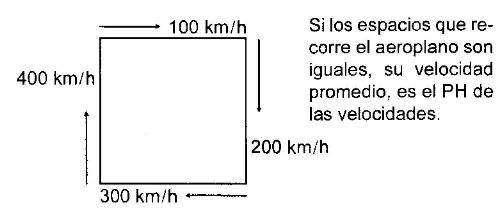
$576 = 2^6 \times 3^2 \Rightarrow CD_{576} = 7 \times 3 = 21$

Si los números son diferentes: $\frac{21-1}{2} = 10$

$\therefore$ Existen 10 pares de números.

23. Un aeroplano que vuela alrededor de un cuadrado, recorre el primero de estos lados a 100 km/h; el segundo lado a 200 km/h; el tercero a 300 km/h y el cuarto a 400 km/h. ¿Cuál es la velocidad promedio del aeroplano en su vuelo alrededor del cuadrado?

Resolución:



Veloc. prom. = PH(100; 200; 300; 400)

$$\text{Veloc. prom.} = \frac{4}{\frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \frac{1}{300} + \frac{1}{400}} = 192$$

$\therefore$ Velocidad promedio = 192 km/h

24. Un aeroplano que vuela alrededor de un circuito de forma cuadrada, emplea en cada lado velocidades constantes y diferentes. Dichas velocidades están en relación con los números 1; 2; 3 y 4, respectivamente, y la velocidad media del aeroplano en su recorrido total es 288 km/h. Hallar la velocidad correspondiente al tercer tramo.

Resolución:

Del enunciado, las velocidades que empleó son:

$v_1 = k$; $v_2 = 2k$; $v_3 = 3k$; $v_4 = 4k$

Por dato: veloc. prom.: 288

$$\frac{4}{\frac{1}{k} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{3k} + \frac{1}{4k}} = 288 \Rightarrow \frac{48}{25}k = 288 \Rightarrow k = 150$$

Las velocidades respectivas son:

$v_1 = 150$ km/h; $v_2 = 300$ km/h;

$v_3 = 450$ km/h; $v_4 = 600$ km/h

$\therefore$ La velocidad del tercer tramo: 450 km/h

25. De 500 alumnos de un colegio, cuya estatura promedio es 1,67 m, 150 son mujeres. Si la estatura promedio de las mujeres es 1,60 m; calcular la estatura promedio de los varones de dicho grupo?

Resolución:

		Cantidad	Est. prom.
500 alumnos	Hombres:	350	x
Est. prom. 1,67 m	Mujeres:	150	1,6

Luego: $1{,}67 = \frac{350(x) + 150(1{,}6)}{500} \Rightarrow x = 1{,}7$ m

$\therefore$ La estatura promedio de los hombres: 1,7 m

26. En una clínica trabajan médicos, enfermeras y auxiliares, la suma de las edades de todos ellos es 2880 y la edad promedio es 36 años. Las edades promedios de médicos, enfermeras y auxiliares es 30; 34 y 39 años, respectivamente. Hallar el número de médicos.

Resolución:

Tenemos:	Cantidad	Edad prom.
Médicos:	a	30
Enfermeras:	b	34
Auxiliares:	c	39

El promedio de las edades:

$$36 = \frac{30a + 34b + 39c}{a+b+c} \Rightarrow 6a + 2b = 3c \quad ...(1)$$

La suma de todas las edades:

$30a + 34b + 39c = 2880$ ...(2)

El total del personal: $a + b + c = 80$ ...(3)

De (1); (2) y (3): a = 10; b = 30; c = 40

$\therefore$ El número de médicos: 10

27. Si: PH(a; b; c) = 64/7, PG(a; b; c) = 16, $a^2 + b^2 + c^2 = 4368$, determinar: PA(a/4; b/4; c/4)

Resolución:

Por dato: $PH(a; b; c) = \frac{64}{7}$

$$\Rightarrow \frac{3abc}{ab + ac + bc} = \frac{64}{7} \quad ...(1)$$

$PG(a; b; c) = 16 \Rightarrow \sqrt[3]{abc} = 16$ ...(2)

$a^2 + b^2 + c^2 = 4368$ ...(3)

Si: $a + b + c = T$, al cuadrado: $(a + b + c)^2 = T^2$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = T^2$ ...(4)

De (2): $abc = 16^3$

En (1): $\dfrac{3\times 16^3}{ab+ac+bc} = \dfrac{64}{7}$

$\Rightarrow ab + ac + bc = 1344$ ...(5)

(3) y (5) en (4): $4368 + 2 \times 1344 = T^2$

$T^2 = 7056 \Rightarrow T = 84$

Sabemos que: $a + b + c = 84$

Luego: $\dfrac{a}{4}+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{4} = 21 \quad \therefore\ PA\left(\dfrac{a}{4};\dfrac{b}{4};\dfrac{c}{4}\right) = \dfrac{21}{3} = 7$

28. En una reunión a la que asistieron 90 personas, la edad promedio es 18. Pero si cada hombre tuviera 4 años menos y cada mujer tuviera 2 años más, la nueva edad promedio sería 50/3. Hallar la relación entre el número de hombres y el de mujeres en dicha reunión.

Resolución:

Sean: H: número de hombres
M: número de mujeres

Para el PA:

		Cantidad	**Promedio**
90	Hombres:	a	h
	Mujeres:	90 – a	m

$PA(90) = 18 \Rightarrow \dfrac{ah + m(90-n)}{90} = 18$ ...(1)

Si cada hombre tuviera 4 años menos y cada mujer 2 años más, tenemos:

	Cantidad	**Promedio**
Hombres:	a	h – 4
Mujeres:	90 – a	m+2

$PA(90) = \dfrac{50}{3} \Rightarrow \dfrac{a(h-4)+(90-a)(m+2)}{90} = \dfrac{50}{3}$

Ordenando adecuadamente:

$\dfrac{ah + m(90-a)}{90} + \dfrac{180-6a}{90} = \dfrac{50}{3}$

Reemplazando: $18 + \dfrac{180-6a}{90} = \dfrac{50}{3} \Rightarrow a = 50$

Luego: $H = 50;\ M = 40 \quad \therefore\ \dfrac{H}{M} = \dfrac{5}{4}$

29. El promedio aritmético de 180 números pares de 3 cifras es 640 y el promedio aritmético de otros 120 números pares de 3 cifras es 240. Hallar el promedio aritmético de los números pares de 3 cifras no considerados.

Resolución:

Números pares de 3 cifras: $\underbrace{100 ; 102 ; 104 ; ... ; 998}_{450 \text{ números}}$

El PA de los números pares de 3 cifras:

$\dfrac{100+998}{2} = 549$

Tenemos:		**Cantidad**	**Promedio**
Total:	450 números	180	640
		120	240
		150	x

PA(450 números) = 549

$\Rightarrow \dfrac{180(640)+120(240)+150(x)}{450} = 549 \Rightarrow x = 687$

$\therefore$ El PA de los no considerados: 687

30. Calcular la media armónica de todos los divisores de 360.

Resolución:

Descomposición canónica de $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

Cantidad de divisores de 360:

$CD_{360} = (3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24$

Suma de divisores de 360:

$SD_{360} = \left(\dfrac{2^4-1}{2-1}\right)\left(\dfrac{3^3-1}{3-1}\right)\left(\dfrac{5^2-1}{5-1}\right) = 1170$

Hallamos el promedio armónico de los divisores de 360:

$PH(\text{Div. } 360) = \dfrac{CD_{360}}{I_{360}} = \dfrac{24}{\frac{1170}{360}} = \dfrac{24\times 360}{1170} = 7{,}38$

$\therefore PH(\text{Div. } 360) = 7{,}38$

31. La media aritmética de 3 números es 7, la media geométrica de los mismos es igual a uno de ellos y su media armónica es 36/7. Hallar el menor de los números.

Resolución:

Sean los números: a, b y c

$MG(a; b; c) = \sqrt[3]{abc} = a$

Elevando al cubo: $abc = a^3 \Rightarrow bc = a^2$ ...(I)

$MH(a; b; c) = \dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \dfrac{36}{7}$

$\Rightarrow \dfrac{7}{12} = \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} = \dfrac{ab+bc+ca}{abc}$

De (I): $bc = a^2$; reemplazando:

$\dfrac{7}{12} = \dfrac{ab+a^2+ca}{a(a^2)} = \dfrac{a(b+a+c)}{a^3}$

Ordenando: $a + b + c = \left(\dfrac{7}{12}\right)a^2$ ...(II)

$MA(a; b; c) = \dfrac{a+b+c}{3} = 7$

De donde: $a + b + c = 21$ ...(III)

(III) en (II): $21 = \left(\dfrac{7}{12}\right)a^2 \Rightarrow a = 6$

Reemplazando en (I) y (III):

$bc = 6^2 = 36$
$6 + b + c = 21$ $\Rightarrow \{b = 12; c = 3$

$\therefore$ El menor es 3.

32. Se tienen 2 números enteros, se calculan sus 3 promedios y se encuentra que el menor de los 3 promedios es igual a la quinta parte de uno de los números. Si la diferencia de la media aritmética y media armónica es igual a 144. Hallar la diferencia de los 2 números.

Resolución:

Sean los números a y b

Se conoce: $MA \geq MG \geq MH$

Menor promedio: $MH(a; b) = \dfrac{2ab}{a+b} = \dfrac{a}{5}$

$\Rightarrow 5(2b) = a + b \Rightarrow 9b = a$

Calculando MA:

$MA(a; b) = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{9b+b}{2} = \dfrac{10b}{2}$

Se obtiene: $MA(a; b) = 5b$ ...(I)

También: $MH(a; b) = \dfrac{a}{5} = \dfrac{9b}{5}$ ...(II)

Se conoce: $MA - MH = 144$

De (I) y (II): $5b - \dfrac{9b}{5} = 144$

$\dfrac{25b - 9b}{5} = \dfrac{16b}{5} = 144 \Rightarrow b = 45$

Luego: $a = 9(45) = 405$

$\therefore a - b = 405 - 45 = 360$

33. La MH y MA de dos cantidades a y b están en la proporción de 16 a 25, siendo a y b enteros positivos, $b \neq \overset{\circ}{4}$, si $b \in \langle 7; 10\rangle$. Hallar a que intervalo pertenece.

Resolución:

$\dfrac{MH}{MA} = \dfrac{16}{25} \Rightarrow \dfrac{2ab/(a+b)}{(a+b)/2} = \dfrac{16}{25} \Rightarrow \dfrac{4ab}{(a+b)^2} = \dfrac{16}{25}$

Por propiedad de proporciones:

$\dfrac{(a+b)^2 - 4ab}{(a+b)^2} = \dfrac{25-16}{25}$

$(a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2$

$\dfrac{(a-b)^2}{(a+b)^2} = \dfrac{9}{25} \Rightarrow \dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{3}{5}$ $\therefore a = 4b$

b es entero y pertenece a $\langle 7; 10\rangle$, luego: $b = 8; 9$ (pero $b \neq \overset{\circ}{4}$)

$\Rightarrow b = 9 \wedge a = 36$ $\therefore a \in \langle 28; 40\rangle$

34. Si: $MH(a; b) = 3$; $MH(a; c) = 3{,}2$; $MH(b; c) = \dfrac{48}{7}$ hallar: $MH(a; b; c)$

Resolución:

$MH(a; b) = \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = 3 \Rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} = \dfrac{2}{3}$

$MH(b; c) = \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}} = 3{,}2 \Rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c} = \dfrac{2}{3{,}2}$

$MH(b; c) = \dfrac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \dfrac{48}{7} \Rightarrow \dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} = \dfrac{2}{\frac{48}{7}}$

$\Rightarrow 2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) = \dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3{,}2}+\dfrac{2}{\frac{48}{7}}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3{,}2}+\dfrac{1}{\frac{48}{7}} = \dfrac{19}{24}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} = \dfrac{19}{24}$

Calculando MH(a; b; c):

$\therefore MH(a; b; c) = \dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \dfrac{3}{\frac{19}{24}} = \dfrac{72}{19}$

35. La diferencia de la media aritmética y la media geométrica de dos números es 2. Si la media aritmética de las raíces de los dos números es 20, determinar la diferencia de los 2 números.

Resolución:

$MA(a; b) - MG(a; b) = 2$

$\dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = 2$

Se obtiene: $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 4$

$\Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} = 2$ ...(1)

$MA(\sqrt{a}; \sqrt{b}) = 20 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} = 20$

$\Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} = 40$ ...(2)

Resolviendo (1) y (2)

$\sqrt{a} = 21 \Rightarrow a = 441$

$\sqrt{b} = 19 \Rightarrow b = 361$

$\therefore a - b = 441 - 361 = 80$

36. Hallar la MH de 8; 15; 24; 35; ... (30 números)

Resolución:

$MH(\underbrace{8; 15; 24; 35;...}_{30\text{ números}}) = \dfrac{30}{\text{suma de inversas}}$

Tomando la inversa de cada número

$\dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{2\times 4} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{2\times 4}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)$

$\dfrac{1}{15} = \dfrac{1}{3\times 5} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3\times 5}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)$

$\dfrac{1}{24} = \dfrac{1}{4\times 6} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{4\times 6}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}\right)$

$\dfrac{1}{35} = \dfrac{1}{5\times 7} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{5\times 7}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$\dfrac{1}{t_{29}} = \dfrac{1}{30\times 32} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{30\times 32}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{30}-\dfrac{1}{32}\right)$

$\frac{1}{t_{30}} = \frac{1}{31 \times 33} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{31 \times 33}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{31} - \frac{1}{33}\right)$

Sumando:

$\frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \ldots + \frac{1}{t_{30}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{32} - \frac{1}{33}\right)$

$\Rightarrow$ Suma de inversas $= \frac{1}{2}\left(\frac{815}{1056}\right) = \frac{815}{2112}$

$\underbrace{MH(8; 15; 24; 35; \ldots)}_{30 \text{ números}} = \frac{30}{815/2112} \quad \therefore \ MH = 77{,}74$

37. Se tienen cinco números naturales y ninguno es menor que 54. Si el promedio geométrico de los cinco números es 108, hallar el máximo valor que puede tomar uno de ellos; dar como respuesta el promedio aritmético de los cinco números.

Resolución:

Para que uno de ellos(a) sea máximo, los demás deben ser los menores posibles, es decir, 54

Por lo tanto:

$\sqrt[5]{54 \times 54 \times 54 \times 54 \times a} = 108$

$\Rightarrow a = 1728 \quad \therefore \ MA = \frac{4 \times 54 + 1728}{5} = 388{,}8$

38. El promedio aritmético de las longitudes de 5 cintas métricas graduadas en centímetros es 76 cm; si ninguna tiene más de 85 cm, ¿cuál es la mínima longitud que puede tener una de ellas?

Resolución:

Como se quiere que una de ellas tenga una mínima longitud (x), entonces las demás deben tener una longitud máxima, es decir, 85 cm.

$\frac{85 + 85 + 85 + 85 + x}{5} = 76$

La mínima longitud es: $\therefore \ x = 40$ cm

39. El producto de los tres promedios de dos números es 512. Si uno de los tres promedios es 6,4. Determinar la raíz cuadrada de la media aritmética de los mayores promedios.

Resolución:

Recordemos que para dos números se cumple:

$MA \times MH = MG^2 \quad \ldots(1)$

Por dato sabemos:

$MA \times MH \times MG = 512 \quad \ldots(2)$

Reemplazando (1) en (2):

$MG^2 \times MG = 512 \Rightarrow MG = 8$

Además:

$MH \leq MG \Rightarrow MH = 6{,}4$

Al reemplazar en (1):

$MA = 10$

$\therefore \ \sqrt{\frac{MA + MG}{2}} = \sqrt{\frac{10 + 8}{2}} = 3$

40. Un automovilista recorre la primera vuelta de un circuito a 50 km/h, la segunda vuelta a 100 km/h; la tercera a 150 km/h y la cuarta a 200 km/h. ¿Cuál fue la velocidad promedio del automovilista en sus 4 vueltas?

Resolución:

Asumimos como e la longitud del circuito:

Además: $v_{promedio} = \frac{\text{Espacio total}}{\text{Tiempo total}}$

$v_{promedio} = \frac{4e}{\frac{e}{50} + \frac{e}{100} + \frac{e}{150} + \frac{e}{200}}$

$\therefore \ v_{promedio} = 96$ km/h

41. El promedio de 8 números es 40 y el promedio de otros 12 números es 30. Calcular el promedio de los 20 números.

Resolución:

El promedio más común es el aritmético, por lo tanto, se suele llamar tan solo promedio.

Dándoles las formas respectivas:

$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_8}{8} = 40 \quad \ldots(1)$

$\frac{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{12}}{12} = 30 \quad \ldots(2)$

Despejando las sumatorias de (1) y (2):

$\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_8 = 320$

$\Rightarrow b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{12} = 360$

Piden el promedio de los 20 números:

$\frac{320 + 360}{20} = \frac{680}{20} = 34 \quad \therefore \ P(20 \text{ nros.}) = 34$

42. El promedio de las edades del 40% de los asistentes a una reunión es 40 años, el promedio del 25% del resto es 28 años. ¿Cuál debe ser el promedio del nuevo resto, si todos los asistentes en promedio tienen 31 años?

Resolución:

Sea 100 el número de alumnos

De los cuales:

$100 \begin{cases} 40\% \times 100 = 40 \\ 25\%(100 - 40) = 15 \\ 100 - (40 + 15) = 45 \end{cases}$

Luego:

$\frac{S_{100}}{100} = 31 \Rightarrow S_{100} = 3100$

$\frac{S_{40}}{40} = 40 \Rightarrow S_{40} = 1600$

$\frac{S_{15}}{15} = 28 \Rightarrow S_{15} = 420$

El promedio de los 45 restantes:

$\therefore \ \frac{3100 - (1600 + 420)}{45} = 24$ años

43. En una reunión donde asisten 90 personas, la edad promedio es 18 años, pero si cada hombre tuviera 4 años menos y cada mujer tuviera 2 años más; la nueva edad promedio sería 16 años. ¿Cuál es la relación entre el número de hombres y el de mujeres?

Resolución:

Sean:
Número de hombres: H
Número de mujeres: M

Por dato: H + M = 90 ...(1)

$\frac{S_{edades}}{90} = 18 \Rightarrow S_{edades} = 1620$

Si cada hombre tiene 4 años menos, entonces la suma disminuye en 4H. Si cada mujer tiene 2 años más entonces la suma aumenta en 2M.
Por lo tanto, el nuevo promedio será:

$\frac{1620 - 4H + 2M}{90} = 16$

$4H - 2M = 180 \Rightarrow 2H - M = 90$ ...(2)

Sumando (1) y (2): $3H = 180 \Rightarrow H = 60$

En (1): $M = 30 \quad \therefore \frac{H}{M} = \frac{60}{30} = 2$

44. La media geométrica de dos números es el triple del menor y la media aritmética es inferior en 36 al mayor. Hallar la media armónica de los números.

Resolución:

Sean a y b los números (a > b)
Por dato tenemos:

$\sqrt{ab} = 3b \Rightarrow a = 9b$ ...(1)

$\frac{a+b}{2} = a - 36 \Rightarrow b = a - 72$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):
$b = 9b - 72 \Rightarrow b = 9$

En (I): $a = 81 \quad \therefore MH = \frac{2 \times 81 \times 9}{81 + 9} = 16{,}2$

45. Un automovilista recorrió 80 km usando igualmente las 5 llantas que tenía (4 en el auto y la de repuesto). ¿Cuántos kilómetros recorrió cada llanta?

Resolución:

Cuando el auto recorre 80 km, cada una de las cuatro llantas recorre 80 km.
El recorrido total de las llantas es:
$4 \times 8 = 320$ km y como se usaron las 5 llantas igualmente.

$\therefore$ Cada llanta recorrió: $\frac{320}{5} = 64$ km

46. El promedio de las notas de una prueba rendida por 60 alumnos fue 104, los primeros 12 obtuvieron un promedio de 160 y los últimos 20 sacaron 62. Calcular el promedio de los alumnos restantes.

Resolución:

$\frac{\text{Suma de notas de los 60 alumnos}}{60} = 104 \Rightarrow \text{Suma de notas de los 60 alumnos} = 6240$

$\frac{\text{Suma de notas de los 12 alumnos}}{12} = 160 \Rightarrow \text{Suma de notas de los 12 alumnos} = 1920$

$\frac{\text{Suma de notas de los 20 alumnos}}{20} = 62 \Rightarrow \text{Suma de notas de los 20 alumnos} = 1240$

Los números restantes suman:

$\text{Suma de notas de los 28 alumnos} = 6240 - (1920 + 1240)$

$\Rightarrow \text{Suma de notas de los 28 alumnos} = 3080 \quad \therefore \frac{3080}{28} = 110$

47. Hallar dos números enteros cuyo producto es 600 sabiendo que la media aritmética y la media armónica son dos números consecutivos. Dar como respuesta el número menor.

Resolución:

Sean a y b los números
$ab = 600$ ...(1)

$\frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} = 1$ ...(2)

De (1) y (2): a = 30; b = 20 $\therefore$ El menor es 20

48. Un tráiler emplea 18 llantas para su desplazamiento. Si el conductor quiere que tanto sus 18 llantas como sus 2 llantas de repuesto se desgasten igualmente en un recorrido de 2000 km. ¿Cuántos kilómetros recorrerá cada llanta?

Resolución:

Gasto promedio de cada llanta es 2000 km
Gasto total (normal) = 18×2000 km
Gasto promedio con los 2 repuestos

$\therefore \frac{18 \times 2000}{20} = 1800$ km/llanta

49. La media geométrica de la progresión geométrica de las cifras del número: $N = \overline{abc}$ es 4. Hallar N.

Resolución:

Por condición:
$MG(a; b; c) = \sqrt[3]{abc} = 4$ ...(1)

Como a, b y c están en progresión geométrica, podemos establecer:
$a = a$; $b = aq$ y $c = aq^2$ ...(2)

(2) en (1): $\sqrt[3]{a \times aq \times aq^2} = 4$

$a \times aq \times aq^2 = 4^3 = 2^6 = 2 \times 2^2 \times 2^3$
$a = 2$; $b = aq = 4 \wedge c = aq^2 = 8$
$\therefore N = \overline{abc} = 248$

50. El promedio de 30 números consecutivos es 62,5 y el promedio de otros 20 números consecutivos es

81,5. ¿Cuál es el promedio (P) de los 10 mayores del primer grupo y los 10 mayores del segundo grupo?

Resolución:

Primer grupo: a; a + 1; a + 2; ... ; a + 29

$$\Rightarrow MA = \frac{30a + 1 + 2 + 3 + ... + 29}{30} = 62,5$$

$\Rightarrow a = 48$

Segundo grupo: b; b + 1; b + 2; ... ; b + 19

$$\Rightarrow MA = \frac{20b + 1 + 2 + 3 + ... + 19}{20} = 81,5$$

$\Rightarrow b = 72$

Los 10 mayores del primer grupo: 77; 76; 75; ...; 68
Los 10 mayores del segundo grupo: 91; 90; 89; ...; 82

$$P = \frac{(77 + 76 + 75 + ... + 68) + (91 + 90 + 89 + ... + 82)}{20}$$

$$\therefore P = \frac{1590}{20} = 79,5$$

51. Considerando la tabla adjunta, hallar el promedio de las notas de matemáticas.

Curso	N.° de alumnos	Promedio
Álgebra	150	10,5
Aritmética	250	11,4
Geometría	180	10,8
Trigonometría	230	11,3

Resolución:

Tomando las medias ponderadas de los datos señalados.

$$\text{Promedio de todas las notas} = \frac{\Sigma(\text{N. de alumnos})(\text{Promedio})}{\text{Total de alumnos}}$$

$$= \frac{150(10,5) + 250(11,4) + 180(10,8) + 230(11,3)}{150 + 250 + 180 + 230}$$

$\therefore$ Promedio de todas las notas : $11,07 \approx 11,1$

52. Al promediar 15 números donde uno de ellos es $\overline{ab}$ por error se promedió considerando $\overline{ba}$ en vez de $\overline{ab}$, descubriéndose que el promedio disminuye en 24/5. Hallar a + b

Resolución:

Promedio de 15 números:

- Promedio real:

$$P_R = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{14} + \overline{ab}}{15} \quad ...(1)$$

- Promedio con $\overline{ba}$:

$$P_R - \frac{24}{5} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{14} + \overline{ba}}{15} \quad ...(2)$$

Restando (1) y (2):

$$\frac{24}{5} = \frac{\overline{ab} - \overline{ba}}{15}$$

$72 = \overline{ab} - \overline{ba} = 9(a - b) \Rightarrow 8 = a - b$

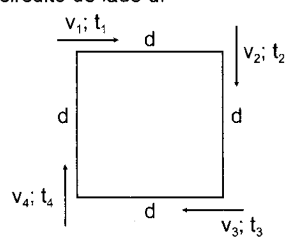
Solo: a = 9; b = 1

$\therefore a + b = 9 + 1 = 10$

53. Un aeroplano que vuela alrededor de un circuito, que tiene la forma cuadrada, emplea velocidades constantes en cada lado, si dichas velocidades están en relación con los números 1; 2; 3; y 4, respectivamente, y la velocidad media del aeroplano en su recorrido total es de 192 km/h. Hallar la velocidad correspondiente al tercer lado (dar la respuesta en km/h)

Resolución:

Sea el circuito de lado d.



Tiempos: $t_1 = \frac{d}{v_1}$; $t_2 = \frac{d}{v_2}$; $t_3 = \frac{d}{v_3}$; $t_4 = \frac{d}{v_4}$;

$$\text{Velocidad media} = \frac{\text{Distancia total}}{\text{Tiempo total}}$$

$$192 = \frac{d + d + d + d}{\frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2} + \frac{d}{v_3} + \frac{d}{v_4}} = \frac{4}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4}}$$

Además:

$v_1 = v$; $v_2 = 2v$; $v_3 = 3v$; $v_4 = 4v$

Reemplazando:

$$192 = \frac{4}{\frac{1}{v} + \frac{1}{2v} + \frac{1}{3v} + \frac{1}{4v}} = \frac{4(12v)}{12 + 6 + 4 + 3}$$

$v = 100 \quad \therefore v_3 = 3(100) = 300$ km/h

54. Si el promedio armónico de las inversas de los n primeros números naturales es: 1/17, hallar n

Resolución:

Los n primeros números naturales son:

1; 2; 3; 4; 5; ...; n

Las inversas de los n primeros números naturales son:

1/1; 1/2; 1/3; 1/4; ...; 1/n

Calculando el promedio armónico

$$MH = \frac{n}{\frac{1}{1/1} + \frac{1}{1/2} + \frac{1}{1/3} + \frac{1}{1/4} + ... + \frac{1}{1/n}}$$

$$MH = \frac{n}{1 + 2 + 3 + 4 + ... + n}$$

$$MH = \frac{n}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n+1} = \frac{1}{17} \quad \therefore n = 33$$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMAS 1 (UNI 2008 - II)

La media aritmética y la media geométrica de 2 números enteros positivos se diferencian en 6 unidades y la suma de las raíces cuadradas de estos números enteros es $6\sqrt{3}$. Halle la media armónica de dichos números.

A) 17,3 B) 17,6 C) 18,3
D) 18,7 E) 19,2

Resolución:

Sean los números: a y b

Datos: $MA - MG = 6$ ...(I)

$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 6\sqrt{3}$ ...(II)

De (I): $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = 6 \Rightarrow a + b - 2\sqrt{ab} = 12$

$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 12 \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} = 2\sqrt{3}$ ...(III)

De (II) y (III): $\sqrt{a} = 4\sqrt{3} \Rightarrow a = 48$

$\sqrt{b} = 2\sqrt{3} \Rightarrow b = 12$

Nos piden MH:

$\therefore MH = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2(48)(12)}{48+12} = 19{,}2$

Clave: E

PROBLEMA 2 (UNI 2009 - I)

Tres números enteros m, n, p tienen una media aritmética de 10 y una media geométrica de $\sqrt[3]{960}$. Halle, aproximadamente, la media armónica de estos números, si np = 120

A) 8,72 B) 9,32 C) 9,73
D) 9,93 E) 9,98

Resolución:

La media aritmética de m, n y p es:

$\frac{m+n+p}{3} = 10 \Rightarrow m + n + p = 30$ ...(1)

La media geométrica de m, n y p es:

$\sqrt[3]{mnp} = \sqrt[3]{960} \Rightarrow mnp = 960$

Por dato: $np = 120 \Rightarrow m = 8$

Reemplazando m = 8 en (1): n + p = 22

Como np = 120, entonces n = 12, p = 10

La media armónica es:

$\therefore MH(8; 12; 10) = \frac{3}{\frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{10}} = 9{,}73$

Clave: C

PROBLEMA 3 (UNI 2012 - II)

Sean a, b $\in$ N y

MA (a, b) la media aritmética de a y b

MG (a, b) la media geométrica de a y b

MH (a, b) la media armónica de a y b

Indique la alternativa correcta después de determinar si cada proposición es verdadera (V) o falsa (F) según el orden dado:

I. Si MA (a, b) = MG (a, b), entonces MG (a, b) = MH (a, b)

II. Si MG (a, b) = MH (a, b), entonces MA (a, b) = MG (a, b)

III. Si MA (a, b) − MG (a, b) > 0, entonces MG (a, b) − MH (a, b) > 0

A) VVF B) VFV C) VVV
D) VFF E) FVF

Resolución:

I. Si MA = MG $\Rightarrow$ a = b
Luego: MA = MG = MH (V)

II. Si MG = MH $\Rightarrow$ a = b
Luego: MA = MG = MH (V)

III. Si MA − MG > 0 $\Rightarrow$ MA > MG $\Rightarrow$ $a \neq b$
Luego: MA > MG > MH (V)

$\therefore$ VVV

Clave: C

PROBLEMA 4 (UNI 2013 - I)

En un experimento se obtuvieron n datos $a_1, a_2, ..., a_n$ Una persona calcula el promedio M_1 sobre los n datos obtenidos, una segunda persona observa que en el caso anterior olvidaron sumar el dato a_i y vuelve a calcular el promedio M_2 sobre los datos obtenidos; pero una tercera persona nota que esta segunda persona olvidó sumar en esta ocasión el dato a_k; si además se sabe que $a_i + a_k = N$. Determine el verdadero promedio

A) $\frac{n(M_1 - M_2) + N}{2n}$ B) $\frac{n(M_2 - M_1) + N}{2n}$

C) $\frac{n(M_1 + M_2) - N}{2n}$ D) $\frac{n(M_1 - M_2) - N}{2n}$

E) $\frac{n(M_1 + M_2) + N}{2n}$

Resolución:

Sea: $a_1 + a_2 + ... + a_n = A$

Luego el promedio correcto será: $\frac{A}{n}$

De los datos: $\frac{A - a_i}{n} = M_1$ ...(1)

$\frac{A - a_k}{n} = M_2$ ...(2)

(1) + (2): $\frac{2A - (a_1 + a_k)}{n} = M_1 + M_2$

$\frac{2A - N}{n} = M_1 + M_2$

$A = \frac{n(M_1 + M_2) + N}{2}$ $\therefore \frac{A}{n} = \frac{n(M_1 + M_2) + N}{2n}$

Clave: E

PROBLEMA 5 (UNI 2013 - II)

Sean: $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \langle 0, \infty \rangle$ cualesquiera $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ arbitrario y MA(n), MG(n) y MH(n) su media aritmética, media geométrica y media armónica respectivamente. Indique la alternativa correcta después de determinar si cada proposición es verdadera (V) o falsa (F), en el orden dado:

I. $M_G(n) = \sqrt[n]{M_A(n)M_H(n)}\ \forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

II. $M_A(n)\, M_H(n) = a_1\, a_2 \ldots a_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

II. $M_A(2) - M_G(2) = \dfrac{(a_1 + a_2)^2}{4[M_A(2) + M_G(2)]}$

A) VVV B) VFF C) FVF
D) FFV E) FFF

Resolución:

$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \in \langle 0; \infty \rangle$
$n \in \{2, 3, 4, 5, \ldots\} = N - \{1\}$

$M_A(n)$ = Media aritmética de n números
$M_G(n)$ = Media geométrica de n números
$M_H(n)$ = Media armónica de n números

I. $M_G(n) = \sqrt[n]{M_A(n)M_H(n)},\ \forall\, n \in N - \{1\}$
Falso, solo se cumple para dos números (n = 2)

II. $M_A(n)M_H(n) = M_G^2(n)$
Falso, solo se cumple para dos números (n = 2) o cuando los números son iguales.

III. $M_A(2) - M_G(2) = \dfrac{(a_1 + a_2)^2}{4[M_A(2) + M_G(2)]}$

Falso, debió ser:
$M_A(2) - M_G(2) = \dfrac{(a_1 - a_2)^2}{4[M_A(2) + M_G(2)]}$ $\therefore$ FFF

Clave: E

PROBLEMA 6 (UNI 2014 - I)

Un comerciante tiene que formar paquetes diferentes de 8 unidades de frutas, para ello debe escoger entre plátanos y peras. Cada plátano cuesta S/.0,20 y cada pera S/.0,50 ¿Cuál es el promedio de la venta de los paquetes? Asúmase que hay suficientes plátanos y peras.

A) 2,77 B) 2,79 C) 2,80
D) 3,00 E) 3,10

Resolución:

Del enunciado, 8 unidades de frutas y que hay suficientes plátanos y peras, entonces posibles

Plátano	Pera
1	7
2	6
3	5
4	4
5	3
6	2
7	1

Entonces hay 28 frutas de cada uno.

Hallando el promedio:

$$\therefore \text{ Promedio} = \frac{28(0,2) + 28(0,50)}{7} = 2,8$$

Clave: C

PROBLEMA 7 (UNI 2014 - I)

Las notas obtenidas por tres postulantes hacen un promedio de 15. La relación entre las notas del primero y el segundo es 4/5 y la relación entre el segundo y tercero es 5/6. Calcule la diferencia entre la mayor y menor nota.

A) 6 B) 8 C) 9
D) 10 E) 12

Resolución:

Sean las notas obtenidas: x_1, x_2, y x_3

$\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = 15 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 45$ ...(I)

Tenemos: $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{4}{5}$ y $\dfrac{x_2}{x_3} = \dfrac{5}{6}$

Entonces: $x_1 = 4k$, $x_2 = 5k$, $x_3 = 6k$

En (I): $4k + 5k + 6k = 45$
$15k = 45 \Rightarrow k = 3$

Por lo tanto: $x_1 = 12$, $x_2 = 15$, $x_3 = 18$
$\therefore x_3 - x_1 = 6$

Clave: A

PROBLEMA 8 (UNI 2014 - II)

Si la diferencia entre la media aritmética y la media armónica de dos números naturales a y b es 1. Determine el menor valor de $\sqrt{a^2 + b^2}$ asumiendo que a > b.

A) $\sqrt{10}$ B) $\sqrt{13}$ C) $2\sqrt{10}$
D) $2\sqrt{13}$ E) $6\sqrt{5}$

Resolución:

Dato: $a \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{N}$, a > b

Además:

$\underbrace{MA(a;\, b)}_{\frac{a+b}{2}} - \underbrace{MH(a;\, b)}_{\frac{2ab}{a+b}} = 1$

$(a + b)^2 - 4ab = 2(a + b)$
$a^2 + b^2 + 2ab - 4ab = 2(a + b)$
$a^2 + b^2 - 2ab = 2(a + b)$

$\underbrace{(a - b)^2}_{4} = \underbrace{2(a + b)}_{8}$ $(a - b)^2$ es cuadrado perfecto y piden el menor valor de $\sqrt{a^2 + b^2}$

$\left.\begin{array}{l} a + b = 8 \\ a - b = 4 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} a = 6 \\ b = 2 \end{array}$

$\therefore \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

Clave: C

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. El doble de la media aritmética de dos números, es igual al cuadrado de su media geométrica más uno. Si uno de los números es 120, ¿cuál es el otro?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

2. La media aritmética de 43 números es 50, si a cada uno de los números se le multiplica por 4 y luego se le resta 17 unidades, resulta que la media aritmética de estos nuevos números es:

A) 183 B) 184 C) 185
D) 187 E) 188

3. El promedio geométrico de las edades de 3 hermanos es 9. Si dentro de 2 años el promedio de sus edades será de 15 años, hallar la edad del mayor de los hermanos.

A) 9 B) 18 C) 15
D) 27 E) 12

4. Un ciclista tiene que recorrer una distancia de 200 km; si en el camino se le reventaron las 2 llantas y las cambió, luego se reventó una de las de repuesto y también la cambió, llegando así a su meta, ¿cuál es el recorrido promedio por cada llanta?

A) 60 km B) 80 km C) 100 km
D) 120 km E) 150 km

5. El promedio aritmético de 300 números consecutivos es «p». Si se anulan los 20 menores y los 15 mayores, ¿en cuánto varía el promedio?

A) Aumenta en 2,5 B) Disminuye en 17,5
C) Disminuye en 2,5 D) Aumenta en 5,0
E) Disminuye en p

6. En una reunión hay hombres y mujeres, siendo el número de hombres al número de personas como 3 es a 8 y la diferencia entre el número de hombres y mujeres es 24. ¿Cuál será la relación entre hombres y mujeres si se retiran 33 mujeres?

A) 2/3 B) 4/3 C) 5/3
D) 1/3 E) 1/4

7. La media aritmética de 3 números es 7, la media geométrica es igual a uno de ellos y, su media armónica es igual a 36/7. Hallar el menor de los números.

A) 3 B) 7 C) 5
D) 9 E) 11

8. El producto de 2 números es 240 y el cociente de la MA entre la MH de su MCD y MCM es $4\frac{4}{15}$. Calcular la mínima diferencia de dichos números.

A) 12 B) 10 C) 9
D) 7 E) 8

9. La inversa de la media armónica de 3 términos de una proporción geométrica es igual a 7/6 de la inversa del término medio. Hallar el promedio aritmético de los 3 términos dividido por el término medio.

A) 7/6 B) 6/7 C) 1
D) 1/2 E) 13/6

10. La media aritmética de 70 números es 40 y la de otros 30 es 50. Si a cada uno de los números del primer grupo se les agrega 10 y a los números del segundo grupo se les disminuye en 20, ¿en cuánto varía el promedio original de los 100 números considerados?

A) 44 B) 45 C) 46
D) 47 E) 48

11. Dos números enteros son entre sí como «a» es a «b», (a > b); si su media aritmética es «M», halla la diferencia de dichos números.

A) $\frac{b-a}{M}$ B) $\frac{2M(a-b)}{(a+b)}$ C) 2M(a−b)
D) $\frac{2M(a+b)}{(a-b)}$ E) 2M(a+b)

12. Ocho tiradores al blanco, tienen como mínimo 28 tiros de certeza cada uno. Hallar el máximo número de tiros de certeza de uno de ellos, si el promedio de tiros de certeza es 40.

A) 118 B) 120 C) 122
D) 124 E) 126

13. Calcular la media geométrica de los 15 números de la siguiente serie: 2; 4; 8; 16; ...

A) 2048 B) 1024 C) 512
D) 256 E) 128

14. Calcular la media armónica de los 30 números de la siguiente serie: 2; 6; 12; 20; ...

A) 31 B) 30 C) 29
D) 28 E) 27

15. En un salón de la Academia «Talento», la suma de las edades de todos los alumnos es 900 años y la edad promedio es 18 años. Si cada alumno tuviera 3 años más y cada alumna tuviera 2 años menos, la edad promedio aumentaría en 1 año. Dar la rela-

ción del número de mujeres al número de hombres de dicho salón.

A) 2/3 B) 1/4 C) 2/5
D) 1/3 E) N. A.

16. La nota promedio de un examen es «p». El profesor decide aumentar 2 puntos al tercio superior de la clase, 1 punto al tercio central y bajarle 1 punto al tercio inferior de la clase. ¿Cuál es el nuevo promedio?

A) $\frac{2p+3}{4}$ B) $p+\frac{2}{3}$ C) $\frac{2p+3}{3}$
D) $\frac{3p+2}{2}$ E) $\frac{2p+3}{2}$

17. La media armónica de las inversas de la media aritmética y geométrica de dos números es 1/16. Hallar la media aritmética de las raíces cuadradas de dichos números.

A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) 4
D) 8 E) 16

18. Se tienen 3 depósitos cuyas capacidades son proporcionales a 3; 4 y 5, conteniendo agua a la temperatura de 20°C; 75°C y 60°C respectivamente. ¿Cuál será la temperatura final, al mezclar los 3 depósitos en uno solo?

A) 55°C B) 52°C C) 56°C
D) 60°C E) 62°C

19. La media geométrica de 3 números es $10\sqrt[3]{5}$ y su media aritmética es 55/3. Calcular la media aritmética de dos de ellos, sabiendo que la media geométrica de ambos es $10\sqrt{5}$.

A) 25 B) 20 C) 30
D) 22,5 E) 27,5

20. La media aritmética de 81 números pares consecutivos es 96. Hallar 2 números pares consecutivos, que se deben eliminar para que el promedio de los números restantes sea 94.

A) 166 y 168 B) 168 y 170 C) 170 y 172
D) 172 y 174 E) 174 y 176

21. La media armónica de 3 números es 24/5. Si uno de los números es 6 y la media geométrica de los otros dos es $2\sqrt{6}$, calcule el mayor de los números.

A) 12 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

22. El peso promedio de todos los estudiantes de una clase A es 68,4 y de todos los estudiantes de la clase B es 71,2. Si el peso promedio de ambas clases combinadas es 70 y el número de estudiantes en la clase B excede a la de A en 16, ¿cuántos estudiantes tiene la clase B?

A) 64 B) 40 C) 34
D) 48 E) 36

23. La MA de 3 números es 3/2, la relación entre el primer y segundo número es de 1 a 2 y la relación entre el segundo y tercero es de 1 a 3. El producto de dichos números es:

A) 4/3 B) 3/2 C) 3/5
D) 5/3 E) 3

24. El promedio de cuatro números pares consecutivos es "K", luego el menor de los cuatro es:

A) 2K + 1 B) 24 C) 4K
D) K + 3 E) K – 3

25. Si el promedio aritmético (PA) de 71 números pares consecutivos es 148, y si de estos 71 números eliminamos los 12 primeros y los 15 últimos números, ¿cuál será el PA de los números restantes?

A) 148 B) 137 C) 145
D) 151 E) N. A.

26. En una clase de la Academia «Talento», el promedio de la edad de los alumnos es 17 años; si el promedio del tercio mayor es 19, el del intermedio es 18, ¿cuál es el promedio del tercio menor?

A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) N. A.

27. El promedio aritmético de 75 números impares consecutivos es 171. Si se eliminan 8 números del principio y 15 números del final, el promedio de los números que quedan con respecto al inicial:

A) aumenta 10 B) disminuye 10
C) aumenta 7 D) disminuye 7
E) no varía

28. Si la MH del 40% y el 60% de un número entero es 384, hallar dicho número.

A) 600 B) 800 C) 400
D) 350 E) 900

29. El promedio de las edades de 4 hermanos es 15 años. Si ninguno de ellos es menor de 10 años, ¿cuál es la máxima edad que podría tener uno de ellos, si sus edades son diferentes?

A) 24 B) 27 C) 20
D) 18 E) N. A.

30. El promedio de goles de 5 delanteros, al final del torneo, es de 14 goles. Si ninguno de ellos hizo menos de 10 goles, ¿cuál es la máxima cantidad de goles que hicieron dos de ellos?

A) 20 B) 19 C) 18
D) 17 E) N. A.

31. El PA de 20 números es 15, de otros 18 números es 10 y el de los 12 restantes es 24. Hallar el PA de todos los números considerados.

A) 15 B) 15,24 C) 15,36
D) 15,4 E) N. A.

32. La MA de 15 números impares de 2 cifras es 15 y de otros 15 números impares también de dos cifras es 65. ¿Cuál es la MA de los impares de 2 cifras no considerados?

A) 85 B) 81 C) 86
D) 83 E) 84

33. El promedio de 50 números es 38, si 48 y 52 son dos de los números. Eliminando estos dos números, el promedio de los restantes es:

A) 38,5 B) 31,4 C) 36,4
D) 35,8 E) 37,5

34. La MG de a y b; de b y c, y de a y c es 2; 3 y 4 respectivamente. Hallar el producto de a; b y c.

A) 24 B) 22 C) 20
D) 18 E) 30

35. Si la MA de dos números es 5 y la MG de los mismos es $2\sqrt{6}$, hallar el mayor número.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 12

36. La media aritmética de 81 números enteros pares es 96. Hallar los números consecutivos que se deben quitar para que la media aritmética de los números restantes sea 90.

A) 126 y 128 B) 252 y 254 C) 200 y 202
D) 128 y 130 E) 332 y 334

37. Se tiene 2 grupos de personas en los que se observa la edad. En el grupo B hay 40 personas y la edad promedio es 50 años. Si el promedio de los 2 grupos es 40 años, hallar la edad promedio del grupo A si en él hay 100 personas.

A) 10 B) 20 C) 36
D) 40 E) 50

38. Hallar 2 números sabiendo que su mayor promedio y menor promedio son 13,5 y $13\frac{1}{3}$ respecitvamente. Dar como respuesta la diferencia de dichos números.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

39. El peso promedio de todos los estudiantes de una clase A es 68,4 kg y de todos los estudiantes de la clase B es 71,2 kg. Si el peso promedio de ambas clases combinadas es 70 y el número de estudiantes en la clase B excede a la de A en 16, ¿cuántos estudiantes tiene la clase B?

A) 64 B) 40 C) 24
D) 48 E) 36

40. El promedio aritmético de n números es $\frac{3}{2}n$. Si se aumentan a dichos números 1; 2; 3; 4; ... respectivamente, ¿cuál será el promedio aritmético de los números resultantes?

A) (4n + 1)/2 B) 5n + 3/2 C) 4n + 1/2
D) (5n + 3)/2 E) 4n + 3/2

41. Un auto viaja de la ciudad A a la ciudad B que dista 280 km del siguiente modo: los primeros 120 km los recorrió a 40 km/h, los siguientes 80 km a 60 km/h y el resto viajó a 80 km/h. Hallar la velocidad promedio en dicho viaje.

A) 72 km/h B) 49 km/h C) 60 km/h
D) 52,5 km/h E) 64 km/h

42. La media aritmética de 15 números pares de 2 cifras es 36 y de otros 15 números pares también de 2 cifras es 48. ¿Cuál es la MA de los números pares de 2 cifras no considerados?

A) 70 B) 74 C) 78
D) 76 E) N. A.

43. La MG y la MA de 2 números que se diferencian en 32 están en la relación 3/5. Dar el mayor de los números.

A) 36 B) 40 C) 42
D) 48 E) N. A.

44. Sean a y b dos números enteros, si el producto de la media aritmética con su media armónica es igual al doble de su media geométrica, entonces el menor valor de (a + b) es:

A) 1 B) 2 C) 5
D) 4 E) N. A.

45. La MG de tres números tomados dos a dos es 3; 4 y 6. Hallar el producto de los números.

A) 48 B) 36 C) 12
D) 24 E) 72

46. La estatura promedio de alumnos de un aula es 1,64 m. Si la estatura promedio de las mujeres es 1,61 m y el de los varones es 1,68 m; hallar el número de mujeres, si éstas exceden al de varones en 12.

A) 48 B) 50 C) 45
D) 56 E) 36

47. La suma de edades en una clase de ciclo anual es 1144 y la edad promedio es 22 años. Si cada alumno tuviera 3 años más y cada alumna tuviera 1 año menos, la edad promedio aumentaría en 2 años.

Dar la relación del número de mujeres al número de hombres de dicha clase.

A) 1/12 B) 1/6 C) 1/3 D) 1/2 E) 6

48. La media armónica de las inversas de la media aritmética y geométrica de dos números es 1/16. Hallar la media aritmética de las raíces cuadradas de dichos números.

A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) 4
D) 8 E) 16

49. Si conocemos la MA y MH de dos números, la diferencia de dichos números es:

A) $MA^2 - MA \times MH$ B) $MA - MH$
C) $\sqrt{MA^2 - MA \times MH}$ D) $2\sqrt{MA^2 - MA \times MH}$
E) $(MA^2 - MA \times MH)/2$

50. Si conocemos la MA y MG de dos números la diferencia de dichos números es:

A) $2\sqrt{MA^2 - MG^2}$ B) $MA^2 - MG^2$
C) $\sqrt{MA^2 - MG^2}$ D) $(MA^2 - MG^2)$
E) $\sqrt{MA^2 + MG^2}$

51. Hallar la suma de dos números naturales tal que sus medias aritmética y armónica están en la relación de 25 a 9; la semisuma de dichas medias excede a la media geométrica en 18.

A) 225 B) 306 C) 220
D) 450 E) 150

52. El promedio de los sueldos mensuales en una empresa es de \$400. Al cabo de cierto tiempo, se incorpora a la empresa nuevos trabajadores igual al 25% de los que había inicialmente con un sueldo medio igual al 75% de los antiguos. Si dos meses más tarde la empresa concede un aumento de \$30 mensuales, hallar el sueldo medio del total de obreros.

A) \$380 B) \$410 C) \$430
D) \$350 E) \$480

53. La nota promedio de los 780 alumnos que llevaron Matemática I fue 08, la de los aprobados fue 14 y la de los desaprobados fue 04. Hallar el porcentaje de alumnos que aprobaron el curso.

A) 20% B) 40% C) 15%
D) 30% E) 12%

54. El PA de las notas de un salón de 40 alumnos, en el curso de Matemática I, es 12. Si ninguna nota es menor que 10, ¿cuál es el mayor promedio que se puede obtener al tomar 10 de aquellos alumnos?

A) 20 B) 19 C) 18
D) 17 E) 16

55. La media armónica de 18 números es 18. ¿Cuál es la media armónica de sus mitades?

A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 6

56. Un bote desarrolla una velocidad de 15 km/h en aguas tranquilas. En un río cuyas aguas discurren a 5 km/h dicho bote hizo un cierto recorrido y volvió a su punto de partida. La relación entre la velocidad promedio en el viaje de ida y vuelta y la velocidad en aguas tranquilas es:

A) 5 a 4 B) 3 a 2 C) 7 a 8
D) 8 a 10 E) 8 a 9

57. Si el promedio aritmético de 35 números pares consecutivos es 88, calcular el promedio aritmético de los 35 números pares siguientes.

A) 128 B) 158 C) 188
D) 208 E) 168

58. En una universidad, el ingreso promedio de docentes y empleados es \$696. El ingreso promedio de los docentes es \$800 y el de los empleados \$600. El porcentaje de los docentes en la universidad es:

A) 48% B) 49% C) 50%
D) 52% E) 54%

59. Se tienen 3 depósitos que contienen aire: el primero de 80 cm^3 y humedad relativa (HR) 75%; el segundo de 50 cm^3 y 60% de HR y el tercero de 70 cm^3 y 96% de HR. Si se mezclan los 3 depósitos, la HR resultante será:

A) 74,4% B) 78,6% C) 72,8%
D) 70,4% E) 76,8%

60. La serie: 1; 9; 81; 729; .... de «n» términos tiene a 6561 como promedio geométrico. Hallar «n».

A) 7 B) 6 C) 8 D) 5 E) 9

61. La edad promedio de 3 personas es 56 años; si ninguno tiene más de 59 años, ¿cuál es la edad mínima que podría tener una de ellas?

A) 51 B) 50 C) 53
D) 52 E) 54

62. La edad promedio de 5 personas es 24; si ninguna es menor de 18 años, ¿cuál es la máxima edad que puede tener una de ellas, si todas las edades son distintas?

A) 43 B) 42 C) 41
D) 40 E) 39

63. Estudiantes de Medicina y Odontología rinden conjuntamente un examen de Matemáticas. El promedio general fue 12,75, los 15 estudiantes de Odontología obtuvieron un promedio 14 y los de

Medicina un promedio 12. ¿Cuántos estudiantes de Medicina rindieron el examen?

A) 20 B) 23 C) 25
D) 18 E) 28

64. El promedio aritmético de las edades de 6 personas es 48. Ninguno de ellos es menor de 42 años. ¿Cuál es la máxima edad que podrían tener dos de ellos?

A) 57 B) 58 C) 60
D) 61 E) 62

65. Halla el promedio armónico de 3 números, si se sabe que el promedio armónico de los números tomados dos a dos es 6; 12 y 20 respectivamente.

A) 10/3 B) 10 C) 12
D) 8/3 E) 12/5

66. El promedio aritmético de dos números es 19,5. Si su promedio aritmético excede en 18/13 a su promedio armónico, halla la diferencia de los números si éstos son naturales.

A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 16

67. Hallar el promedio armónico de los siguientes números:
1,2; 2,3; 3,4; ...; 8,9

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

68. Tres números enteros consecutivos pueden determinarse si se conoce:

A) Su promedio aritmético
B) Su promedio armónico
C) Su promedio geométrico
D) Cualquiera de los tres promedios
E) No se puede determinar

69. En un salón de clase:
- x alumnos tiene 14 años
- y alumnos tienen 11 años
- z alumnos tienen 13 años

Si el promedio de todos es 12 años, hallar z

A) $2y - x$ B) $y - 2x$ C) $2y - 2x$
D) $y - x$ E) $x - y$

70. Si a cinco números se le agregan los números 20 y 30 se observa que su promedio aritmético disminuye en 6, hallar el promedio de esos 5 números.

A) 40 B) 42 C) 44
D) 46 E) 48

71. José para ir al colegio va en un taxi a razón de 60 km/h y regresa por la misma vía en un bus a razón de 40 km/h. ¿Cuál es la velocidad promedio de su recorrido total?

A) 50 km/h B) 48 km/h C) 46 km/h
D) 42 km/h E) 52 km/h

72. El promedio de 5 números es 85, se considera un sexto número y el promedio aumenta en 15, hallar el sexto número

A) 120 B) 175 C) 154
D) 165 E) 18

73. La edad promedio de 4 personas es 34 y al incluir en el grupo a una quinta persona, el promedio disminuye en 4 años. ¿Cuál es la edad de la quinta persona?

A) 5 B) 7 C) 14
D) 10 E) 12

74. La media aritmética de dos números y la media armónica de dichos números están en la relación de 16 a 15. Calcular la media geométrica si la diferencia de cuadrados de los dos números es 144.

A) $9\sqrt{5}$ B) $3\sqrt{15}$ C) 15
D) 5 E) $3\sqrt{5}$

75. El promedio aritmético de 53 números es 600. Si se retiran los números 150; 120 y otro, el promedio aumenta en 27,9; calcular el otro número.

A) 138 B) 135 C) 140
D) 142 E) 145

76. Hallar dos números enteros sabiendo que su media aritmética es 5 y su armónica es 24/5. Dar como respuesta el mayor de los dos números.

A) 4 B) 6 C) 12
D) 24 E) 8

77. Encontrar la media aritmética del mayor número de dos cifras diferentes con el menor número de tres cifras diferentes y significativas.

A) 100 B) 99,5 C) 99
D) 111,5 E) 110,5

78. El promedio aritmético de 5 números enteros positivos consecutivos es igual a:
I. El número intermedio
II. La media aritmética de los extremos
III. La media aritmética del 2.° y 4.° número
Es (son) cierta(s)

A) Solo II B) Solo III C) Solo I
D) I; II y III E) I y II

79. Si la razón de la suma con la diferencia de dos números es 7/2, hallar el menor de ellos, si su media geométrica es $192\sqrt{5}$

A) 160 B) 320 C) $160\sqrt{5}$
D) 84 E) 200

80. En un grupo de 30 personas el promedio de las edades de los 15 mayores es 42 y el promedio de los restantes es 28. Si el promedio de los 10 mayores es 45 y de los 10 menores es 22, ¿cuál es la edad promedio de los 10 restantes?

A) 36 años B) 38 años C) 39 años
D) 40 años E) 42 años

CLAVES

1. D	11. B	21. D	31. C	41. D	51. D	61. B	71. B
2. A	12. D	22. A	32. A	42. C	52. B	62. B	72. B
3. D	13. D	23. B	33. E	43. A	53. B	63. C	73. C
4. B	14. A	24. E	34. A	44. D	54. C	64. C	74. B
5. A	15. A	25. C	35. C	45. E	55. C	65. B	75. B
6. B	16. B	26. D	36. E	46. A	56. E	66. D	76. B
7. A	17. C	27. D	37. C	47. C	57. B	67. B	77. E
8. E	18. A	28. B	38. A	48. C	58. A	68. D	78. D
9. A	19. D	29. B	39. A	49. D	59. B	69. B	79. B
10. A	20. E	30. A	40. A	50. A	60. E	70. D	80. B

Regla de mezcla y aleación

18 capítulo

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor nació en San Petersburgo (3 de marzo de 1845) y murió en Halle (6 de enero de 1918). Fue un matemático alemán, inventor con Dedekind y Frege de la teoría de conjuntos, que es la base de las matemáticas modernas. Gracias a sus atrevidas investigaciones sobre los conjuntos infinitos fue el primero capaz de formalizar la noción de infinito bajo la forma de los números transfinitos (cardinales y ordinales).

La educación primaria fue inicialmente confiada a un profesor particular, pasando luego a la escuela elemental de San Petersburgo. Sus estudios universitarios se iniciaron en 1862 en Zúrich, pero al siguiente año, después de la muerte de su padre, pasó a la Universidad de Berlín donde se especializó en Matemáticas, Filosofía y Física. En 1872, cuando contaba con 27 años de edad, se convirtió en catedrático en la Universidad de Halle, dando inicio entonces a sus principales investigaciones.

Sus primeros trabajos con las series de Fourier lo llevaron al desarrollo de una teoría de los números irracionales y en 1874 apareció su primer trabajo sobre la teoría de conjuntos. Además, trató durante muchos años de probar la hipótesis del continuo. Actualmente, su obra es ampliamente reconocida y ha sido acreedora de varios honores. Sistematizó el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales y usó el concepto de conjunto abierto.

Fuente: Wikipedia

MEZCLA

Es una operación que consiste en la unión de dos o más sustancias o ingredientes, que conservan su propia naturaleza. Se presentan dos casos:

Primer caso

Consiste en calcular el precio medio (precio de costo o precio promedio) de la mezcla, conociendo las cantidades y los precios unitarios de las sustancias que conforman la mezcla. El precio medio está dado por:

$$P_m = \frac{\text{Precio total de la mezcla}}{\text{Cantidad total de la mezcla}}$$

Ejemplo:

Un comerciante ha mezclado 3 tipos de arroz: 40 kg de arroz de S/.3 el kg con 25 kg de S/.3,6 kg y 35 kg de S/.2 el kg. Hallar el precio medio de la mezcla.

Resolución:

Tenemos:	Cantidad	Prec. unit.
	40 kg	S/.3
	25 kg	S/.3,6
	35 kg	S/.2

Hallamos el precio medio de la mezcla:

$$P_m = \frac{40\times3+25\times3,6+35\times2}{40+25+35} = \frac{280}{100} = 2,8$$

∴ El precio medio de la mezcla es S/.2,8 el kg.

Segundo caso

Consiste en calcular las cantidades de las sustancias que conforman la mezcla, conociendo los precios unitarios y el precio medio.

Ejemplo:

Un comerciante ha obtenido 80 L de aceite de S/.5,2 el L, mezclando dos clases de aceite, de S/.4 y S/.7 el L. ¿Qué cantidades de cada tipo de aceite se han utilizado?

Resolución:

Tenemos:		Cantidades	Precio unit.
Total	1.° tipo	x	4
80 L	2.° tipo	(80 − x)	7

Pero, el precio medio de la mezcla es S/.5,2 el L.

Luego: $5,2 = \frac{4x+7(80-x)}{80} \Rightarrow x = 48$

∴ Las cantidades que se han mezclado son:
1.° tipo de aceite: 48 L.
2.° tipo de aceite: 32 L.

REGLA DEL ASPA

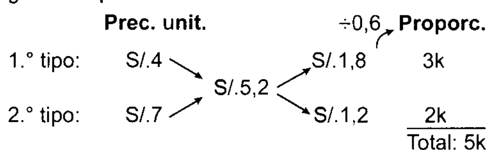
Es una operación, que permite calcular la proporción en que se encuentran las sustancias que conforman la mezcla, para ello se considera el precio medio y los precios unitarios.
Para hallar las cantidades que se han utilizado, se hace mediante un reparto proporcional.

Ejemplos:

1. Del ejemplo anterior, hallar las cantidades que se han mezclado.

   Resolución:

   Hallamos la proporción de la mezcla, usando la regla del aspa.



   Luego: $5k = 80 \Rightarrow k = 16$
   Hallamos las cantidades que se han mezclado:
   1.° tipo: $3 \times 16 = 48$ L.
   2.° tipo: $2 \times 16 = 32$ L.

2. Se han mezclado tres calidades distintas de un mismo cereal, cuyos precios unitarios por kg son S/.8, S/.10 y S/.14, resultando para la mezcla un precio medio de S/.11,2. Hallar la proporción de la mezcla.

	Prec. unit.			÷0,4 Proporc.
1.° tipo:	S/.8		2,8	7
2.° tipo:	S/.10	S/.11,2	2,8	7
3.° tipo:	S/. 14		1,2+3,2=4,4	11

   ∴ La proporción de la mezcla es: 7; 7 y 11 respectivamente.

MEZCLAS ALCOHÓLICAS

Una mezcla alcohólica, es el resultado de combinar cantidades convenientes de alcohol puro y agua destilada.

Grado alcohólico

El patrón de medida de las mezclas alcohólicas se denomina grado alcohólico y está dado por la relación que existe entre el volumen de alcohol puro y el volumen total de la mezcla, es decir:

$$\text{Grado alcohólico} = \frac{\text{Volumen de alcohol puro}}{\text{Volumen total de la mezcla}} \times 100$$

- El grado alcohólico, viene expresado en grados o en porcentaje.
- Para el alcohol puro se considera 100° o 100% de pureza, mientras que para el agua es 0° o 0%.

Ejemplos:

1. Un bodeguero ha mezclado 48 cc de alcohol puro con 16 cc de agua destilada. Hallar el grado alcohólico.

   Resolución:

   Tenemos:

Volumen de alcohol puro:	48 cc
Volumen de agua destilada:	16 cc
Volumen total de la mezcla:	64 cc

   Hallamos el grado alcohólico:

   $g = \frac{48}{64} \times 100 = 75\% \text{ o } 75°$

   ∴ El grado alcohólico es 75° o 75%.

Los problemas de mezclas alcohólicas se resuelven como los problemas de mezclas, sólo hay que considerar el grado alcohólico como si fueran precios unitarios.

2. Un bodeguero ha mezclado 60 L de alcohol de 45°, con 90 L de alcohol puro y 50 L. de agua. Hallar el grado alcohólico de la mezcla resultante.

Resolución:

Tenemos:	**Cantidades**	**Grado**
	60 L	45°
Alcohol puro:	90 L	100°
Agua pura:	50 L	0°

Hallamos el grado alcohólico:

$$g = \frac{60 \times 45 + 90 \times 100}{60 + 90 + 50} = 58{,}5°$$

∴ La mezcla resultante es de 58,5° o 58,5% de pureza.

Nota

En todos los problemas de mezcla intervienen las cantidades, conjuntamente con el precio unitario, grado alcohólico, temperatura, humedad relativa, etc.
Para la solución de estos problemas se resuelven como en los dos casos anteriores.

3. En un laboratorio, se han mezclado 48 cc de aire de 65% de humedad relativa, con 72 cc de aire de 80% de humedad. Hallar la humedad relativa media, de la mezcla resultante.

Resolución:

Tenemos:	**Cantidad**	**Hum. Relativa (H.R.)**
	48 cc	65%
	72 cc	80%

Hallamos la HR media:

$$HR_m = \frac{48 \times 65 + 72 \times 80}{48 + 72} = \frac{8880}{120} = 74$$

∴ La mezcla resultante tendrá 74% de HR

4. Ana ha mezclado 7 L , 8 L y 10 L de agua a 12 °C; 30 °C y 60 °C respectivamente. Hallar la temperatura media de la mezcla resultante.

Resolución:

Se tiene:	**Cantidades (L)**	**Temperatura (°C)**
	7	12
	8	30
	10	60

Hallamos la temperatura media:

$$T_m = \frac{7 \times 12 + 8 \times 30 + 10 \times 60}{7 + 8 + 10} = \frac{924}{25} = 36{,}96$$

∴ La temperatura media es 36,96 °C.

REGLA DE ALEACIÓN

Es una operación que consiste en la mezcla de dos o más metales, mediante la fusión o fundición de los mismos.
De los metales que participan en una aleación, éstos son considerados como metales finos y ordinarios.

Metal fino

El metal más caro de los que forman la aleación, recibe el nombre de metal fino. Tienen esta denominación los metales preciosos, como son: el oro, la plata y el platino.

Metal ordinario

Son los metales que se van a fundir (alear) con los metales preciosos.
Tienen esta denominación: el cobre, el fierro, el zinc, etc.; a estos metales también se les denominan: metal de liga.

Ley de aleación

Al patrón de medida de las aleaciones se le denomina ley de aleación y está dado por la relación entre el peso del metal fino y el peso total de la aleación.

$$\text{Ley} = \frac{\text{Peso de metal fino (F)}}{\text{Peso total de la aleación (P)}}$$

La ley de aleación viene expresada en milésimas.

Ejemplo:

Un joyero ha fundido 51 g de plata con 17 g de cobre. Hallar la ley de la aleación resultante.

Resolución:

Peso del metal fino:	51 g
Peso del metal ordinario:	17 g
Peso total de la aleación:	68 g

Hallamos la ley de aleación:

$$\text{Ley} = \frac{51}{68} = 0{,}75 \text{ o } 0{,}750$$

∴ La ley resultante: 750 milésimas.

Aleaciones de oro

Comercialmente, las aleaciones de oro vienen expresadas en quilates y están dadas por:

$$\text{Ley} = \frac{F}{P} = \frac{n}{24}$$

Donde: F: peso de metal fino.
P: peso total de la aleación.
n: número de quilates.

Ejemplo:

Se tiene una aleación de oro de 18 quilates que pesa 56 g. ¿Cuántos gramos de oro puro están presentes?

Resolución:

Tenemos:
Número de quilates: 18 quilates
Peso total: 56 gramos
Hallamos el peso de oro puro.

$$\frac{F}{56} = \frac{18}{24} \quad F = 42 \text{ g de oro puro}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Se mezclan 2 tipos de arroz en 2 depósitos A y B, en A la proporción es de 2 a 3; si se sacan 10 kg y 18 kg de A y B respectivamente y se forma una nueva mezcla, ésta se encuentra en la relación de 1 a 3. ¿En qué proporción está la mezcla en B?

Resolución:

Sean C_1 y C_2 las cantidades del arroz que se mezclan.

De A:

Se extraen 10 kg $\begin{cases} C_1 = 2 \times 2 = 4 \text{ kg} \\ C_2 = 3 \times 2 = 6 \text{ kg} \end{cases}$

En la mezcla de A y B:

Total: 10 + 18 = 28 kg $\begin{cases} C_1 = 1 \times 7 = 7 \text{ kg} \\ C_2 = 3 \times 7 = 21 \text{ kg} \end{cases}$

Hallamos las cantidades de B:

De: $C_1 = 7 - 4 = 3$ kg; $C_2 = 21 - 6 = 15$ kg

$\therefore$ Proporción de B: $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

2. Se tienen 2 tipos de vino, en el primero la relación de vino puro y agua es de 2 a 3 y en la segunda la relación es de 1 a 4. Se desea obtener 60 litros de las dos de tal manera que la relación sea de 7 a 13. ¿Cuántos litros se debe tomar del primero?

Resolución:

Hallamos el grado de pureza de cada mezcla.

1.° tipo $\left\{ \begin{array}{l} \text{Vino: } 2 \\ \text{Agua: } 3 \end{array} \right\}$ $g_1 = \frac{2}{5}$

2.° tipo $\left\{ \begin{array}{l} \text{Vino: } 1 \\ \text{Agua: } 4 \end{array} \right\}$ $g_2 = \frac{1}{5}$

Mezcla final (60 L) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Vino: } 7 \\ \text{Agua: } 13 \end{array} \right\}$ $g_m = \frac{7}{20}$

Hallamos la proporción de la mezcla final, mediante la regla del aspa:

1.° tipo: $\frac{2}{5}$ ↘ ↗ $\frac{7}{20} - \frac{1}{5} = \frac{3}{20} \Rightarrow 3k$

$\frac{7}{20}$

2.° tipo: $\frac{1}{5}$ ↗ ↘ $\frac{2}{5} - \frac{7}{20} = \frac{1}{20} \Rightarrow k$

$4k = 60$

$k = 15$

Se utilizaron:

Del 1.° 3×15 = 45 L Del 2.° 1×15 = 15 L

$\therefore$ Se tomaron del 1.° 45 L

3. Se mezclan 15 kg de café crudo de S/.20 el kg con 35 kg de S/.24 el kg y 30 kg de S/.19 el kg; si al ser tostado el café pierde el 5% de su peso, ¿a cómo se debe vender el kg de café tostado para ganar el 20%?

Resolución:

Tenemos:

Cantidades (kg)	Prec. unit. (S/.)
15	20
35	24
30	19

Hallamos el precio medio del café tostado:

$$P_m = \frac{15 \times 20 + 35 \times 24 + 30 \times 19}{95\%(15 + 35 + 30)} = 22{,}5 \text{ el kg}$$

Ganancia: 20% (22,5) = S/.4,5

$\therefore$ $P_V = 22{,}5 + 4{,}5 =$ S/.27 el kg

4. Un tendero compró 150 kg de café a S/.6 el kg y la mezcla con 90 kg de una calidad superior que le había costado S/.8 el kg. El café, por efecto del tueste, perdió la sexta parte de su peso. ¿Qué cantidad de café tostado se entregará por S/.891, sabiendo que quiere ganar el 10% del importe de la compra?

Resolución:

Tenemos:

Cantidades. (kg)	Prec. unit. (S/.)
150	6
90	8

Hallamos el precio de costo del café tostado:

$$P_m = \frac{150 \times 6 + 90 \times 8}{\frac{5}{6} \times (150 + 90)} = \text{S/.}8{,}1$$

Ganancia:

10% (8,1) = 0,81 $\Rightarrow$ $P_V = 8{,}1 + 0{,}81 =$ S/.8,91 el kg.

Hallamos la cantidad entregada por S/.891:

$\frac{891}{8{,}91} = 100$ kg de café tostado.

$\therefore$ Se entregaron 100 kg

5. Los precios de los ingredientes de una mezcla son S/.5; S/.8 y S/.12 respectivamente, del último se tiene 40 kg. ¿Cuántos kg tendrá la mezcla, si el primer ingrediente y el segundo intervienen como 7 es a 2? Además, el precio medio es S/.6.

Resolución:

Del enunciado:	Cantidad	Precio
1.°:	7k	5
2.°:	2k	8
3.°:	40	12

Hallamos el precio medio ($P_m = 6$)

$$6 = \frac{7k \times 5 + 2k \times 8 + 40 \times 12}{7k + 2k + 40} \Rightarrow k = 80$$

Cantidades que intervienen:

1.°: 7 × 80 = 560 kg; 2.°: 2 × 80 = 160 kg

$\therefore$ Total: 560 + 160 + 40 = 760 kg

6. Se mezclan 2 clases de avena en la proporción de 3 a 2 y se vende ganando el 10%, luego se mezcla

en la proporción de 2 a 3 y se vende ganando el 15%, resultando ambos precios de venta iguales. Hallar la relación de sus precios unitarios.

Resolución:

Sean P_1 y P_2 los precios unitarios de las avenas.

1.ª mezcla:	**Cantidades**	**Prec. unit.**
1.°:	3	P_1
2.°:	2	P_2

$$P_{m1} = \frac{3P_1 + 2P_2}{5};\ g_1 = 10\%P_{m_1} \Rightarrow P_{v_1} = 110\%P_{m_1}$$

2.ª mezcla:	**Cantidades**	**Prec. unit.**
1.°:	2	P_1
2.°:	3	P_2

$$P_{m_2} = \frac{2P_1 + 3P_2}{5};\ g_2 = 15\%P_{m_2} \Rightarrow P_{v_1} = 115\%P_{m_2}$$

Por condición: $P_{v_1} = P_{v_2}$

Reemplazando:

$$110\%\left(\frac{3P_1 + 2P_2}{5}\right) = 115\%\left(\frac{2P_1 + 3P_2}{5}\right)$$

Efectuando: $20P_1 = 25P_2 \quad \therefore \ \frac{P_1}{P_2} = \frac{5}{4}$

7. En un tonel se mezclan vinos de 2 calidades hasta completar su capacidad. Si se mezclaran en la proporción de 3 a 5 resultaría a S/.9 el litro; si se mezclan en la proporción de 9 a 11 resulta a S/.8,4 el litro. ¿Cuál será el precio por litro de mezcla, si se mezclan en la proporción de 3 a 7?

Resolución:

Sean P_1 y P_2 los precios unitarios de los dos tipos de vino.

1.ª mezcla:	**Cantidad**	**Precio unit.**
1.°:	3	P_1
2.°:	5	P_2

$$P_{m1} = 9 = \frac{3P_1 + 5P_2}{8} \Rightarrow 3P_1 + 5P_2 = 72 \quad \ldots(1)$$

2.ª mezcla:	**Cantidad**	**Precio unit.**
1.°:	9	P_1
2.°:	11	P_2

$$P_{m2} = 8{,}4 = \frac{9P_1 + 11P_2}{20} \Rightarrow 9P_1 + 11P_2 = 168 \ldots(2)$$

De (1) y (2): P_1 = S/.4; P_2 = S/.12

3.ª mezcla:	**Cantidad**	**Precio unit.**
1.°:	3	4
2.°:	7	12

$$P_m = \frac{3\times4 + 7\times12}{3+7} = 9{,}6 \text{ L}$$

$\therefore$ El precio medio es S/.9,6 el L

8. En una mezcla A de concreto, por cada kg de cemento hay 2 de arena y 3 de piedra; en otra mezcla B, por cada kg de cemento hay 4 de arena y 5 de piedra. ¿Cuántas toneladas de A y B respectivamente hay que utilizar, para obtener 56 toneladas de una mezcla que tenga por cada kg de cemento 3 de arena y 4 de piedra?

Resolución:

Del enunciado:

	Cemento (kg)	Arena (kg)	Piedra (kg)	Total
A	1	2	3	6
B	1	4	5	10
A y B	1	3	4	

Repartimos las 56 t DP a 6 y 10:

$6k + 10k = 56 \Rightarrow k = \frac{7}{2}$

Cantidad de cada uno:

$A = 6 \times \frac{7}{2} = 21$ t $\qquad B = 10 \times \frac{7}{2} = 35$ t

$\therefore$ Se han utilizado: 21 t y 35 t respectivamente.

9. Se tienen 2 recipientes de vino y agua, la primera contiene 2 partes de vino y 18 partes de agua; la segunda 6 partes de vino y 24 partes de agua. Calcular qué cantidad se debe tomar de cada recipiente para obtener 50 litros, en la cual por cada 4 partes de vino se tenga 21 partes de agua.

Resolución:

Hallamos el grado de pureza en cada recipiente:

1.° recip. $\begin{cases}\text{Vino: 2}\\ \text{Agua: 18}\end{cases} \rightarrow g_1 = \frac{2}{20} \Rightarrow \frac{1}{10}$

2.° recip. $\begin{cases}\text{Vino: 6}\\ \text{Agua: 24}\end{cases} \rightarrow g_2 = \frac{6}{30} \Rightarrow \frac{1}{5}$

Mezcla final (50 L) $\begin{cases}\text{Vino: 6}\\ \text{Agua: 24}\end{cases} \rightarrow g_2 = \frac{6}{30} \Rightarrow \frac{1}{5}$

Hallamos la proporción de la mezcla final:

1.° $\frac{1}{10}$ ↘ $\frac{4}{25}$ ↗ $\frac{1}{5} - \frac{4}{25} = \frac{2}{50} \Rightarrow 2k$

2.° $\frac{1}{5}$ ↗ ↘ $\frac{4}{25} - \frac{1}{10} = \frac{3}{50} \Rightarrow 3k$

$5k = 50$

$\Rightarrow k = 10$

$\therefore$ Las cantidades que se mezclaron:

Del 1.°: $2 \times 10 = 20$ L

Del 2.°: $3 \times 10 = 30$ L

10. Se quiere llenar un tonel de 420 litros con 3 clases de vodka de S/.24; S/.28 y S/.30 el litro y cierta cantidad de agua. Pero, poniendo un litro de agua por cada 20 litros de vodka y en éste un litro de S/.24 por cada 3 litros de S/.28. Sabiendo que se quiere ganar S/.2100 vendiendo la mezcla a S/.32 cada litro, ¿cuántos litros de S/.30 había que ponerse?

Resolución:

Mezcla total: 420 L $\begin{cases}\dfrac{\text{Agua}}{\text{Vodka}} = \dfrac{1\times 20}{20\times 20} = \dfrac{20}{400}\end{cases}$

En la mezcla intervienen:

Agua: 20 L; Vodka = 400 L

En la mezcla:	Cant. (L).	Prec. unit. (S/.)
Vodka: 400 L	k	24
	3k	28
	400 − 4k	30
Agua:	20	−−

Hallamos el precio medio de la mezcla:

$$P_m = \frac{24k + 28\times 3k + 30(400-4k)}{420}$$

$$\Rightarrow P_m = \frac{1000-k}{35} \text{ el L}$$

Ganancia por L: $32 - \dfrac{1000-k}{35} = \dfrac{120+k}{35}$

Ganancia total = 2100

$$420\left(\frac{120+k}{35}\right) = 2100 \Rightarrow k = 55$$

∴ De S/.30 intervienen: $400 - 4\times 55 = 180$ L

11. Dos recipientes contienen 9 litros y 5 litros de alcohol respectivamente, de 40° y 88°. Se agrega cierta cantidad de alcohol puro en uno e igual cantidad de agua en el otro, resultando alcoholes de igual grado en ambos recipientes. ¿Cuántos litros de agua o alcohol se agregan a los recipientes?

Resolución:

Si se agregan igual cantidad de alcohol puro en uno y de agua en el otro, para que tengan igual grado, se cumple:

1.°:	**Cantidad**	**Grado**
	9	40°
Alcohol puro	x	100°

2.°:	**Cantidad**	**Grado**
	5	88°
Agua	x	0°

El grado alcohólico es el mismo:

$$\frac{9\times 40 + 100x}{9+x} = \frac{5\times 88 + 0x}{5+x} \Rightarrow x = 3$$

∴ Se agregan 3 L

12. Se mezclan 70 litros de alcohol de 93° con 50 litros de 69°, a la mezcla se le extrae 42 litros y se le reemplaza por alcohol de grado desconocido, resultando una mezcla que contiene 28,8 litros de agua. Determinar el grado desconocido.

Resolución:

Hallamos el grado alcohólico original:

Cantidad (L)	**Grado**
70	93°
50	69°

$$g_m = \frac{70\times 93 + 50\times 69}{120} = 83°$$

Al extraerse 42 L, quedan 78 L de 83°.

Nueva mezcla (agregado 42 L de alcohol de x°):

Cantidad. (L)	**Grado**
78	83°
42	x

$$g_m = \frac{78\times 83 + 42x}{120} \quad \ldots(1)$$

Cantidad de alcohol: $120 - 28,8 = 91,2$

Su grado: $\dfrac{91,2}{120}\times 100$

En (1): $\dfrac{6474 + 42x}{120} = \dfrac{9120}{120} \Rightarrow 63$

∴ El grado desconocido: 63°.

13. De un recipiente lleno de alcohol puro se extrae la cuarta parte y se reemplaza por agua, luego se extrae la quinta parte que se completa con agua. ¿Cuántos litros de alcohol puro se necesitarán agregar a 20 litros de esta última mezcla, para obtener alcohol de 90°?

Resolución:

Hallamos la parte de alcohol puro que queda en la mezcla:

Alcohol: $\dfrac{4}{5}\times\dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{5}$

Agua: $1 - \dfrac{3}{5} = \dfrac{2}{5}$

grado: $\dfrac{3}{5}\times 100 = 60°$

Hallamos la cantidad de alcohol puro:

	Cantidad (L)	**Grado**
	20	60°
Alc. puro:	x	100°

$$\frac{20\times 60 + 100x}{20+x} = 90° \Rightarrow x = 60 \text{ L}$$

∴ Se necesitan 60 L de alcohol puro.

14. Se mezclan 2 alcoholes, uno de 60° y el otro alcohol puro, siendo el volumen del primero el triple del segundo. Se toma la mitad de la mezcla y se le agrega 40 L de agua, obteniendo una nueva mezcla de alcohol de 50°. ¿Qué cantidad de alcohol puro se utilizó?

Resolución:

Hallamos el grado alcohólico de la mezcla inicial:

	Cant. (L)	**Grado**
	3k	60°
Alc. puro	1k	100°

$$g = \frac{3\times 60 + 1\times 100}{4} = 70°$$

Nueva mezcla:

	Cantidad (L)	**Grado**
(La mitad de la 1.ª)	2k	70°
Agua	40	0°

Por dato: $50 = \dfrac{2k\times 70 + 40\times 0}{2k+40} \Rightarrow k = 50$

∴ Se utilizó 50 L de alcohol puro.

15. Se tienen dos depósitos, cada uno con 50 litros de alcohol, si se intercambian 10 litros en uno el grado aumenta en 4 y en el otro disminuye en 4. ¿Cuáles son los grados al inicio, si los nuevos grados están en la relación de 16 a 19 respectivamente?

Resolución:

Sean g_1 y g_2 los grados originales. Intercambiando 10 L, resultan:

1.ª mezcla:	**Cantidad**	**Grado**
	40	g_1
	10	g_2

$$g_m = g_1 + 4 = \frac{40\times g_1 + 10\times g_2}{50}$$

2.ª mezcla:	**Cantidad**	**Grado**
	40	g_2
	10	g_2

$$g_M = g_2 - 4 = \frac{40\times g_2 + 10\times g_1}{50}$$

$\Rightarrow g_2 = g_1 + 20$ ...(1)

Además: $\dfrac{g_1+4}{g_2-4} = \dfrac{16}{19} \Rightarrow 16g_2 = 19g_1 + 140$...(2)

De (1) y (2): $g_1 = 60°$; $g_2 = 80°$

∴ Los grados originales son: 60° y 80°.

16. Se mezclan 2 cantidades de alcohol, una de 12° cuyo litro cuesta S/.6 y el otro de 9° cuyo litro cuesta S/.5, obteniéndose alcohol de 10,2°. Calcular qué cantidad de agua se debe agregar a la mezcla para obtener 90 litros de alcohol que se venderá a S/.300 ganando el 10% del precio de venta.

Resolución:

Hallamos la proporción de la mezcla:

	Grado		**Proporción**
1.°:	12°	1,2°	2k
	10,2°		
2.°:	9°	1,8°	3k

En la mezcla con agua.

	Cant. (L)	**Prec. unit.**
1.°:	2k	6
2.°:	3k	5
Agua:	90 − 5k	–

El precio medio:

$$P_m = \frac{2k\times 6 + 3k\times 5}{90} \Rightarrow P_m = \frac{3}{10}k \quad ...(1)$$

Pero, en toda la venta: $P_V = P_C + 10\%P_V$

$90\%P_V = P_C \Rightarrow P_C = S/.\ 270$

↓

300

$$\Rightarrow P_m = \frac{270}{90} = 3$$

En (1): $3 = \dfrac{3k}{10} \Rightarrow k = 10$

∴ Cantidad de agua: 90 − 50 = 40 L

17. Se mezclan 18 litros de alcohol de 50° con 20 litros con 10° de pureza y además con cantidades convenientes de alcohol puro y agua, obteniéndose una mezcla de 50 litros de 28° de pureza, por error estas cantidades convenientes de alcohol puro y agua se intercambian. Calcular el grado de esta nueva mezcla resultante.

Resolución:

Hallamos las cantidades de agua y alcohol puro que se mezclan:

1.ª mezcla:		**Cant. (L)**	**Grado**
50 L		18	50°
28°		20	10°
	Alc. puro:	x	100°
	Agua:	12 − x	0°

$$\Rightarrow 28° = \frac{18\times 50 + 20\times 10 + 100x}{50} \Rightarrow x = 3$$

Se necesitarán: Alc. puro: 3 L
Agua: 9 L

Hallamos el grado, cuando se intercambian las cantidades:

$$g = \frac{18\times 50 + 20\times 10 + 9\times 100}{50} = 40°$$

∴ El grado resultante: 40°.

18. Se quiere obtener 300 litros de alcohol de 74°, mezclando 90 litros de alcohol de 80° con cantidades convenientes de alcohol puro y agua. ¿Qué cantidad de agua se necesitará?

Resolución:

Del enunciado:		**Cant. (L)**	**Grado**
300 L		90	80°
74°	Alc. puro:	(210 − x)	100°
	Agua:	x	0°

$$\text{Luego: } 74 = \frac{90\times 80 + 100(210 - x)}{300} \Rightarrow x = 60$$

∴ Se necesitan 60 L de agua.

19. Una corona de oro de 32 g es de 18 quilates. Se quiere venderla ganando un 20%. ¿Cuál debe ser su precio de venta, si el gramo de oro está en $25?

Resolución:

Corona de oro: Peso = 32 g
n.° quilates = 18

Hallamos el peso de oro puro en la corona:

$$\frac{F}{32} = \frac{18}{24} \Rightarrow F = 24 \text{ g de Au}$$

Costo del g de oro: $25

Costo de la corona: 25 × 24 = $600

Ganancia: 20%(600) = $120

∴ P_V = 600 + 120 = $720

20. En una aleación de 14,7 quilates, se tienen mezcladas oro de 12; 15 y 16 quilates. Si el oro de 12 quilates representa el 25% del peso de la mezcla, calcular en qué relación se encuentran los pesos de oro de 16 y 15 quilates.

Resolución:

Sea 100 g el peso de la aleación resultante, de ley 14,7 quilates.

Cantidades (g)	Ley
25	12
x	15
(75 – x)	16

$$\text{Ley} = 14{,}7 = \frac{25\times 12 + 15x + 16(75 - x)}{100}$$

$\Rightarrow x = 30$ g

Pesos empleados: De 15 quilates: 30 g
De 16 quilates: 45 g

$\therefore$ La relación pedida es: $\frac{45}{30} = \frac{3}{2}$

21. Un joyero tiene 2 tipos de lingotes: el primero contiene 270 g de oro por 30 g de cobre y el segundo 200 g de oro por 50 g de cobre. Determinar los pesos que deben considerarse de cada lingote, para tener 200 g de una aleación cuya ley sea 0,825.

Resolución:

Hallamos las leyes originales:

1.° lingote: $\begin{cases}\text{Au: } 270\text{ g}\\ \text{Cu: } 30\text{ g}\end{cases} \Rightarrow L_1 = \frac{270}{300} = 0{,}9$

2.° lingote: $\begin{cases}\text{Au: } 200\text{ g}\\ \text{Cu: } 50\text{ g}\end{cases} \Rightarrow L_2 = \frac{200}{250} = 0{,}8$

Resultan 200 g de una aleación de 0,825 de ley.

Hallamos la proporción:

1.°: 0,9 ↘ ↗ 0,025 → 1k
0,825
2.°: 0,8 ↙ ↘ 0,075 → 3k

4k = 200 ⇒ k = 50

$\therefore$ Pesos utilizados: Del 1.°: 50 g
Del 2.°: 150 g

22. Se funden 2 lingotes de oro, uno de 700 g de peso y 0,920 de ley y otro de 300 g de peso y 0,850 de ley. Se extraen "n" gramos de esta aleación que son reemplazados por «n» gramos de una aleación de 0,833 y resulta que la ley de la aleación es ahora 0,893. Hallar "n".

Resolución:

Hallamos la ley media resultante:

Cantidad (g)	Ley
700	0,920
300	0,880

$$L_m = \frac{700\times 0{,}920 + 300\times 0{,}880}{1000} = 0{,}908$$

Los "n" g de la aleación anterior se reemplazan por otra, cuya ley es 0,833, resultando 0,893 de ley.

Cantidad (g)	Ley
(1000 – n)	0,908
n	0,833

$$\text{Ley} = 0{,}893 = \frac{(1000 - n)0{,}908 + 0{,}833n}{1000}$$

$\Rightarrow n = 200$

$\therefore$ El valor de n = 200.

23. Se tiene un lingote de 18 quilates y otro de 0,800 de ley; el primero tiene 20 g de oro y el segundo tiene 8 g de metal de plata y el resto de oro. ¿Cuál es la ley del lingote resultante de la fusión de ambos?

Resolución:

Hallamos el peso del primer lingote: 20 g de oro puro y 18 quilates de ley:

$$\frac{20}{P_1} = \frac{18}{24} \Rightarrow P_1 = \frac{20\times 24}{18} = \frac{80}{3}\text{g}$$

Hallamos el peso del segundo lingote: 8 g de plata y 0,800 de ley.

$$\frac{W_{Au}}{W_{AU} + 8} = 0{,}800 \Rightarrow W_{Au} = 32 \text{ g de oro}$$

Peso de la segunda aleación 32 + 8 = 40 g

Hallamos la ley de la fusión de los dos lingotes:

	Cant. (g)	Ley (en milésimos)
1.° lingote:	$\frac{80}{3}$	$\frac{18}{24}$
2.° lingote:	40	0,800

$$L_m = \frac{\frac{80}{3}\times\frac{18}{24} + 40\times 0{,}8}{\frac{80}{3} + 40} = 0{,}78$$

$\therefore$ La ley resultante 0,78

24. Se agregan 1120 g de plata a un lingote que contiene dos partes de cobre por 7 de plata, al final el peso del cobre es 114/959 del peso de plata. ¿Cuál es el peso del lingote primitivo?

Resolución:

Hallamos la ley de la aleación primitiva:

$$\frac{W_{Cu}}{W_{Ag}} = \frac{2}{7} \Rightarrow Lm = \frac{W_{Ag}}{W_{Cu} + W_{Ag}} = \frac{7}{2+7} = \frac{7}{2+7} = \frac{7}{9}$$

Hallamos la ley de la aleación resultante:

$$W_{Cu} = \frac{114}{959}\times W_{Ag} \Rightarrow \frac{W_{Cu}}{W_{Ag}} = \frac{114}{959}$$

$$L_{mf} = \frac{959}{959 + 114} = \frac{959}{1073}$$

En el momento de la aleación final:

	Cantidades (g)	Ley
Lingote inicial:	P	$\frac{7}{9}$
Peso de plata:	1120	1

En la ley final: $\frac{959}{1073} = \frac{P \times \frac{7}{9} + 1120 \times 1}{P + 1120}$

Efectuando: P = 1026 g

∴ El peso del lingote primitivo 1026 g

25. Se tiene 8 820 kg de una aleación cuya ley de plata es de 0,8; ésta se funde con cierta cantidad de cobre para obtener monedas de 4 g de peso. ¿Cuántas monedas se pueden obtener, si la Ley de las monedas es 0,75?

Solución:

Sea C la cantidad de cobre, en kg, que se utiliza para que la ley de las monedas sea 0,75:

	Cantidades	**Ley**
Aleación original:	8820	0,8
Cobre:	C	0

Su ley de aleación: $0,75 = \frac{8820 \times 0,8}{8820 + C}$

Efectuando: C = 588 kg de cobre

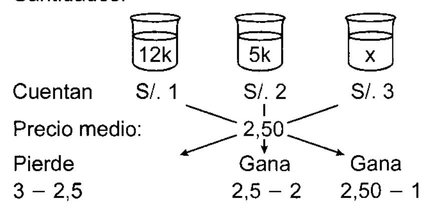
Peso total: 8820 + 588 = 9408 kg

∴ N.° de monedas: $\frac{9408}{0,004} = 2\ 352\ 000$

26. En una mezcla los ingredientes cuestan 1, 2 y 3 soles el litro. Si las cantidades que se emplean de los dos primeros son como 12 es a 5 y el precio medio es S/.2,50, entonces la cantidad que se utilizó del tercero es

Resolución:

Cantidades:



Con el precio medio no se gana ni se pierde.

(3 – 2,5)x = (2,5 – 2)(5k) +(2,5 – 1)(12K)

⇒ 0,5x = 0,5(5K) + 1,5(12K) ⇒ x= 41k

Las cantidades son como 12; 5 y 41

∴ 41

27. Se mezclan tres productos cuyos precios de venta son: S/.1,00, S/.3,00 y S/.4,00 del primero se utiliza tantos kilogramos como libras se utilizan del segundo. Del tercero se utiliza 5 kilogramos por cada 3 kilogramos del segundo. Si la mezcla se vende como si fuera sólo el segundo producto. Entonces se estaría obteniendo un sobre precio del orden de: (1 kg = 2,2 lb)

Resolución:

$\frac{\text{Peso del 2.}}{\text{Peso del 3.}} = \underbrace{\frac{a\,kg}{b\,kg} = \frac{m\,libras}{m\,libras}}_{\text{La relación es de 3/5}} = \frac{3}{5}$

Expresando en libras los 2 últimos y el primero del kg:

S/ 1,00	S/ 3,00	S/ 4,00
3x	3x	5x
kg	libras	libras

Pero 3x kg <> 3x (2,2 lb) = 6,6x lb

$P_m = \frac{1(6,6x) + 3(3x) + 4(5x)}{6,6x + 3x + 5x}$

P_m = S/.2,44

SI se vende a S/.3,00 (precio del 2° producto)

∴ Sobreprecio % = $\frac{3 - 2,44}{2,44} \times 100\% = 22,95\%$

28. Un comerciante compró tres clases de trigo una de 48 kg que costó S/.48, otra de 60 kg que costó S/.67,20 y la última de 36 kg que costo S/.28,80. Al mezclarlos hubo una merma 5% del peso total. ¿A cuánto se de vender (en soles) al kilogramo de la mezcla resultante para ganar un 33%?

Resolución:

El comerciante gastó:

S/.48 + S/.67,2 + S/.28,8 = S/.144

Como en la mezcla hubo una merma del 5%, queda para la venta un 95%:

95% (48 + 60 + 36) = 136,8 kg.

Luego, el precio de la mezcla:

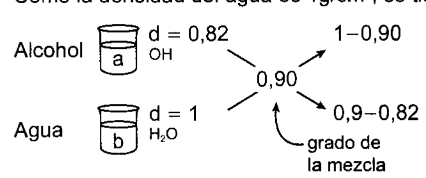
$P_m = \frac{144}{136,8}$ en su venta se debe ganar 33%

∴ P_V = 133%P = S/.1,40

29. Si la densidad del alcohol es 0,82 g/cm^3, entonces el grado de pureza de una mezcla alcohólica de 0,90 g/cm^3 de densidad es:

Resolución:

Como la densidad del agua es 1g/cm^3, se tiene:



⇒ $\frac{a}{b} = \frac{0,10}{0,08} = \frac{5}{4}$ Relación de volúmenes

⇒ $V_{alcohol} = 5V$; $V_{agua} = 4v$

Grado de la mezcla = $\frac{5V}{5V + 4V} \times 100°$

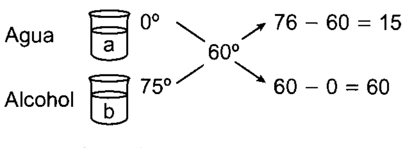
∴ Grado de la mezcla: 55,5° = 55,5%

30. Calcular el peso de un litro de mezcla conteniendo 40% de agua y 60% de alcohol, sabiendo que un litro de agua pesa un kilogramo y un litro de mezcla de alcohol de 75° pesa 960 gramos.

Resolución:

Para obtener alcohol de 60° (40% agua y 60% alcohol) habrá que agregar agua al alcohol de 75°;

veamos cuánto:



$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$

⇒ basta mezclar en la relación de 1 a 4, luego:

Agua	Alcohol 15°	Alcohol 60°	
1L	4L	5L	en 5 litros
Pesa	Pesa	Pesa	x = 4840 gr.
1000 +	4(960) =	x	

$\therefore$ 1 L de alcohol de 60° pesa : $\frac{4840}{5} = 968$ g.

31. Se mezclan alcoholes de 40°, 50° y 60° en la proporción de 1, 4 y 5 respectivamente y en la mezcla se evapora una parte del alcohol puro equivalente al 4% del volumen total que debe obtenerse. Calcular el grado alcohólico de la mezcla resultante.

Resolución:

Mezclando los alcoholes:

V	+	4V	+	5V	=	Total 10V
40°		50°		60°		G_M

Grado de la mezcla

$$g_m = \frac{40V + 50(4V) + 60(5V)}{V + 4V + 5V}$$

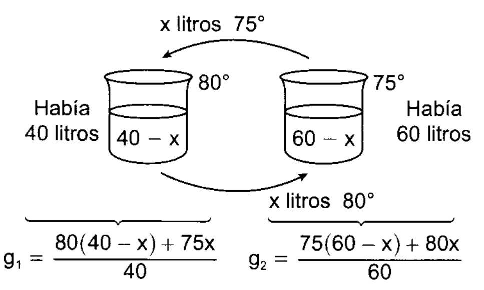
$\Rightarrow g_m = 54°$ $\begin{cases} 54\% \text{ alcohol puro} \\ 46\% \text{ agua} \end{cases}$

Como se evapora el 4% de alcohol solo queda 54% – 4% = 50%

$$\therefore g_m = \frac{50}{50 + 46} \times 100° = 52{,}08°$$

32. Se tienen dos mezclas alcohólicas, una de 40 litros de alcohol de 80° y otra de 60 litros de alcohol de 75°. ¿Cuántos litros enteros deben intercambiarse como mínimo para que el grado de pureza de la segunda mezcla sea mayor que el de la segunda?

Resolución:



$$g_1 = \frac{80(40 - x) + 75x}{40} \qquad g_2 = \frac{75(60 - x) + 80x}{60}$$

$\Rightarrow$ Se desea $g_1 < g_2$

$\Rightarrow \frac{3200 - 5x}{4} < \frac{4500 + 5x}{6}$ $\Big\}$ obtiene $24 < x$

$\therefore$ Menor valor entero de x: 25

33. ¿En qué proporción se deben mezclar 2 líquidos de precios p soles el litro y q soles el litro ($p > q$) para que el precio medio de la mezcla sea la media armónica de los precios?

Resolución:

V_1	+	V_2
p soles		q soles

$$\Rightarrow P_m = \frac{V_1P + V_2q}{p + q} = m_n\ (p, q)$$

$$\frac{V_1P + V_2q}{V_1 + V_2} = \frac{2pq}{p + q} \text{ efectuando:}$$

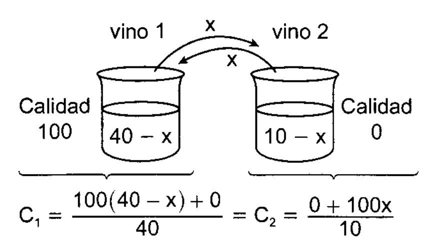
$\Rightarrow V_1p^2 + V_1pq + V_2pq + V_2q^2 = 2V_1pq + 2V_2pq$

$\Rightarrow V_1p^2 + V_2q^2 = V_1pq + V_2pq$

$V_1p(p - q) = V_2q(p - q) \quad \therefore \frac{V_1}{V_2} = \frac{q}{p}$

34. En dos depósitos se tiene 40 y 10 litros de vino de distintos precios. Intercambiando n litros se otra igualar los precios. Si al vino puro que había originalmente en el primer depósito se le asigna un puntaje de calidad igual a 100 puntos. ¿Cuál es el puntaje de calidad del segundo depósito, después de intercambiar los n litros? Considere calidad cero al vino puro original del segundo depósito.

Resolución:



$$C_1 = \frac{100(40 - x) + 0}{40} = C_2 = \frac{0 + 100x}{10}$$

Como $C_1 = C_2$, se obtiene: x = 8

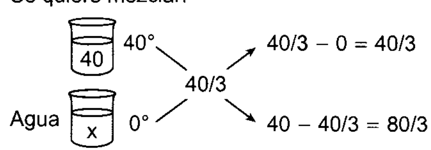
Igual precio

$$\therefore C_2 = \frac{100(8)}{10} = 80$$

35. A 40 litros de alcohol de 40° se le agrega agua para reducir su pureza a la tercera parte, la nueva mezcla se quiere vender ganando el $33{,}\hat{3}\%$. El precio de venta en soles es: (el precio de alcohol puro es S/.30)

Resolución:

Se quiere mezclar:



$\Rightarrow \dfrac{40}{x} = \dfrac{40/3}{80/3} \Rightarrow x = 80$

$\Rightarrow$ Se debe agregar 80 litros de mezcla

Cant. de alcohol puro = 40% (40 litros) = 16 litros

$\Rightarrow$ costo mezcla = 16(30) = S/.480

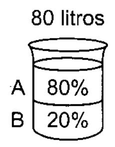
$P_m = \dfrac{480}{40+80} = S/.4$

$\therefore$ Precio Venta = $133,\hat{3}\%$ (S/.4) = S/.5,3

(gana $33,\hat{3}\%$)

36. Se tienen dos recipientes con 80 y 60 litros de una mezcla de líquidos A y B; en el primer recipiente el 80% corresponde a A y en el segundo el 75% corresponde a B. Si de litros que se deben intercambiar es:

Resolución:



Concentración de A

$C_1 = \dfrac{80\%}{80\% + 20\%}$

Concentración de A

$C_2 = \dfrac{25\%}{25\% + 75\%} = 25\%$

En el primer recipiente se retira x litros y se agrega x litros del segundo, similar en el otro:

$G_1 = \dfrac{80\%(80-x)+25\%x}{80}$

$G_2 = \dfrac{25\%(60-x)+80\%x}{60}$

de $G_1 = G_2$

$x = \dfrac{240}{7}$

Dando forma $x = \dfrac{240(11)}{7(11)} = \dfrac{2640}{77}$ $\quad\therefore x = \dfrac{2640}{77}$ L

37. Se han mezclado 60 kg de una sustancia A, de S/.50 el kg con otro B cuyo peso representa el 25% del peso total y se ha obtenido como precio medio S/.47,5. ¿Cuál es precio del kg de la sustancia B?

Resolución:

Sea: el peso total como: 4

el peso de B es como: 25%(4) = 1

el peso de A es como: 4 – 1 = 3

Precio medio: 47, 5

Precio por Kilo de A: S/.50

Cantidades	Precios	Valor
3	50	150
1	P	P
4	47,5	150 + P

$\Rightarrow 150 + P = 4\,(47,5) \Rightarrow P = 40$

$\therefore$ El precio por kilo de B es: S/.40

38. Una mezcla de 90 litros contiene vino de S/.7,0 y S/.4,0 el litro, si un litro de mezcla se vende por S/. 5,4 ganando el 20%. Hallar el porcentaje vino más barato de la mezcla.

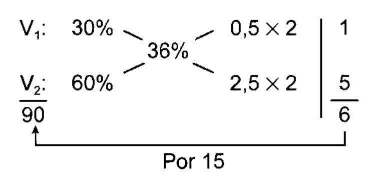
Resolución:

Del enunciado se tiene que:

Pv = S/.5,4 $\quad$ Ganancia = $20\%P_m$.

$\Rightarrow P_m + 20\%P_m = 5,4 \Rightarrow P_m = 4,5$

Luego aplicamos regla de mezcla inversa.



El volumen de vino más barato es: $V_1 = 75$

$\therefore$ El porcentaje es: $\dfrac{75}{90} \times 100\% = 83,33\%$

39. En una mezcla los ingredientes cuestan 10; 20 y 24 soles el litro y el precio medio es 15 soles. Si las cantidades que se emplean del primer y último ingrediente son como 12 a 5. Hallar que porcentaje del total es el segundo ingrediente.

Resolución:

Datos:

- Precios por litro: 10; 20 y 24 soles
- Volúmenes: 12n; V y 5n
- Precio medio: 15 soles

Por regla de mezcla inversa.

Volúmenes	Precio	Valor
12n	10 – 20 = –10	–120n
V	20 – 20 = 0	0
5n	24 – 20 = 4	20n
V + 17n	15 – 20 = –5	–100n

$\Rightarrow (V + 17n)(-5) = -100\,n$

Volumen del 2do: V = 3n

Volumen total: 12n + 3n + 5n = 20n

$\therefore$ El porcentaje: $\dfrac{3n}{20h}100\% = 15\%$

40. Que cantidad de ron a S/.0,40 el litro debe mezclarse con 60 litros de S/.0,25 para que vendiéndolo a S/.0,36 se gane el 12,25% por litro.

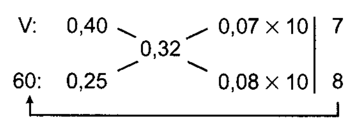
Resolución:

Como la ganancia es 12,5% por litro, entonces:

$P_m + 12,5\%P_m = 0,36$

$P_m + \dfrac{P_m}{8} = 0,36 \Rightarrow P_m = 0,32$

Luego planteamos:

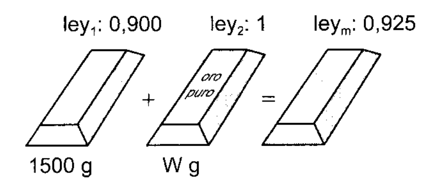


De donde Planteamos: $\dfrac{V}{60} = \dfrac{7}{8}$ $\quad\therefore$ V= 52,5 L

41. Un joyero tiene un lingote de oro de ley 0,900 que pesa 1500 g. ¿Qué cantidad de oro puro (en g) tendrá que añadir al lingote para elevar su ley a 0,925?

Resolución:

Aleación es una mezcla de metales a altas temperaturas donde se encuentran en estado líquido.



Como $\underbrace{(0,925-0,900)1500}_{\text{ganancia aparente}} = \underbrace{(1-0,925)W}_{\text{pérdida aparente}}$

$\therefore$ W= 500 g

42. Se tiene alcohol de 80% cuyo volumen del primero es el triple del 2.°. ¿Cuántos litros de alcohol de 65% se debe agregar para obtener 96 litros de 69%?

Resolución:

Nos interesa conocer el volumen del 3.°

	Volumen	Pureza(%)	Valor parcial
1°	3V	80%	45V
2°	V	60%	−5V
3°	x	0	0
	96	69 − 65 = 4	40V

$\Rightarrow 40V = 96 \times 4 \Rightarrow V = 9,6$

$\therefore x = 96 - 4V = 96 - 38,4 = 57,6$ L

43. Se tiene maíz de 3 calidades, de S/.18; S/.24 y S/.30 el kg al mezclarlos de modo tal que por cada 2 kg del primero entren 3 kg del segundo y por cada 5 kg del tercero entren 3 kg, del primero. ¿A cómo debe venderse el kg de la mezcla si se desea ganar el 25%?

Resolución:

Sean los pesos de los ingredientes a; b; y c, entonces:

$\begin{matrix}1.° \to \\ 2.° \to\end{matrix} \frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ ...(1) $\quad \begin{matrix}3.° \to \\ 1.° \to\end{matrix} \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$ ...(2)

De (1) y (2) vamos a hacer que "a" sea proporcional a 6 que es el MCM. de 2 y 3.

$$\frac{a}{b} = \frac{2\times3}{3\times3} = \frac{6}{9} \text{ y } \frac{c}{a} = \frac{5\times2}{3\times2} = \frac{10}{6}$$

Luego: $\frac{a}{6} = \frac{b}{9} = \frac{c}{10}$

Por regla de mezcla directa:

Cantidades	Precios	Costo parcial
6	18 − 18 = 0	0
9	24 − 18 = 56	54
10	30 − 18 = 12	120
25	P_m = 18	174

$P_m - 18 = \frac{174}{25} = 6,96$

$P_V = 24,96 + 25\% (24,96) = 24,96 + 6,24 = 31,20$

$\therefore P_V =$ S/.31,20

44. Se tienen dos tipos de vino, en el primero el contenido de vinos es al de agua como 2 a 3 y en el segundo como 1 a 4 se desea obtener 60 litros en el cual de vino y agua están en la relación de 7 a 13 ¿Cuántos litros del primero se deben tomar?

Resolución:

En la primera mezcla:

$\left.\begin{matrix}\text{Vino: } 2 \\ \text{Agua: } 3\end{matrix}\right\} g_1 = \frac{2}{2+3} \times 100\% = 40\%$

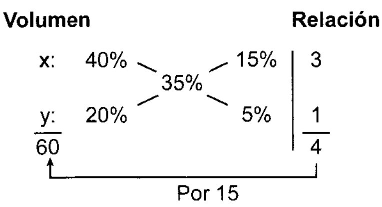
En la segunda mezcla:

$\left.\begin{matrix}\text{Vino: } 1 \\ \text{Agua: } 4\end{matrix}\right\} g_2 = \frac{1}{1+4} \times 100\% = 20\%$

Mezcla final:

$\left.\begin{matrix}\text{Vino: } 7 \\ \text{Agua: } 13\end{matrix}\right\} g_m = \frac{7}{7+13} \times 100\% = 35\%$

Siendo X e Y el volumen que se toma de la 1.ª y 2.ª mezcla. Por regla del aspa:



$\therefore x = 3(15) = 45$ L

45. Un comerciante de uvas mezcla vinos de S/.5 y S/.6 el litro, la mezcla tiene 7 partes del más barato por 8 partes del más caro y se desea ganar el 80% en la venta de la mezcla. ¿A cómo debe vender una damajuana de 5 litros?

Resolución:

Por regla de mezcla directa:

Volumen	Precio	Valor
7	5	35
8	6	48
15	P_m	83

De donde $P_m = \frac{83}{15}$ (precio por litro)

Como gana el 80% del costo se tiene:

$P_V = \left(\frac{83}{15}\right) + 80\%\left(\frac{83}{15}\right) = \frac{180}{100}\left(\frac{83}{15}\right) =$ S/.9,96

Pero nos interesa conocer el precio de venta de 5 litros.

$\therefore$ Precio de venta = 5(9,96) = S/.49,8

46. Se tiene dos clases de vino, en el primero la proporción del volumen de vino al volumen de agua es de 3 a 5, en el segundo es de 1 a 11. Se quiere obtener 140 litros de mezcla, en el cual la proporción del volumen de vino al volumen de agua sea como 7 es a 17. ¿Cuántos litros del segundo se debe utilizar?

Resolución:

Conocidas las relaciones entre el vino y el agua, se puede encontrar la concentración de vino en la mezcla:

vino/agua 3/5 + vino/agua 1/11 = vino/agua 7/17

$C_1 = \frac{3}{8}$ $\quad C_2 = \frac{1}{12}$ $\quad C_3 = \frac{7}{24}$

Se tendría:

a litros: $C_1 = \frac{3}{8}$ $\qquad \frac{7}{24} - \frac{1}{12} = \frac{5}{24}$

$C_3 = \frac{7}{24}$

b litros: $C_2 = \frac{1}{12}$ $\qquad \frac{3}{8} - \frac{7}{24} = \frac{2}{24}$

$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5/24}{2/24} = \frac{5}{2}$ donde $a + b = 140$ L

$\Rightarrow a = 100$ L $\quad \therefore b = 40$ L

47. Juan tiene una botella con alcohol de 40° y para obtener alcohol de 54° mezcla el contenido con el 25% del contenido de la botella de Pedro. Si las botellas de Juan y Pedro tienen volúmenes en relación de 3 a 8 respectivamente. El grado de pureza de la botella de Pedro es:

Resolución:

40°: 3k (Juan) + g: 8k (Pedro) → Alcohol 54°

Se cumple: $\frac{3k}{25\%(8k)} = \frac{g - 54°}{54° - 40°}$

$\therefore$ Resolviendo: $g = 75°$

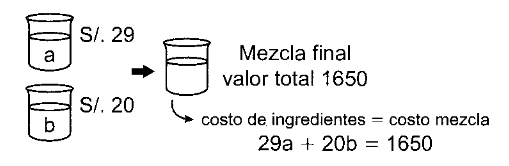
48. Una mezcla de vino se formó de la siguiente manera: 12 litros se de 5 soles el litro, con 30 litros de 50 soles el litro y con 18 litros de 10 el litro. ¿Qué volumen (en litros) de la mezcla anterior se debe mezclar con vino de 20 soles el litro, para obtener una nueva mezcla, cuyo valor total de 1650 soles?.

Resolución:

Mezcla Inicial

$$P_m = \frac{12 \times 5 + 30 \times 50 + 18 \times 10}{12 + 30 + 18} = S/.29$$

Se mezcla con x litros de 20 soles



$\Rightarrow a = 10\left(\frac{165 - 2b}{29}\right)$ Considerando a y b enteros

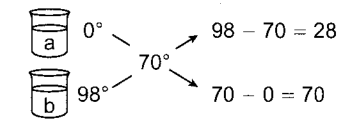
$a = 10; 30; 50;$ $\quad b = 68; 39; 10$

$\therefore$ De las alternativas $a = 10$ L

49. Se desea vender a p soles el litro del alcohol de 70°, se cuenta con agua destilada a 1,40 soles el litro y alcohol de 98° a 2,80 soles el litro, el costo de preparación de cada litro es 0,20 soles; entonces el valor de p, para ganar 20% del costo, es:

Resolución:

Encontramos la relación en que se debe de mezclar el agua destilada y el alcohol de 98°



$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{28}{70} = \frac{2}{5}$

Suponiendo $a = 2$ litros $\qquad b = 5$ litros

Costo total: $2(1,4) + 5(2,8) + 7(0,2) = 18,2$

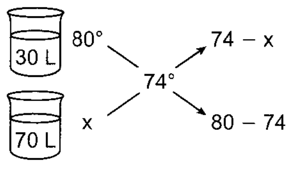
$P_m = \frac{\text{Costo total}}{\text{Cant. total}} = \frac{18,2}{7} = 2,6$

Para ganar 20%: $Pv = 120\%\ (2,6)$ $\quad \therefore Pv = S/.3,12$

50. Se quiere obtener 100 litros de alcohol de 74° mezclando 30 litros de alcohol de 80° con cantidades convenientes de alcohol puro y agua, pero por error éstas cantidades se intercambiaron. ¿Cuál fue el grado de la mezcla resultante?

Resolución:

Debió mezclarse:



$\Rightarrow \frac{30}{70} = \frac{74 - x}{6} \Rightarrow x = \frac{500°}{7}$

Cantidad de alcohol: $\frac{500}{7}\%(70) = 50$

Cantidad de agua: $70 - 50 = 20$

Pero se ha mezclado:

30 L 80° + 50 L 0° + 20 L 100°

Agua Alcohol

$$g = \left(\frac{30\times 80 + 50\times 0 + 20\times 100}{30 + 50 + 20}\right) \quad \therefore\ g = 44°$$

51. Se mezclan de 0,10 y 0,5 litros de soluciones ácidas con concentraciones normales de 2,5 y 1,5 equivalentes por litro respectivamente. La concentración que se obtiene cuando se añade 0,30 litros de agua a la solución resultante es:

Resolución:

Concentración de la mezcla:

$$\therefore\ \frac{0,1(2,5)+0,5(1,5)+0,3(0)}{0,1+0,5+0,3} = 1,1$$

52. ¿En qué proporción deben mezclarse los pesos de sus sustancias de densidades 1,5 y 1,1 para obtener una sustancia de 1,2 de densidad.

Resolución:

V_1 1,5 → 1,2 – 1,1 = 0,1

1,2

V_2 1,1 → 1,5 – 1,2 = 0,3

$$\Rightarrow\ \frac{V_1}{V_2} = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$$

Pero: Peso = Volumen × densidad

$$\therefore\ \frac{P_1}{P_2} = \frac{1\times 1,5}{3\times 1,1} = \frac{5}{11}$$

53. Un joyero tiene 10 g de oro y 2 g de cobre para hacer una sortija de 20 quilates. El joyero decide utilizar 1 g de cobre, para después corregir dicha cantidad, porque las mermas por fusión de oro y cobre son respectivamente del 0,5% y 0,1%, entonces el exceso de ambos metales en gramos respectivamente son:

Resolución:

Si no existiera merma:

Oro x 24k → 20 – 0 = 20

20k

Cobre 1 gr. 0 → 24 – 20 = 4

$$\Rightarrow\ \frac{x}{1} = \frac{20}{4} \Rightarrow x = 5 \text{ gramos}$$

En el oro hay 0,5% de merma:

queda $99,5\%W_{oro} = 5$ gramos

$\Rightarrow W_{oro} = 5,025$ gr. (peso con el exceso necesario)

Similar para el cobre 0,1% de merma

$\Rightarrow$ queda $99,9\%W_{cobre} = 1$ gramo

$\therefore\ W_{cobre} = 1,001$ g.

54. Se tiene una aleación de plata, a la cual se le agrega plata pura de tal manera que su mesa total aumenta un 20% y su ley aumenta un 10% ¿cuál era la ley de la aleación inicial, en milésimas?

Resolución:

m L ; Plata pura 1000 } 120%m 110%L ← ley aumenta 10%; masa aumenta 20%

Se observa: Peso de la Plata pura 20%m.

$$\text{Además: } \frac{m}{20\%m} = \frac{1000 - 110\%L}{110\%L - L}$$

$$\Rightarrow\ 5 = \frac{1000 - 1,1L}{0,1L} \quad \therefore\ L = 625$$

55. Una aleación de oro y paladio es de 18 quilates y se cuenta con otra aleación de oro y cobre de 21 quilates; si al fundir en un crisol artesanal las mermas son del 15%. En peso, ¿cuántos gramos de la primera aleación son necesarios para tener una aleación de 306 gramos y de 20 quilates?

Resolución:

Si no hubiera merma:

a 18q → 21 – 20 = 1

20q 306

b 21q → 20 – 18 = 2

$$\Rightarrow\ \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 2a$$

Pero a + b = 306 = a + 2a $\begin{cases} a = 102 \\ b = 204 \end{cases}$

Como existe una merma del 15%

queda $85\%W_{1.° \text{ aleación}} = 102$

$\therefore$ Se obtiene $W_{1.° \text{ aleación}} = 120$ gramos

56. Se mezclan menestras de dos precios S/.2 y S/.4 el kg en la proporción a/b y se vende ganando x% del costo, pero si se mezclaran por error, en proporción inversa, el costo aumentaría 50%, reduciendo el margen de ganancia en un 66,6% de la ganancia original. Calcular (a/b) + x

Resolución:

Sean las mezclas indicadas:

S/. 2 (a) S/. 4 (b)   S/. 2 (b) S/. 4 (a)

$$\Rightarrow\ P_{m1} = \frac{2a+4b}{a+b} \qquad P_{m2} = \frac{2b+4a}{a+b}$$

Pero el costo aumenta 50%

$$P_{m2} = 150\%\ P_{m1} \Rightarrow \frac{2b+4a}{a+b} = 150\%\left(\frac{2a+4b}{a+b}\right)$$

Se observa: a = 4b

También: P_{m1} = S/.2,4 y P_{m2} = S/.3,6

Como el margen de ganancias disminuye, el precio de venta no ha variado en el segundo caso:

Luego: $G_1 - G_2 = P_{m2} - P_{m1}$

$G_1 - G_2 = 3{,}6 - 2{,}4 = 1{,}2$

Además: $G_2 = (100 - 66{,}\widehat{6})\ \%\ G_1$

$G_2 = \frac{1}{3}G_1 \Rightarrow G_1 - \underbrace{\frac{1}{3}G_1}_{G_2} = 1{,}2$

$\Rightarrow G_1 = 1{,}8 = x\%\ \underbrace{(2{,}4)}_{P_{m1}} \Rightarrow x = 75$

$\therefore$ Se pide: $\frac{a}{b} + x = 4 + 75 = 79$

57. Se funden 2 lingotes de oro, uno de 700 g de masa y 920 milésimas de ley y otro de 300 g de masa y 880 milésimas de ley, se extrae n gramos de la aleación resultante y se reemplaza por n gramos de otra aleación de 833 milésimas, resultando una aleación de 893 milésimas. Hallar n.

Resolución:

Se funde inicialmente:

ley → 700 : 920
ley → 300 : 880

$$\text{ley media} = \frac{700 \times 920 + 300 \times 880}{700 + 300} = 908 \text{ milésimas}$$

Luego se extrae n gramos y se funde con n gramos de 833 ley.

1000 − n : 908 ↘ ↗ 893 − 833 = 60
893 (ley resultante)
n : 833 ↗ ↘ 908 − 893 = 15

$$\Rightarrow \frac{1000 - n}{n} = \frac{60}{15} = \frac{4}{1} \quad \therefore \text{Resolviendo: } n = 200$$

58. Se tiene una mezcla de: x litros de alcohol de 80° y 20 litros de alcohol de 60°. Si se intercambian 12 litros se observa que las mezclas resultantes son del mismo grado alcohólico. Hallar dicho grado alcohólico.

Resolución:

Para obtener el mismo grado alcohólico:

$G = \frac{1}{2}$ (MH (Volúmenes))

$12 = \frac{1}{2}\left(\frac{2 \times 20x}{20 + x}\right) \Rightarrow x = 30$

El grado que se obtiene:

$$G = \frac{12(60°) + 18(80°)}{12 + 18} = 72°$$

$$G = \frac{12(80°) + 8(60°)}{12 + 8} = 72° \quad \therefore G = 72°$$

59. Se tienen 2 tipos de alcohol, en el primero el contenido de alcohol es al de agua como 2 es a 3, en el segundo como 1 es a 4; se desea obtener 120 litros de mezcla de los dos pero donde la proporción de alcohol al agua sea de 7 a 13. ¿Cuántos litros del segundo se debe tomar?

Resolución:

Primero: (2 alcohol, 3 agua)

$G_1 = \frac{2}{2+3} \times 100° = 40°$

Segundo: (1 alcohol, 4 agua)

$G_2 = \frac{1}{1+4} \times 100° = 20°$

Se desea obtener (7 alcohol, 13 agua)

$Gm = \frac{7}{7+13} \times 100 = 35°$

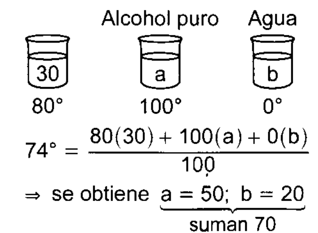
Se mezclan x litros del segundo.

$$35 = \frac{40(120 - x) + 20(x)}{120}$$

$\therefore$ Resolviendo: $x = 30$

60. Se quiere obtener 100 L de alcohol de 74°, mezclando 30 L de alcohol de 80° con cantidades convenientes de alcohol puro y agua, pero por error éstas cantidades se intercambian, entonces el grado alcohólico de la mezcla resultante será:

Resolución:



$$74° = \frac{80(30) + 100(a) + 0(b)}{100}$$

$\Rightarrow$ se obtiene $\underbrace{a = 50;\ b = 20}_{\text{suman } 70}$

Pero por errar estar cantidades se intercambian:

$$G = \frac{80(30) + 100(20) + 0(50)}{100} \quad \therefore G = 44$$

61. Se tienen los recipientes A, B, C y D que contienen mezclas de alcohol y agua según el siguiente cuadro:

	A	B	C	D
Agua(L)	36	28	36	24
Alcohol(L)	48	70	24	36

Sea x el número de litros que se debe intercambiar de A y B para que de la misma cantidad de agua en ambos. Sea y el número de litros que se debe intercambiar de C y D para obtener alcohol de la misma calidad. Calcule la suma de las cifras de (x + y).

Resolución:

Entre A y B:

- % agua en A = $\frac{36}{36+48} \times 100\% = \frac{300}{7}\%$
- % agua en B = $\frac{28}{28+70} \times 100\% = \frac{200}{7}\%$

Se intercambian x litros:

$$\underbrace{\frac{300}{7}\%(84-x)+\frac{200}{7}\%(x)}_{\text{agua en A}}=\underbrace{\frac{200}{7}\%(98-x)+\frac{300}{7}\%(x)}_{\text{agua en B}}$$

$\Rightarrow x = 28$ litros

Mezclando C y D(60 litros c/u)

$$y=\frac{1}{2}\left(\frac{2\times 60\times 60}{60+60}\right)=30 \text{ litros}$$

Luego: $x + y = 28 + 30 = 58$

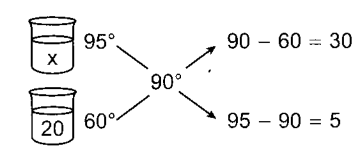
$\Rightarrow$ Suma de cifras = 13

62. De un recipiente lleno de alcohol se extrae la cuarta parte y se reemplaza con agua, luego se extrae la quinta parte y se reemplaza con agua. ¿Cuantos litros de alcohol de 95° se deben agregar a 20 L de esta última mezcla para obtener alcohol de 90°?

Resolución:

Queda de alcohol en el primer recipiente:

$$\frac{4}{5}\left(\frac{3}{4}(\text{alcohol})\right)=\frac{3}{5} <> 60°$$



$$\Rightarrow \frac{x}{20}=\frac{30}{5} \quad \therefore x = 120 \text{ L}$$

63. Se tiene 2 aleaciones de plata de leyes 0,450 y 0,655 cuyos pesos son 200 g y 125 g respectivamente. Si se intercambian P g de cada una de las aleaciones, se obtienen dos aleaciones de leyes iguales, entonces, P es igual a:

Resolución:

Las leyes son iguales, las concentraciones en cada aleación finas, resultan iguales:

Inicialmente:

W_1 (1.ª aleac.) W_2 (2.ª aleac.) ⇨ 2.° P / 1.° W_1-P ; 1.° P / 2.° W_2-P

$$\frac{1.^a \text{ aleación}}{2.^a \text{ aleación}} \quad \frac{W_1-P}{P}=\frac{P}{W_2-P}$$

$\therefore P = 76{,}92$ g

64. Se tiene:

Lingote	A	B	C	D	E
Cobre	40	50	170	30	60
Oro	160	200	250	270	180

Cobre y oro en gramos, si se funden cierta cantidad de A con D se obtiene una aleación de 0,620 de ley; se toman la misma cantidad de gramos de C que de A y se funde cierta cantidad de E. Si se hubiera tomado de B una cantidad que pese como A y E juntos y se hubiera fundido con una cantidad de D que pesa como lo tomado de B y C juntos la ley resultante sería:

Resolución:

Indicando la ley de cada lingote en la tabla:

	A	B	C	D	E
Cu	40	50	170	30	60
Au	160	200	250	270	180
Ley	0,800	0,800	25/42	0,900	0,750

A con D: 0,820 de ley

A [x] 0,800 ↘ ↗ 0,080
0,820
D [300] 0,900 ↗ ↘ 0,020

$$\Rightarrow \frac{x}{300}=\frac{0{,}080}{0{,}020} \Rightarrow x = 1200$$

se funden B y D

De B: 200 + 240 = 440 g y 0,800 de ley

De D: 440 + 1200 = 1640 g y 0,900 de ley

$$\therefore \text{Ley resultante}=\frac{440(0{,}8)+1640(0{,}9)}{440+1640}=0{,}878$$

65. Se tiene 40 g de una aleación de oro, si se le agrega 60 g de oro puro su número de quilates aumente en 30%. ¿Cuántos gramos de cobre puro se le debe agregar a esta última aleación para que su número de quilates sea igual al de la aleación inicial?

Resolución:

[40] a ← n.° quilates

130%a

Oro puro [60] 24k ↖ aumenta 30%

$$\frac{40}{60}=\frac{24-130\%a}{130\%a-a} \Rightarrow a = 16$$

La aleación final resulta 130% (16) = 20,8 quilates

Se agrega x de cobre

[100] 20,8 ↘ ↗ 16 – 0 = 16
16
Cobre [x] 0 ↗ ↘ 20,8 – 16 = 4,8

$$\Rightarrow \frac{100}{x}=\frac{16}{4{,}8} \quad \therefore \text{Resolviendo: } x = 30$$

66. Una sortija de oro y cobre pesa 20 gramos y sumergida en agua pesa 18,75 gramos. ¿De cuántos quilates es la sortija? ($Pe_{oro} = 19$, $Pe_{cobre} = 8$)

Resolución:

Peso de la sortija = 20 g
$\Rightarrow$ sumergido = 18,75 g } Diferencia de pesas 1,25 g

Esta diferencia es numéricamente igual al volumen de la sortija: V = 1,25 cc.

Se conoce:

$$\begin{array}{c}\text{Peso específico}\\ \text{de la sortija}\end{array} = \frac{20}{1,25} = \frac{W_{oro} + W_{cobre}}{V_{oro} + V_{cobre}}$$

Además: $V_{oro} = \dfrac{W_{oro}}{Pe_{oro}} = \dfrac{W_{oro}}{19}$

$$V_{cobre} = \frac{W_{cobre}}{Pe_{cobre}} = \frac{W_{cobre}}{8} \Rightarrow \frac{20}{1,25} = \frac{W_{oro} + W_{cobre}}{\frac{W_{oro}}{19} + \frac{W_{cobre}}{8}}$$

Se obtiene: $\dfrac{W_{cobre}}{3} = \dfrac{W_{oro}}{19}$

$\therefore$ n.° quilates $= \dfrac{19}{19+3} \times 24 = 20,72$

67. Una mina de cobre tiene 0,6% de ley y una producción semanal de 1000 toneladas, extrae el cobre, puro con 99,99% de pureza y una eficiencia de extracción del 85%. Se desea elaborar un latón 63/37 (63% Cu y 37% Zn), la cantidad de latón 60/30 que se debe alear con el cobre es aproximadamente:

Resolución:

De 1000 toneladas, se obtiene:

0,6%(1000) = 6 de cobre con pureza del 0,9999

⇒ Eficiencia es del 85%

se extrae 0,85(6) = 5,1 de Cu

latón [x] 0,6000 ↘ ↗ 0,3699

0,6300

cobre [5,1] 0,9999 ↗ ↘ 0,0300

$\Rightarrow \dfrac{x}{5,1} = \dfrac{0,37}{0,03} \Rightarrow x = 62,9$

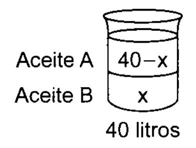
$\therefore$ Aproximadamente: 63 Tn.

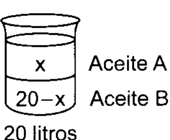
68. ¿Cuál la mínima cantidad entera de litros que se debe intercambiar entre 2 recipientes que contiene 40 y 20 litros de 2 calidades de aceite cuyos precios (soles) se diferencian en 3 unidades, para que entre dichos precios la diferencia sea mínima?

Resolución:

Para que la diferencias sea mínima, consideramos que tengan el mismo preciso, debemos = 0

⇒ Si tienen igual precio, las concentraciones en cada una son iguales:





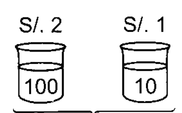
$$\Rightarrow \frac{40-x}{x} = \frac{x}{20-x} \Rightarrow x = \frac{20 \times 40}{20+40}$$

Luego $x = 13,\hat{3}$

$\therefore$ La cantidad a intercambiar debe ser entera y la menor posible: x = 13

69. Un vendedor lleva un tonel de vino de 100 L que cuesta 2 soles el litro para mezclarlo con otro volumen de 10 L de 1 sol el litro que está en otra ciudad. Si durante el camino sufre una merma del 10% entonces se queda obligado a vender la mezcla con un recargo del 20%, luego al final lo vende con un descuento del 10%; entonces el litro de vino con IGV que debe vender al cliente es:

Resolución:



Costo total 2(100) + 1 (10) = S/.210

Sufre una merma del 10%

⇒ queda 90%(100 + 10) = 99

Precio c/kg $= \dfrac{210}{99} = 2,\widehat{12} \approx 2,1$

Recargas 20% Desc. 10%

$\underbrace{90\%}_{-10\%}\ \underbrace{120\%}_{+20\%}(2,1) = 2,268$

⇒ Más el IGV (8%)

$\therefore P_V = 108\%\,(2,268) = 2,44$

70. Se mezclan dos salmueras, una con 60% en peso y la otra con 30%, cuyos pesos están en la relación 3 a 1 respectivamente. Luego se extrae la cuarta parte de dicha mezcla y se hace evaporar la cuarta parte del agua de su contenido por calentamiento. Luego la nueva concentración de la mezcla que queda es:

Resolución:

\3/ 60%

\1/ 30%

$\Rightarrow \%\text{mezcla} = \dfrac{3(60)+1(30)}{3+1} = 52,5\%$

Se extrae 1(unidad) de la mezcla

⇒ en peso 52,5%

Se evapora 25%, queda 75% = (3/4)

⇒ nueva concentración: $\dfrac{52,5\%}{75\%} = 70\%$

\3/ 52,5%

\3/4/ 70%

Mezcladas:

$\therefore \dfrac{3(52,5)+3/4(70)}{3+3/4} = 56\%$

71. Se tienen dos barras de oro; en la primera el 80% del peso total es oro y en la segunda el 75% de su peso es oro, siendo esta el cuádruple de la anterior. Si se mezclan, ¿de qué pureza resulta dicha mezcla?

Resolución:

Pesos	n	4n
Pureza	80%	75%

Luego:

$\therefore$ Pureza media : $\dfrac{80\%n + 75\%(4n)}{5n} = 0,76$

72. En un taller de orfebrería se funde 50 g de oro puro con 450 g de una aleación, la ley de la aleación aumenta en 0,02. Luego la mitad de ésta aleación se funde con x gramos de una aleación de ley 0,910. Si la aleación final tiene 0,850 de ley, entonces x es igual a:

Resolución:

Inicialmente:

Oro puro [50] 1 → [500] L + 0,02 (aumento)

[450] L

$$\Rightarrow \frac{50}{450}=\frac{L+0,02-L}{1-(L+0,02)}$$

⇒ L = 0,800 ley de la aleación

⇒ Se funde la mitad de la aleación:

[250] 0,82 ↘ 0,85 ↗ 0,91 − 0,85 = 0,06

[x] 0,91 ↗ ↘ 0,85 − 0,82 = 0,03

$$\Rightarrow \frac{250}{x}=\frac{0,06}{0,03}$$

∴ Se obtiene: x= 125

73. Queriendo mejorar la ley L de una aleación en un 20% se agregan n gramos, pensando que es metal fino, pero en realidad es metal ordinario. ¿Cuál es la ley de la nueva aleación?

Resolución:

Se deseaba obtener:

aleación [W] L ↘ 120%L ↗ 1 − 1,2 L

oro puro [n] 1 ↗ ↘ 1,2L − L = 0,2L

$$\Rightarrow \frac{w}{n}=\frac{1-1,2L}{0,2L} \quad ...(1)$$

Pero se funde con metal ordinario

$$\text{Ley real}=\frac{WL}{w+n}=\frac{WL}{n\left(\frac{w}{n}+1\right)}=\frac{w}{n}\times\frac{L}{\left(\frac{w}{n}+1\right)}$$

Reemplazando (1):

$$\therefore \text{Ley real}: \left(\frac{1-1,2L}{0,2L}\right)\frac{L}{\left(\frac{1-1,2L}{0,2L}+1\right)}=\frac{L(1-1,2L)}{1-L}$$

74. Se tiene dos lingotes de oro, el primero de 16 quilates, el segundo contiene 210 gramos de oro puro y cierta cantidad de cobre. Se desea preparar una aleación de 30 gramos de 18 quilates, utilizando 12 g del segundo lingote. Entonces, la cantidad de gramos de cobre, en dicho lingote es:

Resolución:

Se desea obtener:

1.° lingote [18] 16 q → [30] 18 q

2.° lingote [12] L

$$\Rightarrow \frac{18}{12}=\frac{L-18}{18-16}$$

Se encuentra: L = 21 quilates

Pero el lingote indicado posee 210 gramos de oro puro:

$$\text{n.° quilates}=\frac{W_{\text{oro puro}}}{W_{\text{total}}}\times 24 \Rightarrow 21=\frac{210}{W_{\text{total}}}\times 24$$

$$\therefore W_{\text{total}}=240\begin{cases}210 \text{ oro puro}\\ 30 \text{ cobre}\end{cases}$$

75. ¿Cuál es la ley obtenida (en quilates) al fundir las siguientes barras: 20 g de oro de 18 quilates; 20 g de oro de 800 milésimas; 30 g al 60% de oro y 30 g de cobre?

Resolución:

1° barra: 20 gramos, 18 quilates

$$L_1=\frac{18\text{ quilates}}{24\text{ quilates}}=0,75$$

2° barra: 20 gramos, L_2 = 0,800

3° barra: 30 gramos, L_3= 0,600

4° barra: 30 gramos, L_4= 0 (cobre)

$$\text{Ley}: \frac{20\times 0,75+20\times 0,8+30\times 0,6+30\times 0}{20+20+30+30}$$

Ley: 0,490

∴ En quilates: n.° quilates: 0,490 × 24 = 11,76

76. A 20 gramos de oro de 16 quilates, se le eleva su ley hasta 20 quilates agregando oro puro. ¿Qué cantidad (en gramos) de cobre será necesario mezclar con este nuevo lingote, para volverlo a su ley original?

Resolución:

[20] 16 q ↘ 20 q ↗ 24 − 20 = 4

oro puro [W] 24 q ↗ ↘ 20 − 16 = 4

$$\Rightarrow \frac{20}{w}=\frac{4}{4} \Rightarrow W=20$$

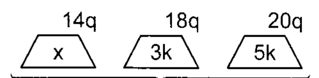
Nuevo lingote [20+20] 20 q ↘ $\underset{\text{ley original}}{16\text{ q}}$ ↗ 16 − 0

Se agrega cobre [x] 0 ↗ ↘ 20 − 16

$$\frac{40}{x}=\frac{16}{4} \quad \therefore x=10$$

77. Se tienen 3 lingotes de oro de 14, 18 y 20 quilates respectivamente, se funden los tres resultados una aleación de 2000 g de 19,2 quilates. Si se sabe que por cada 3 g del segundo se utilizó 5 g del tercero, ¿cuántos gramos se utilizó del primero?

Resolución:



Ley resultante 18,2 q

$\Rightarrow x(14 - 18{,}2) + 3k(18 - 18{,}2) + 5k(20 - 18{,}2) = 0$

Se obtiene $4{,}2x = 8{,}4k \Rightarrow x = 2K$

Peso total: $2000 = \underbrace{x}_{2k} + 3k + 5k$

Luego $k = 200 \quad \therefore\ x = 400$

78. Una aleación de plata y estaño pesan 400 gramos y tiene ley 0,930, se ha obtenido al fundir 2 lingotes de los cuales uno pesa 160 gramos y es de plata pura. Hallar le ley del segundo lingote.

Resolución:

Plata pura 160 100 → 400 0,930

L → Peso: $400 - 160 = 240$

$$\Rightarrow \frac{160}{240} = \frac{0{,}93 - L}{1 - 0{,}93} = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ Resolviendo: $L = 0{,}883$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2001 - I)

Un joyero tiene un lingote de oro de ley 0,900 que pesa 1500 g. ¿Qué cantidad de oro puro (en g) tendrá que añadir al lingote para elevar su ley a 0,925?

A) 350 B) 500 C) 600
D) 750 E) 300

Resolución:

Utilizaremos la propiedad de ganancia igual a la pérdida.

$$1500\text{ g} + x\text{ g} = (1500 + x)\text{g}$$

0,900 1,000 0,925

0,075 0,025

Luego: $0{,}075x = (0{,}025)1500$

$3x = 1500$

$\therefore\ x = 500$

Clave: B

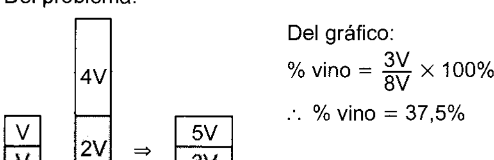
PROBLEMA 2 (UNI 2001 - II)

Dos recipientes contienen vino. El primero tiene vino hasta la mitad y el segundo un tercio de su volumen. Se completan estos recipientes con agua, vertiéndose las mezclas a un tercer recipiente. Sabiendo que la capacidad del segundo recipiente es el triple que el primero, entonces el porcentaje de vino que contiene el tercer recipiente es:

A) 37,0% B) 37,5% C) 38,0%
D) 38,5% E) 39,0%

Resolución:

Del problema:



Del gráfico:

$$\%\text{ vino} = \frac{3V}{8V} \times 100\%$$

$\therefore\ \%\text{ vino} = 37{,}5\%$

Clave: B

PROBLEMA 3 (UNI 2001 - II)

Se tiene dos aleaciones de plata y cobre de distinta ley, mezclando pesos iguales de ambas aleaciones se obtiene una aleación de ley 0,865, y mezclando cantidades de ambas aleaciones que tengan el mismo peso de cobre se obtiene otra de ley 0,880, ¿cuál es la ley primitiva de cada una de las aleaciones?

A) 0,98; 0,89 B) 0,91; 0,82 C) 0,92; 0,91
D) 0,98; 0,82 E) 0,93; 0,91

Resolución:

Primer caso:

$$\frac{WL_1 + WL_2}{2W} = 0{,}865 \Rightarrow L_1 + L_2 = 1{,}73 \qquad \ldots(\alpha)$$

Segundo caso se toma de la primera y segunda aleación W_1 y W_2, respectivamente:

En la primera aleación hay $W_1(1 - L_1)$ de cobre

En la segunda aleación hay $W_2(1 - L_2)$ de cobre

Por dato del problema: $W_1(1 - L_1) = W_2(1 - L_2)$

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{1 - L_2}{1 - L_1}$$

Luego:

$$\frac{W_1L_1 + W_2L_2}{W_1 + W_2} = 0{,}88 \Rightarrow \frac{W_2\left(\frac{W_1}{W_2}L_1 + L_2\right)}{W_2\left(\frac{W_1}{W_2} + 1\right)} = 0{,}88$$

$$\frac{\left(\frac{1 - L_2}{1 - L_1}\right)L_1 + L_2}{\frac{1 - L_2}{1 - L_1} + 1} = 0{,}88 \Rightarrow \frac{(L_1 + L_2) - 2L_1L_2}{2 - (L_1 + L_2)} = 0{,}88$$

$1{,}73 - 2L_1L_2 = (0{,}88)(2 - 1{,}73) \Rightarrow L_1L_2 = 0{,}746$

Entonces:

$L^2 - 1{,}73L + 0{,}746 = 0 \quad \therefore\ L_1 = 0{,}91;\ L_2 = 0{,}82$

Clave: B

PROBLEMA 4 (UNI 2002 - I)

Dos recipientes A y B contienen vino. El recipiente A contiene la mitad de su volumen y B contiene un ter-

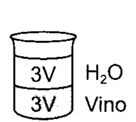
cio de su volumen. Luego, los recipientes se completan con agua vertiéndose las mezclas en un tercer recipiente. Sabiendo que la capacidad de B es el doble que la de A, entonces el porcentaje de vino que contiene la tercera mezcla es:

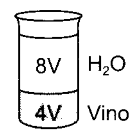
A) $\frac{100}{18}\%$ B) $\frac{300}{18}\%$ C) $\frac{600}{18}\%$

D) $\frac{700}{18}\%$ E) $\frac{1100}{18}\%$

Resolución:

Del problema:





En el tercer recipiente habrá:

$H_2O \Rightarrow 11V$

Vino $\Rightarrow 7V$

$\therefore$ % vino $= \frac{700}{18}\%$

Clave: D

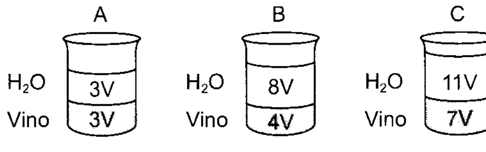
PROBLEMA 5 (UNI 2002 - II)

Dos recipientes A y B contienen vino. El recipiente A está lleno hasta su mitad, el B en un tercio de su volumen. Se completan las capacidades de A y B con agua, vertiéndose las mezclas a un tercer recipiente C. Sabiendo que la capacidad de B es el doble de A, entonces el porcentaje de vino que contiene la mezcla C es aproximadamente:

A) 36% B) 37% C) 38%
D) 39% E) 40%

Resolución:

Graficando:



$\therefore$ Del recipiente C: $\frac{7V}{18V} \times 100\% = 39\%$

Clave: D

PROBLEMA 6 (UNI 2005 - II)

Se quiere preparar 50 litros de vino para venderlo a S/.95 cada litro, ganando S/.5 por cada litro. Para ello se hace una mezcla con vinos de S/.60, S/.70, S/.100 y S/.110 el litro. Si la mezcla debe tener 5 litros del vino de S/.70, la mayor cantidad posible de vino de S/.110 y por lo menos un litro de cada tipo de vino. ¿Cuántos litros de vino de S/.110 el litro se necesita, sabiendo que los volúmenes de las 4 calidades son números enteros?

A) 17 litros B) 21 litros C) 25 litros
D) 29 litros E) 33 litros

Resolución:

Del enunciado del problema:

Cantidad (L)	$a \geq 1$	$b = 5$	$c \geq 1$	$d = ?$
Precio (S/.)	60	70	100	110

El costo de la preparación será: S/.95 − S/.5 = S/.90

$$\Rightarrow \frac{60a + 70(5) + 100c + 110d}{50} = 90$$

$\Rightarrow 6a + 10c + 11d = 415$ ...(I)

También: $a + 5 + c + d = 50$

$\Rightarrow a + c + d = 45$ ...(II)

(I) − 6 × (II): $4c + 5d = 145$

$\downarrow \quad \downarrow$

$5 \quad 25$ (máximo)

$\therefore$ Se necesita 25 litros de vino de S/.110

Clave: C

PROBLEMA 7 (UNI 2006 - I)

Se ha mezclado tres sustancias de densidades: a g/cm^3, b g/cm^3 y c g/cm^3, y cuyas masas son: A g, B g y Cg, respectivamente, donde $b < c < a$ y $B < A < C$. Entonces la densidad de la mezcla obtenida, en g/cm^3, es:

A) $\frac{(A+B+C)abc}{bcA+acB+abC}$ B) $\frac{(A+B-C)abc}{bcA+acB+abC}$

C) $\frac{(A+B+C)abc}{bcA+acB+abC}$ D) $\frac{(A+B+C)abc}{abA+bcB+acC}$

E) $\frac{(A+B+C)abc}{acA+baB+cbC}$

Resolución:

Con los datos del problema: Sustancia X: a g/m^3; A g
Sustancia Y: b g/m^3; B g
Sustancia Z: c g/m^3; C g

Definiendo la densidad: $V = \frac{m}{\rho}$ ...(β)

Luego, la densidad de la mezcla: $\rho_{total} = \frac{m_{total}}{V_{total}}$ ...(α)

Finalmente: total de masas: $A + B + C$

total de densidades: $\frac{A}{a} + \frac{B}{b} + \frac{C}{c}$

De (α): $\frac{A+B+C}{V_x + V_y + V_z}$

De (β): $\therefore \rho_{total} = \frac{A+B+C}{\frac{A}{a}+\frac{B}{b}+\frac{C}{c}} = \frac{(A+B+C)abc}{bcA+acB+abC}$

Clave: C

PROBLEMA 8 (UNI 2011 - I)

Se funden 450 g de una aleación con 50 g de oro puro y se observa que la ley de oro se incrementa en 0,02 con respecto de la ley inicial. ¿Cuál es la ley de la aleación inicial?

A) 0,800 B) 0,850 C) 0,880
D) 0,0890 E) 0,0900

Resolución:

Sean:

	Pesos	Leyes
Aleación	450 g	L
Au (puro)	50	1
	500 g	L + 0,02

$$\Rightarrow L + 0{,}02 = \frac{450(L) + 50(1)}{500}$$

$\therefore$ L = 0,800

Clave: A

PROBLEMA 9 (UNI 2011 - II)

¿Qué cantidad de desinfectante (en litros) al 80% se debe mezclar con 80 litros del mismo desinfectante al 50% para obtener un desinfectante al 60%?
Indique además el porcentaje de desinfectante al 50% en la solución final.

A) 40 y 33,33% B) 40 y 66,67% C) 60 y 33,33%
D) 60 y 66,67% E) 66,67 y 60%

Resolución:

$$\underset{80\%}{nL} + \underset{50\%}{80L} = \underset{60\%}{(n + 80)L}$$

$$60 = \frac{80n + 50 \times 80}{n + 80}$$

$$3(n + 80) = 4n + 50 \times 4$$

$$3n + 240 = 4n + 200$$

$$\therefore n = 40$$

Además:

$\therefore$ % de desinfectante al 50%: $\frac{80}{120} \times 100\% = 66{,}67\%$

Clave: B

PROBLEMA 10 (UNI 2014 - I)

Si una cadena de 16 quilates cuyo peso de metal ordinario es 32 gramos se funde con un lingote de oro de 104 gramos con ley 0,65. De cuántos quilates es la aleación obtenida.

A) 0,651 B) 0,658 C) 15,600
D) 15,792 E) 34,442

Resolución:

Del enunciado

Ley = (0,65)(24) = 15,6

Ley	16	15,6	L_m
Masa	96 g	104 g	200 g

Ley = 16

$$\frac{m_{oro}}{m_{oro} + 32} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3} \Rightarrow m_{oro} = 64$$

Hallando la ley media

$$\therefore L_m = \frac{16(96) + 15{,}6(104)}{200} = 15{,}792$$

Clave: D

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Un comerciante quiere mezclar 3 tipos de trigo de S/.2,5; S/.3,0 y S/.3,6 el kg respectivamente. ¿Cuánto habrá de utilizar del primer tipo, si se desea obtener una mezcla de 240 kg que pueda vender a S/.3,75 el kg ganando en ello el 20%, si las cantidades de los dos primeros están en la relación de 3 a 4?

A) 75 kg B) 120 kg C) 60 kg
D) 90 kg E) 72 kg

2. Se han mezclado 180 kg de una sustancia a S/.2,4 el kg con otra cuyo peso representa el 25% del peso total y se ha obtenido como precio medio S/.2,28. ¿Cuál es el precio por kg de esta última sustancia?

A) S/.1,80 B) S/.1,82 C) S/.1,90
D) S/.1,92 E) S/.1,95

3. Se mezclan dos clases de avena en la proporción de 1 a 2 y la mezcla se vende con el 5% de beneficio. Después se mezclan en la proporción de 2 a 1 y la mezcla se vende con el 10% de beneficio. ¿En qué relación se encuentran los precios unitarios de las dos clases de avena, sabiendo que ambos precios de ventas son iguales?

A) 15 a 19 B) 19 a 22 C) 20 a 23
D) 21 a 25 E) N. A.

4. Se han mezclado dos tipos de vinos de S/.20 y S/.27 y se han obtenido 350 litros que se vendieron por S/. 8400, sin ganar ni perder. ¿Cuántos litros entró más de uno que del otro?

A) 40 lts B) 45 lts C) 50 lts
D) 55 lts E) 60 lts

5. Se mezclaron dos tipos de avena de S/.4 y S/.7 el kg y se han obtenido 240 kg que se vendieron por S/.1440, ganando el 25% de su costo. Hallar la proporción de la mezcla.

A) 9 a 5 B) 8 a 5 C) 11 a 4
D) 10 a 7 E) 9 a 4

6. Se han mezclado 150 galones de lubricantes de S/.20 el galón con otro cuyo peso representa el 70% de la mezcla total y se ha obtenido como precio medio S/.17,2. ¿Cuál es el precio por galón de esta última sustancia?

A) S/.16 B) S/.16,5 C) S/.16,8
D) S/.17 E) S/.15,8

7. Se han mezclado dos cantidades de un mismo ingrediente, cuyos precios por litro son S/.15 y S/. 24; y el precio medio de la mezcla con un 10% de ganancia es de S/.19,80, si la mezcla es de 300 L, ¿qué cantidad de cada ingrediente en litros se debe tener?

A) 200; 100 B) 120; 180 C) 140; 160
D) 150; 150 E) N. A.

8. Se han mezclado dos tipos de arroz cuyos precios por kg son S/.2 y S/.3 respectivamente. Se sabe además que del más barato han entrado 40 kg más que del más caro. Hallar la cantidad total de la mezcla, sabiendo que tiene un precio medio de S/.2,3 el kg.

A) 100 kg B) 190 kg C) 180 kg
D) 160 kg E) 120 kg

9. Se mezclan tres calidades de maíz cuyas cantidades están en la relación 2; 3 y 5 de precios por kg S/.5; S/.8 y S/.7 respectivamente. Hallar el precio de venta del kg de mezcla, si se desea ganar el 20% del costo.

A) S/.7,28 B) S/.7,9 C) S/.8,28
D) S/.6,9 E) N. A.

10. Se tiene una solución al 24% de sal y otra al 4% de sal, para obtener un litro de solución al 8% de sal. ¿Qué volumen de la primera deberá considerarse?

A) 1/3 L B) 2/3 L C) 1/5 L
D) 2/5 L E) 1/6 L

11. Se tiene 3 botellas de H_2SO_4 al 30%; 40% y 20% respectivamente. Si se mezclan en la proporción de 5; 7 y 8 ml, determinar qué porcentaje de concentración de ácido se obtendrá.

A) 28% B) 29,5% C) 30,5%
D) 31,5% E) 26,5%

12. Un comerciante tiene vino de S/.18 el litro, le agrega una cierta cantidad de agua y obtiene una mezcla de 120 litros que la vende en S/.2070. Si en esta venta gana el 20% del precio de venta. ¿Cuántos litros de agua contiene la mezcla?

A) 16 B) 28 C) 10
D) 34 E) 48

13. Se quiere llenar un tonel de 420 litros con 3 clases de vinos, da S/.24; S/.28 y S/.30 el litro y cierta cantidad de agua, pero poniendo 1 litro de agua por cada 20 litros de vino, y de ese, 1 litro de S/.24 por cada 3 de S/.28, sabiendo que se quiere ganar S/.2100, vendiendo la mezcla a S/.32 el litro. ¿Cuánto vino de S/.30 habrá de ponerse?

A) 55 L B) 80 L C) 60 L
D) 180 L E) 90 L

14. Se realiza una mezcla de vino de S/.7 el litro y de S/.6 el litro con agua; cada litro de mezcla cuesta S/.5; si la cantidad de agua es los 2/5 de la cantidad de vino de S/.6, ¿en qué relación está la cantidad de agua a la cantidad de vino de S/.7?

A) 1/2 B) 3/5 C) 4/5
D) 5/4 E) 5/3

15. Un comerciante tiene dos tipos de vino, uno de S/.5,5 el litro y otro de S/.4 el litro. ¿Cuántos litros del segundo se deberán mezclar con 24 litros del primero para que agregando 1 litro de agua por cada 5 litros de esa mezcla se obtenga otra mezcla que cueste S/.3 la botella de 0,75 litros?

A) 66 B) 45 C) 30
D) 21 E) 18

16. Se mezcla café de $1,6 y $2,4 por kilogramo obteniendo un total de 50 kg de café que deberá venderse ganando $28 lo cual representa el 25% del precio de venta. Hallar las cantidades que se mezclaron inicialmente.

A) 10 y 40 B) 15 y 35 C) 5 y 45
D) 18 y 32 E) N. A.

17. Un comerciante vende una mezcla de 3 sustancias formada por 66 litros de S/.35 el litro; 165 litros de S/.24 el litro y 209 litros de S/.20 el litro. Si al vender 124 litros de la mezcla recibe S/.3534, ¿cuántos litros debe vender para ganar S/.646?

A) 92 B) 144 C) 136
D) 125 E) 132

18. Se han mezclado 180 kg de una sustancia a S/.12 el kg con otra cuyo peso representa el 25% del peso total de la mezcla y se ha obtenido como precio promedio S/.11,4. ¿Cuál es el precio por kg de esta última sustancia?

A) S/.9,0 B) S/.9,10 C) S/.9,50
D) S/.8,75 E) S/.9,60

19. Se han mezclado dos tipos de vinos de S/.12 y S/.18 el litro y se han obtenido 480 litros que se vendieron por S/.7680, sin ganar ni perder. ¿Cuántos litros se empleó de S/.18?

A) 240 L B) 180 L C) 200 L
D) 160 L E) 320 L

20. Un comerciante desea obtener 180 L de vinagre de S/.4 el litro, mezclando cantidades convenientes de dos calidades, cuyos precios por litro son S/.3,6 y S/.4,2. Hallar la diferencia entre las cantidades de los dos tipos de vinagre que se han mezclado.

A) 40 L B) 60 L C) 50 L
D) 70 L E) 80 L

21. Se tiene 3 ingredientes A, B y C, cuyo costo por litro es S/.2; S/.5 y S/.10 respectivamente. Si dichos ingredientes se mezclan se obtiene que cada litro de la nueva mezcla es S/.3; si se mezclan en total 330 L, ¿cuántos litros de A intervinieron?

A) 150 L B) 100 L C) 210 L
D) 270 L E) 240 L

22. Un campesino tiene 360 kg de dos clases de trigo; una de S/.7,2 el kg y la otra de S/.9,6 el kg; los mezcla en la proporción de 5 a 3 y vende a S/.12,15 el kg de mezcla. ¿Qué porcentaje está ganando?

A) 20% B) 30% C) 40%
D) 50% E) N. A.

23. Se mezcla vinos de S/.3; S/.4,1 y S/.5,2 el litro. Si la cantidad que existe del primer ingrediente es el 50% de la del segundo ingrediente y lo que hay en este es el 25% de la cantidad del tercer ingrediente. ¿A cómo se debe vender el litro de mezcla para ganar el 20% de la venta?

A) S/.5,76 B) S/.6,4 C) S/.6,0
D) S/.4,8 E) N. A.

24. Se quiere llenar un tonel de 630 litros con 3 clases de vino de 12; 14 y 15 soles el litro y cierta cantidad de agua, pero poniendo 1 litro de agua por cada 20 litros de vino y de éste un litro de S/.12 por cada 3 de S/.14. Sabiendo que se quiere ganar 1575, vendiendo la mezcla a S/.16 el litro, ¿cuánto vino de S/.15 habrá de ponerse?

A) 400 L B) 500 L C) 240 L
D) 75 L E) 270 L

25. Se desea obtener 660 litros de vino de 2,2 soles el litro, mezclando vinos de 21; 27,50 y 19 soles el litro, pero colocando de la tercera clase solamente 1/10 de la suma de los litros de los vinos de las otras clases. ¿Cuántos litros de S/.27,50 deben tomar?

A) 120 B) 240 C) 360
D) 480 E) N. A.

26. Se tiene 60 litros de una solución de H_2SO_4 al 40% de pureza. ¿Qué cantidad de agua debe agregarse para que sólo quede el 30% de pureza?

A) 24 L B) 40 L C) 36 L
D) 30 L E) 20 L

27. Se tiene 20 litros de vino, se le añade 5 litros de agua y un litro de esa mezcla pesa 985 g. ¿Cuántos gramos pesará un litro de la mezcla si le añadimos 5 litros más de agua?

A) 914,2 B) 987,5 C) 970,4
D) 980,4 E) N. A.

28. ¿Cuántos litros de vino de S/.7,3 es necesario mezclar con 30 y 20 litros de S/.1,5 y S/.4,5 el litro respectivamente, sabiendo que cada litro de la mezcla debe venderse en S/.5,35 ganando el 7%?

A) 48 B) 60 C) 46
D) 50 E) N. A.

29. Se mezcla trigo de S/.16 y S/.24 por kg, obteniéndose una mezcla de 50 kg de trigo que deberá venderse, ganando S/.28 lo cual representa ser el 25% del precio de la venta. Hallar las cantidades que se mezclaron inicialmente.

A) 40 y 10 B) 24 y 26 C) 45 y 5
D) 35 y 15 E) 30 y 20

30. Se hace una mezcla de vino de S/.70 el litro y de S/.60 el litro, con agua; la mezcla tiene un precio de S/.50. Se sabe que la cantidad de agua es los 2/5 de la cantidad de vino de S/.60. ¿En qué relación están la cantidad de vino de S/.70 y de S/.60?

A) 0,125 B) 2,00 C) 0,50
D) 0,25 E) 0,625

31. Se vendió por S/.7710 un tonel de vino de 220 litros que es una mezcla de otros 2 que valen S/.41 y S/.29 el litro. ¿Cuántos litros de la primera clase de vino contiene el tonel si se ha logrado en la venta un beneficio de S/.1000?

A) 22,5 B) 25 C) 27,5 D) 28 E) 24

32. Se tomó cuatro clases de trigo de precios: S/.10; S/.9; S/.12 y S/.13 el kg respectivamente. Si cada kg de la mezcla cuesta S/.11, calcula la diferencia de kilogramos que se tomó del primero y el tercero, si la diferencia del cuarto y segundo es 14 kg.

A) 28 B) 18 C) 12 D) 32 E) 16

33. Un comerciante mezcla dos clases de café, una le cuesta S/.18 el kg y la otra S/.24 el kg; vende 60 kg de esta mezcla en S/.1444,8 y gana el 12% del precio de compra. ¿Qué cantidad de café interviene de cada clase de los 60 kg?

A) 18 kg y 42 kg B) 20 kg y 40 kg
C) 25 kg y 35 kg D) 15 kg y 45 kg
E) 22 kg y 38 kg

34. Un comerciante tiene vino de S/.6 el litro, le agrega una cierta cantidad de agua y obtiene una mezcla de 60 L que lo vende en S/.351. Si en esta venta gana el 30% del costo, indicar qué porcentaje del total de la mezcla es agua.

A) 15% B) 20% C) 25%
D) 30% E) 35%

35. Se tiene 3 ingredientes A, B y C cuyo costo por litro es S/.2; S/.5 y S/.10 respectivamente. Si dichos ingredientes se mezclan, se obtiene que cada litro de la nueva mezcla es S/.3; si se mezclan en total 330 litros, ¿cuántos litros de A intervienen?

A) 250 L B) 260 L C) 290 L
D) 280 L E) 270 L

36. Se tiene tipos de aceite en igual cantidad, cuyos precios son S/.3; S/.4 y S/.5 por litro. Si se extraen 4; 1 y 1 litros de ellos respectivamente, al mezclar las cantidades restantes se obtiene aceite de S/.4,05 el litro. ¿Cuál era la cantidad común inicial?

A) 18 L B) 22 L C) 26 L
D) 30 L E) 34 L

37. Un kg de cereal de primera y 1 kg de cereal de segunda cuestan juntos S/.26. Se mezclan 10 kg de primera con 20 kg de segunda. Si se hubiera mezclado 20 kg de primera con 10 kg de segunda el precio hubiera sido S/.2 mayor. ¿Cuál es el precio del kg del cereal de primera?

A) S/.10 B) S/.12 C) S/.14
D) S/.16 E) S/.18

38. Un comerciante quiere mezclar 3 tipos de vinagre de S/.2,5; S/.3,0 y S/.3,6 el litro respectivamente. ¿Cuánto habrá de utilizar del primer tipo, si se desea obtener una mezcla de 240 litros que pueda vender a S/.3,75 el litro ganando en ella el 20%, si los volúmenes de los 2 primeros tipos están en relación de 3 a 4?

A) 60 L B) 80 L C) 90 L
D) 65 L E) 70 L

39. Se han mezclado 60 kg de maíz de S/.5 el kg con otro cuyo peso representa el 25% del total, y se ha obtenido como precio medio S/.4,75. ¿Cuál es el precio del kilogramo del segundo tipo de maíz?

A) S/.4,8 B) S/.4,6 C) S/.4,4
D) S/.4,2 E) S/.4

40. Se realiza una mezcla de vinagre de S/.7 el litro y de S/.6 el litro con agua; cada litro de mezcla cuesta S/.5; si la cantidad de agua es los 2/5 de la cantidad de vinagre de S/.6, ¿en qué relación está la cantidad de agua a la cantidad de vinagre de S/.7?

A) 0,9 B) 0,8 C) 0,75
D) 0,5 E) 0,25

41. Una persona dispone para la venta diaria 200 L de leche que compró a $0,70 el litro; agrega 20 litros de agua y después de vender 100 litros de la mezcla a $0,90 añade 20 litros más de agua que la vende al mismo precio. Dígase la ganancia por litro de leche pura.

A) $0,20 B) $0,25 C) $0,28
D) $0,30 E) $0,38

42. Se han mezclado vinos de 8 y 7 soles el litro y se han obtenido 2500 litros que se vendieron por 18 500 soles, sin ganar ni perder. ¿Cuántos litros se tomó de 8 soles?

A) 1000 L B) 1200 L C) 1 500 L
D) 1800 L E) N. A.

43. Dos clases de vinos se han mezclado en los depósitos A y B. En el depósito A la mezcla será en la proporción de 2 a 3 y en el depósito B la proporción de la mezcla es de 1 a 5. ¿Qué cantidad de vino debe extraerse de cada depósito para formar otra mezcla que contenga 7 litros de la primera clase y 21 litros de la segunda clase?

A) 12 y 16 B) 10 y 18 C) 13 y 15
D) 14 y 14 E) N. A.

44. Se tiene 3 recipientes de igual capacidad que contienen inicialmente alcohol puro; el primero 10 L; el segundo 35 L y el tercero la mitad de su capacidad. Si se completan con agua hasta el tope los 3 recipientes, ocurre que el grado del tercero es igual al grado medio que se obtendría al mezclar los otros dos. ¿Cuánto se agregó de agua en total?

A) 62,5 L B) 64 L C) 66 L
D) 67,5 L E) 68 L

45. Se mezclan 20 litros y 30 litros de alcohol con 10° y 20° de pureza respectivamente. Si se toma el 50% de la mezcla resultante y es mezclado con 25 litros de alcohol puro, calcular el grado de esta nueva mezcla resultante.

A) 50° B) 52° C) 54° D) 56° E) 58°

46. ¿Cuántos litros de alcohol de 60°; 75° y 80° se deben mezclar para obtener 10 litros de 69°? Sabiendo que del primero hay el triple del volumen que el tercero, ¿qué cantidad del segundo entra en la mezcla?

A) 2,5 L B) 3 L C) 6 L
D) 4 L E) 4,5 L

47. Se quiere obtener 100 L de alcohol de 74°, mezclando 30 L de alcohol de 80° con cantidades convenientes de alcohol puro y agua, pero por error estas cantidades se intercambian. ¿Cuál será el grado de la mezcla resultante?

A) 40° B) 44° C) 48° D) 52° E) 56°

48. Se tienen 2 mezclas alcohólicas de 60° y 80°, de la primera se toma 1/4 y se mezclan con 1/5 del otro obteniéndose alcohol de 65°. ¿Cuál será la pureza del alcohol que resulta al mezclar los contenidos restantes?

A) 76,5° B) 66,8° C) 65°
D) 67° E) 66,153°

49. Se mezclan pisco de 60°; 48° y 42° en cantidades iguales. Si a esta mezcla se le agrega 91 litros de agua, se obtiene un pisco adulterado de 36° que se vende a S/.30 la botella de litro. Determinar el ingreso total por la venta del pisco adulterado.

A) S/.9550 B) S/.9600 C) S/.9650
D) S/.9700 E) S/.9750

50. Se han mezclado 50 litros de alcohol de 96° de pureza, con 52 litros de alcohol de 60° de pureza y 48 litros de otro alcohol. ¿Cuál es la pureza de este último alcohol, si los 150 L de mezcla tienen 80° de pureza?

A) 84° B) 78° C) 72°
D) 85° E) 87°

51. Un depósito contiene 80 litros de alcohol de 81,25° se sacan 32 litros de mezcla alcohólica y luego se reemplazan por agua. ¿De cuántos grados es la mezcla resultante?

A) 48,75° B) 50° C) 52,25°
D) 64° E) 45°

52. Se mezclan "a" litros de alcohol de 30° y cuyo costo por litro es de S/.15 con "b" litros de alcohol de 55° y cuyo costo por litro es de S/.25. Calcular el costo de un litro de la mezcla, sabiendo que por cada 5 litros de esta, 2 son de alcohol puro.

A) 18 soles B) 19 soles C) 20 soles
D) 24 soles E) 25 soles

53. Se mezclan 40 litros de alcohol de 80° con 20 litros de alcohol de 60° y para que la mezcla resulte de 40° se agrega cierta cantidad de agua. ¿Qué cantidad de agua se agregó?

A) 50 L B) 60 L C) 70 L
D) 80 L E) 90 L

54. Un depósito de 80 litros contiene 55 litros de alcohol y el resto de agua. Si se retiran 16 litros de la mezcla y se reemplaza por alcohol, ¿cuál es la relación entre el porcentaje de alcohol en la primera mezcla y el de la segunda mezcla?

A) 12/17 B) 17/9 C) 11/12
D) 13/15 E) N. A.

55. Se mezclan vinos de 10%; 15% y 30% de contenido alcohólico. Si las cantidades que entran son proporcionales a 3; 2 y 1 respectivamente, calcular el volumen del vino de 10% de contenido alcohólico que entró en la mezcla, si al agregar 120 litros de agua a la mezcla se observó que el contenido alcohólico al final era del 5%.

A) 24 B) 30 C) 36
D) 21 E) N. A.

56. Se tiene 540 litros de vino de 90% y se mezclan con 810 litros de vino de 72%. Hallar la cantidad de agua que debe agregarse a la mezcla para obtener otra que sea 60% de contenido de vino.

A) 810 L B) 640 L C) 320 L
D) 864 L E) 432 L

57. Para obtener 80 L de alcohol de 78,75° se han mezclado 10 L de alcohol de 60°; 40 L de alcohol de 80° y ciertas cantidades de alcohol puro con alcohol de 50°. Determinar cuántos litros de alcohol puro se echó a la mezcla.

A) 20 L B) 25 L C) 28 L
D) 30 L E) 32 L

58. Se mezclan cantidades iguales de vino de 12%; 24% y 72% de contenido alcohólico, se le agregan 100 litros de agua y resulta vino de 27% de contenido alcohólico. ¿Cuál es el volumen de la mezcla?

A) 100 L B) 400 L C) 300 L
D) 200 L E) 350 L

59. En una mezcla alcohólica de 240 L donde el volumen de agua es el 60% del volumen de alcohol puro, ¿cuántos litros de alcohol puro se debe agregar a la mezcla para obtener una mezcla alcohólica de 80°?

A) 200 L B) 210 L C) 230 L
D) 220 L E) 240 L

60. Con alcohol de 40°; 30° y 20° se quiere obtener 60 litros de alcohol de 25°. Si en la mezcla han de entrar de 40° la cuarta parte de la de 20°, ¿cuántos litros entrará de 30°?

A) 10 B) 40 C) 30
D) 35 E) 15

61. Se mezclan cantidades iguales de vino de 12%; 24% y 72% de contenido alcohólico. Se le agregan 100 litros de agua y resulta vino de 18% de contenido alcohólico. ¿Cuál es el volumen total de la mezcla final?

A) 200 L B) 250 L C) 300 L
D) 350 L E) 400 L

62. Un metal fino A y un metal ordinario B tienen 18,5 y 17,5 de peso específico respectivamente. ¿Cuál será la ley de una aleación de los metales A y B que tengan 18,3 de peso específico?

A) 148/183 B) 135/251 C) 0,87
D) 5/7 E) 0,75

63. Si se funden 50 g de oro con 450 g de una aleación, la ley de aleación aumenta 0,02. ¿Cuál era la ley de la aleación primitiva?

A) 0,4 B) 0,8 C) 0,5 D) 0,45 E) 0,75

64. Habiendo agregado 30 g de oro puro a una aleación de oro de 18 quilates, que pesa 30 g, ¿qué ley de oro se obtendrá expresada en quilates?

A) 20 B) 21 C) 21,5
D) 22 E) 22,5

65. Calcular la masa de un lingote de oro de ley 0,720, si añadiendo a éste 300 g de oro de ley 0,880 y luego 55 g de ley 0,584 se obtiene una aleación de ley 0,800.

A) 125,5 g B) 151,5 g C) 175,5 g
D) 145,5 g E) 162,5 g

66. Se tienen 2 lingotes de oro de 0,950 y 0,885 de ley. ¿Cuál es el exceso en gramos de la cantidad que hay que tomar de uno de ellos con respecto a la cantidad que hay que tomar del otro, para obtener 910 gramos de oro de 0,900 de ley?

A) 490 g B) 480 g C) 470 g
D) 460 g E) 450 g

67. A 20 g de oro de 18 quilates se eleva su ley hasta 21 quilates agregando oro puro. ¿Qué peso de cobre será necesario, alear con este nuevo lingote, para volverlo a su ley original?

A) $6\frac{1}{3}$ g B) $6\frac{2}{3}$ g C) 6 g
D) $7\frac{1}{4}$ g E) $7\frac{2}{3}$ g

68. Se tienen 2 barras de oro, en la primera el 80% del peso total es oro, en la segunda el 75% de su peso es oro, siendo ésta el doble de la anterior. Si se funden, ¿qué pureza resulta para el oro?

A) 0,775 B) 0,825 C) 0,766
D) 0,772 E) 0,780

69. Se tienen 3 aleaciones: la primera pesa 3 kg y tiene 0,9 de ley, las otras 2 tienen leyes 0,8 y 0,6, y sus pesos son proporcionales a 3 y 5. Hallar los pesos de las 2 últimas aleaciones, sabiendo que la aleación resultante tiene 0,7 de ley.

A) 9 y 15 B) 6 y 10 C) 12 y 20
D) 7 y 12 E) 4 y 7

70. Se tienen 3 lingotes de oro y cobre cuyas leyes son 0,925; 21 quilates y 18 quilates y se desea fundirlos de tal manera que se obtengan 116 gramos de oro de 0,8 de ley y que el segundo entre una vez y media lo que entró del primero. ¿Cuánto entrará del tercero?

A) 76 g B) 24 g C) 16 g D) 40 g E) 60 g

71. Se tienen 2 lingotes de plata y cobre de leyes 0,600 y 0,900. El primero pesa 360 g y excede en 120 g al segundo. Luego de fundir ambos lingotes, su ley resultante es:

A) 0,700 B) 0,680 C) 0,720
D) 0,750 E) 0,675

72. Se tiene una aleación de oro que pesa 72 g y de 15 quilates. ¿Cuántos gramos de oro puro, se deben alear, para que su nueva ley sea 18 quilates?

A) 27 g B) 45 g C) 28 g
D) 36 g E) N. A.

73. Se ha mezclado 240 g de oro con 36 g de Cu para bajar su ley a 800 milésimos. ¿Qué peso de oro de 980 milésimas es necesario adicionar a esta mezcla para que el oro retome a su ley primitiva?

A) 640 B) 620 C) 560
D) 552 E) 540

74. Carlos le deja a un joyero una cadena de 16 quilates con el encargo de que lo funda y le haga una pulsera de 18 quilates. El joyero hace sus cálculos y le responde que empleará 20 g de oro puro adicional. ¿Cuánto pesa la cadena en gramos?

A) 40 g B) 60 g C) 70 g
D) 45 g E) 80 g

75. ¿Qué cantidad de cobre debe añadirse a la barra de plata que pesa 635 g y tiene 0,92 de ley, para que resulte una aleación de 0,835 de ley?

A) 68,25 B) 46,44 C) 35,36
D) 65,24 E) 64,64

76. Se tiene dos tipos de metales cuyos precios unitarios son S/.6 y S/.9 el gramo y se han fundido en la proporción de 3 a 7. Hallar el precio de venta de 24 gramos de esta mezcla sabiendo que al fundirlos ha habido una merma del 4% y que se ha vendido con una ganancia del 20%.

A) 216 B) 224 C) 243
D) 250 E) 251

77. Se dispone de lingotes de leyes 650; 700 y 800 milésimos. ¿Qué peso se debe tomar del primer lingote para obtener una aleación de 755 milésimos de ley y de 1 kg de peso con la condición que del tercer lingote entre doble peso que del segundo?

A) 100 g B) 200 g C) 300 g
D) 600 g E) N. A.

78. Se tienen 2 lingotes de plata de leyes 0,950 y 0,885 respectivamente. ¿Qué relación debe tener las cantidades que deben tomarse de cada uno para tener un lingote de ley 0,900?

A) 1 a 2 B) 2 a 5 C) 3 a 7
D) 2 a 9 E) 3 a 10

79. Un aro de 36 g de peso está hecho de oro de 18 quilates. ¿Cuántos gramos de oro puro se deberá agregar al fundirlo para hacer unos anillos de 22 quilates?

A) 108 B) 36 C) 72
D) 30 E) 54

80. Se funde 4 barras de plata de ley 0,750 sabiendo que cada una pesa 170 gramos. ¿Qué peso de plata pura habrá que agregar para obtener una aleación de ley 0,900?

A) 1000 g B) 1200 g C) 680 g
D) 1360 g E) 1020 g

81. Se tiene una aleación de oro de 20 quilates, que contiene 7,5 g de cobre y el resto es de oro puro. ¿Qué cantidad de oro puro se le debe quitar para que la relación entre la cantidad del oro puro y cobre se invierta?

A) 24 g B) 16 g C) 18 g
D) 30 g E) 36 g

82. A 20 g de oro de 18 quilates, se le eleva su ley hasta 21 quilates agregando oro puro. ¿Qué peso de cobre será necesario mezclar con este nuevo lingote, para volverlo a su ley original?

A) 5,55 g B) 7,77 g C) 8,88 g
D) 8,67 g E) 6,6 g

83. Un joyero tiene 25 g de oro de 900 milésimos y quiere convertirlo en oro de 750 milésimas. ¿Qué cantidad de metal ordinario deberá alear?

A) 2 g B) 3 g C) 5 g
D) 6 g E) 7 g

84. Una aleación de plata y estaño pesa 200 g y tiene ley 0,970, se ha obtenido al fundir 2 lingotes de los cuales uno pesa 80 g y es de plata pura. Hallar la ley que tiene el segundo lingote.

A) 0,960 B) 0,925 C) 0,935
D) 0,950 E) 0,975

85. Se tiene 56 g de oro de ley 0,93 y se desea mejorar ésta en 0,03 mezclándole con oro puro. Al final de este proceso, ¿cuántos gramos de mezcla se tendrá?

A) 98 g B) 45 g C) 47 g
D) 48 g E) 89 g

86. Se hace una aleación con 2 barras de plata de 18 kg y 0,820 de ley y 12 kg con 0,720 de ley. Encontrar la ley de una tercera barra sabiendo que tiene 9 kg de plata y que al ligarse con la aleación anterior da una barra de 0,675 de ley.

A) 0,100 B) 0,200 C) 0,500
D) 0,700 E) 0,325

87. Se fundió 2 barras de oro de 12 quilates y 20 quilates respectivamente; obteniéndose 48 g de 15 quilates. ¿Qué peso de metal corriente tenía la segunda barra?

A) 5 g B) 3 g C) 12 g D) 2 g E) 1 g

88. ¿Qué cantidad de cobre habrá que añadir a una barra de plata de 4,4 kg cuya ley es 0,92 para que esta disminuya a 0,88?

A) 0,1 kg B) 0,2 kg C) 0,3 kg
D) 0,4 kg E) 0,5 kg

89. Se tiene 2 barras de oro, en la primera el 80% del peso total es oro, en la segunda cuyo peso es el doble del anterior, el 75% del peso total es oro; si se funden ambas barras, ¿de cuántos quilates resulta la aleación de las 2 barras?

A) 0,40 B) 0,80 C) 0,50
D) 0,45 E) 0,76

90. Una aleación de plata y cobre pesa 140 g y tiene una ley de 0,920; se ha obtenido de fundir juntos 2 lingotes, de los cuales uno pesa 60 g y es plata pura. Hallar la ley del segundo lingote.

A) 0,840 B) 0,860 C) 0,870
D) 0,880 E) 0,900

CLAVES

1. C	13. D	25. A	37. D	49. E	61. A	73. D	85. A
2. D	14. C	26. E	38. A	50. D	62. A	74. B	86. E
3. C	15. D	27. B	39. E	51. A	63. B	75. E	87. B
4. C	16. C	28. D	40. B	52. B	64. B	76. B	88. B
5. C	17. C	29. C	41. E	53. A	65. B	77. A	89. E
6. A	18. E	30. C	42. A	54. C	66. A	78. E	90. B
7. A	19. E	31. C	43. B	55. B	67. B	79. C	
8. A	20. B	32. C	44. D	56. E	68. C	80. E	
9. C	21. D	33. C	45. E	57. B	69. A	81. E	
10. C	22. D	34. C	46. D	58. B	70. A	82. E	
11. B	23. A	35. C	47. B	59. B	71. C	83. C	
12. B	24. E	36. C	48. E	60. A	72. D	84. D	

Estadística

Joseph-Louis de Lagrange nació en Turín (25 de enero de 1736) y murió en París (10 de abril de 1813). Fue un físico, matemático y astrónomo francoitaliano que después vivió en Prusia y Francia. Lagrange trabajó para Federico II de Prusia, en Berlín, durante veinte años. Demostró el teorema del valor medio, desarrolló la mecánica Lagrangiana y tuvo una importante contribución en astronomía.

Fue el más joven de once y el único que alcanzó la edad adulta. Fue educado en la Universidad de Turín y no fue hasta los 17 años que mostró interés por la matemática. Cuando tenía solo diecinueve años envió una carta a Leonhard Euler en la cual resolvía un problema —que había sido un asunto de discusión durante más de medio siglo— mediante una nueva técnica: el cálculo de variaciones.

En 1758, con ayuda de sus alumnos, Lagrange fundó una sociedad que más tarde se denominó la Academia Turinesa de Ciencias. La mayor parte de sus primeros trabajos se encuentran en los cinco volúmenes de los registros de la Academia, conocidos usualmente como Miscellanea Taurinensia. Algunos de sus artículos iniciales tratan sobre el tema de la teoría de números. Hay también numerosos artículos sobre varios puntos de Geometría analítica. Contribuyó al cálculo de diferencias finitas con la fórmula de interpolación que lleva su nombre.

Fuente: Wikipedia

DEFINICIÓN

Es la ciencia que nos proporciona un conjunto de métodos y procedimientos destinados a recopilar, organizar, clasificar, presentar, reunir y analizar datos, tanto para la deducción de conclusiones como para tomar decisiones.

CLASIFICACIÓN DE LA ESTADÍSTICA

La estadística puede clasificarse en:
Estadística Descriptiva y Estadística Inferencial.

Estadística Descriptiva

Se denomina así, al conjunto de métodos estadísticos que se relacionan con el resumen y descripción de los datos, como tablas, gráficos y el análisis mediante algunos cálculos.

Estadística Inferencial

Se denomina así, al conjunto de métodos con los que se hace la generalización a la inferencia sobre una población utilizando una muestra.

DEFINICIONES PREVIAS

Población:

Es la totalidad de elementos del conjunto estudiado, en los cuales se presentará determinadas características (edades, pesos, estatura, número de artículos defectuosos y no defectuosos producido por una industria, etc.).

Muestra:

Es una parte o subconjunto de la población que será sometida a estudio.

Ejemplo:

- La nota promedio en matemáticas de una sección de secundaria.
- La preferencia de un personaje mundial en una cierta ciudad.
- El control de calidad de algunos artículos producidos por una industria.

Datos estadísticos:

Son números o medidas que han sido recopilados, como resultado de observaciones.

Variable estadística

Es la característica de la población que interesa al investigador y que puede tomar distintos valores.

Ejemplo:

Peso, estatura, sexo, demanda de un producto, sintonía de un programa de TV o radio, etc.

La variable estadística puede ser: cualitativa o cuantitativa.

Variable cualitativa: Consiste en clasificar las variables por categorías. No lleva clasificación numérica.

Ejemplo:
La variable "Estado civil" puede adoptar las modalidades: soltero, casado, divorciado, viudo, etc.

Variable cuantitativa: Son variables que se obtienen como resultado de mediciones o conteos.

Ejemplo:
Peso, estatura, etc.
La variable cuantitativa puede ser discreta o continua.

a) **Variable discreta:** Los valores que toma la variable son números enteros.
   Ejemplo:
   El número de integrantes de una familia pueden ser: 3 o 4, pero no un valor entre ellos.

b) **Variable continua:** Los valores que toma la variable son números reales.
   Ejemplo:
   Una persona puede pesar 68 kg o 69 kg o cualquier valor comprendido entre ellos.

ESCALAS DE MEDICIÓN

La escala de medición es un instrumento de medida, con el que se asignan valores (cualidades o números) a las unidades estadísticas para una variable definida.

Las escalas de medición, pueden ser de los siguientes tipos: Nominal y ordinal.

Escala nominal

Son aquellas que surgen cuando se definen categorías y se cuenta el número de observaciones pertenecientes a cada categoría y no lleva ordenación en las posibles modalidades.

Ejemplo:

- La variable "sexo": masculino y femenino
- La variable "orientación del tiempo": presente, pasado y futuro.
- La variable "color de ojos": castaño, azul, etc.

Escala ordinal

Es una escala nominal, donde los valores de la variable pueden ordenarse en forma ascendente o descendente.

Ejemplo:

- La variable "clase social": clase baja, media y alta.
- La variable "orden de mérito": 1.°, 2.°, 3.°; etc.

ETAPAS DEL MÉTODO ESTADÍSTICO

Las etapas del método estadístico son:

- Planificación del estudio.
- Recolección de la información.
- Organización de la información.
- Análisis e interpretación de los datos.

Planificación del estudio

Esta etapa tiene la finalidad de estudiar los detalles concernientes a la recolección, clasificación y análisis de la información.

Recolección de la información

Esta etapa tiene para el investigador mucha más importancia que cualquier otra, pues tiene que ser vigilada constantemente por éste, de manera que la información recogida sea correcta.

Organización de la información

Luego de recogida la información, es necesario revisarla, resumirla y presentarla convenientemente, antes de que sea posible analizarla.

Análisis e interpretación de los datos

Es la parte final de un estudio estadístico y puede ser presentado en tablas o gráficos, en forma tal, que faciliten su comprensión y su posterior análisis y utilización.

Los cuadros numéricos de una sola variable estadística se denominan distribución de frecuencias.

DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS

Es un cuadro que muestra en forma clara, ordenada y clasificada el comportamiento de una variable estadística.

La distribución de frecuencias puede ser para variable: discreta, continua y cualitativa.

Distribución de frecuencias de una variable discreta

Sean "n" valores recolectados de una variable discreta X, estos valores numéricos son ordenados en forma ascendente.

Ejemplo:

Se han encuestado a 20 familias respecto al número de miembros que conforman (padres e hijos incluidos).

4	2	3	5	6
2	3	3	4	5
3	7	2	2	3
6	3	3	4	2

Construir la distribución de frecuencias:

Resolución:

a) **Rango o amplitud de los datos (R)**
El rango, es la diferencia entre el mayor y el menor de los valores que toma la variable.

Del ejemplo: $x_{máx} = 7$;
$x_{mín} = 2$

Luego: $R = 7 - 2 = 5$

b) **Frecuencia absoluta (f_i)**
Es el número de veces que aparece un valor de la variable estadística.

Del ejemplo:
El dato 3 aparece 7 veces.
∴ Frecuencia absoluta de dato 3: 7

c) **Frecuencia acumulada (F_i)**
La frecuencia absoluta acumulada de un dato de la variable, es la cantidad de datos hasta determinado valor de la variable.

Del ejemplo: el dato 2 aparece 5 veces y el dato 3 aparece 7 veces.

∴ La frecuencia absoluta acumulada del dato 3 es: $5 + 7 = 12$

d) **Frecuencia relativa (h_i)**
Es el cociente entre la respectiva frecuencia absoluta (f_i) del dato y el total de datos (n).

Es decir: $h_1 = \frac{f_i}{n}$

La frecuencia relativa puede ser expresada en porcentaje.

Del ejemplo:
Frecuencia relativa del dato 3:
$\frac{7}{20}$ o $0,35 = 35\%$

e) **Frecuencia relativa acumulada: (H_i)**
Es el cociente entre la frecuencia absoluta acumulada (F_i) y el total de datos.

Es decir: $H_i = \frac{F_i}{n}$

Del ejemplo: La frecuencia relativa acumulada del dato 3 es: $\frac{12}{20}$ o $0,60 = 60\%$

Resumiendo los datos en una tabla, tenemos:

Número de miembros de una familia (x_i)	Frecuencia absoluta (f_i)	Frecuencia absoluta acumulada (F_i)	Frecuencia relativa (h_i)	Frecuencia relativa acumulada (H_i)
2	5	5	0,25	0,25
3	7	12	0,35	0,60
4	3	15	0,15	0,75
5	2	17	0,10	0,85
6	2	19	0,10	0,95
7	1	20	0,05	1
20			1	

Propiedades de las frecuencias:

Sea n el número total de datos de la variable X, que toma los valores x_1; x_2; ...; x_k.

1. La suma de las frecuencias absolutas es igual al número de datos de la variable:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k} f_i = f_1 + f_2 + \ldots + f_k = n}$$

2. La suma de las frecuencias relativas es igual a 1 o 100%:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k} h_i = h_1 + h_2 + \ldots + h_k = 1 \text{ o } 100\%}$$

3. El último valor de la frecuencia absoluta acumulada es igual al número de datos de la variable:

$$\boxed{F_k = n}$$

4. El último valor de la frecuencia acumulada es igual a la unidad o a 100%:

$$\boxed{H_k = 1 \text{ o } 100\%}$$

5. Los valores que toma la frecuencia absoluta es de cero a "n":

$$\boxed{0 \leq f_i \leq n, \ \forall i = 1; 2; \ldots; k}$$

6. Los valores que toma la frecuencia relativa es de cero a 1 o 100%:

$$\boxed{0 \leq h_i \leq n, \ \forall i = 1; 2; \ldots; k}$$

7. $\boxed{F_i = F_{i-1} + f_i}$

Distribución de frecuencias de una variable continua

En una tabla, en donde los datos originales se clasifican en intervalos de clase.

Las razones de la agrupación, por intervalos de clase es el número grande de datos.

Ejemplo:

A continuación se proporciona como datos las remuneraciones semanales (en dólares) de 50 obreros de una industria de calzado.

73	47	67	82	67	70	60	67	61	80
65	70	57	85	59	70	57	73	77	58
69	58	76	67	52	68	69	66	72	86
76	79	77	88	(94)	67	77	54	93	56
73	64	70	(46)	68	63	72	84	63	74

Construir la distribución de frecuencias

Resolución:

a) Determinación del rango (R): $\boxed{R = x_{máx.} - x_{mín.}}$

Luego: $x_{máx} = 94$; $x_{mín} = 46 \Rightarrow R = 94 - 46 = 48$

b) Determinación del número de intervalos de clase: (k)

Consiste en dividir el rango en un número conveniente de intervalos de clase, generalmente del mismo tamaño.

No hay fórmula exacta para calcular el número de intervalos de clase, sin embargo existen aproximaciones.

i) **Regla de Sturges:** $\boxed{k = 1 + 3{,}3(\log n)\ ; n \geq 10}$

redondeando a los números enteros más próximos.

Ejemplo:

Vemos que: n = 50

Hallamos el número de intervalos:

$k = 1 + 3{,}3(\log 50) = 6{,}6$

El número de intervalos de clase puede ser: 6; 7 u 8

ii) Alternativamente se puede utilizar:

$k = \sqrt{n}$; $25 \leq n \leq 400$

Ejemplo:

Como: $n = 50$; $k = \sqrt{50} = 7{,}07$

El número de intervalos de clase puede ser: 6; 7 u 8

Como el rango R = 48, elegimos k = 8

c) Determinación del tamaño de los intervalos (C)

Es conveniente que los intervalos de clase sean del mismo tamaño.

$$\boxed{\text{Amplitud de clase: } C = \frac{R}{k}}$$

Del ejemplo: $R = 48$; $k = 8 \Rightarrow C = \frac{48}{8} = 6$

d) Determinación de los límites de clase

Se recomienda que el límite inferior del intervalo de la primera clase, sea el menor de los datos, enseguida se agrega C para obtener el límite superior de dicha clase:

Del ejemplo:

Intervalo de la 1.ª clase: [46 ; 52⟩

↓ Límite inferior ↓ Límite superior

e) Determinación de la frecuencia de clase

Consiste en determinar el número de datos, que caen en cada intervalo de clase.

Del ejemplo, en la 1.ª clase: [46; 52⟩ existen 2 datos, es decir: $f_1 = 2$.

f) Marca de clase (x_i)

Es el punto medio del intervalo de clase. En el ejemplo, la marca de clase de la 1.ª clase es:

$$x_1 = \frac{46 + 52}{2} = 49$$

Resumiendo los datos en la tabla:

Remuneraciones (dólares)	x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
[46; 52⟩	49	2	2	0,04	0,04
[52; 58⟩	55	5	7	0,10	0,14
[58; 64⟩	61	7	14	0,14	0,28
[64; 70⟩	67	12	26	0,24	0,52
[70; 76⟩	73	11	37	0,22	0,74
[76; 82⟩	79	6	43	0,12	0,86
[82; 88⟩	85	4	47	0,08	0,94
[88; 94]	91	3	50	0,06	1
		50		1	

Distribución de frecuencias de variable cualitativa

Es una tabla donde la variable está clasificada por categorías.

Ejemplo:

Al investigar el nivel socioeconómico en los valores: Bajo (B), medio (M), alto (A), 20 familias dieron las siguientes respuestas:

M; B; B; M; A; B; B; M; M; B; M; B; B; A; M; B; M; A; M; B

Construir la distribución de frecuencias.

Resolución:

Variable cualitativa X: nivel socioeconómico
La distribución de frecuencias es:

Valores de X	Frecuencia absoluta (f_i)	Frecuencia relativa (h_i)
Bajo (B)	9	0,45
Medio (M)	8	0,40
Alto (A)	3	0,15
Total	20	1

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA VARIABLE ESTADÍSTICA

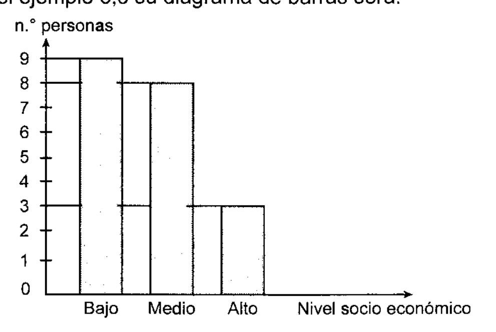
Las gráficas más usadas son:

Diagrama de barras

En un diagrama de barras, los datos de cada una de las categorías se representan por una barra rectangular vertical, cuya altura es proporcional a su frecuencia.

Ejemplo:

Del ejemplo 6,3 su diagrama de barras será:



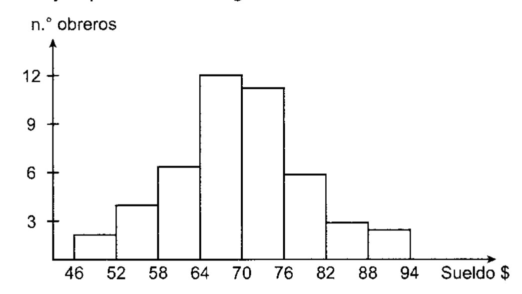
Histogramas

Es la representación gráfica de una distribución de frecuencias agrupadas en intervalos de clase, mediante una serie de rectángulos contiguos.

- Las bases están sobre el eje horizontal, con centros en las marcas de clase y longitud igual al tamaño de los intervalos de clase.
- Las alturas verticales, son proporcionales a la frecuencia (absoluta o relativa).

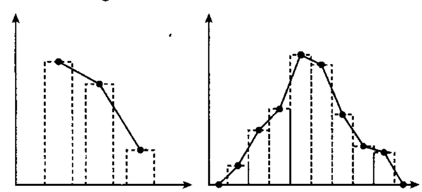
Ejemplo:

Del ejemplo 6,2 su histograma será:



Polígono de frecuencias

- Si la variable es cualitativa el polígono de frecuencias se obtiene uniendo los extremos superiores de las barras del gráfico de barras.
- Si la variable está agrupada por intervalos, el polígono de frecuencias se obtiene uniendo los puntos medios de las barras superiores de cada rectángulo del histograma.



Polígono de frecuencias acumuladas u ojivas

Esta representación es válida para variable estadística agrupada en intervalos de clase.

En el eje vertical va la frecuencia absoluta (o relativa) acumulada; en el eje horizontal los intervalos de clase.

Ejemplo:

Del ejem

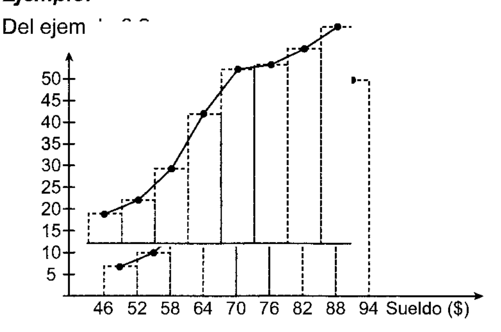


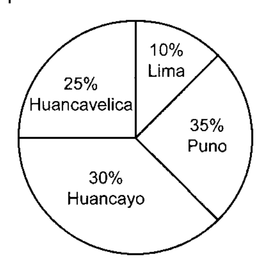
Diagrama de sectores

Consiste en repartir los 360° del círculo, proporcionalmente a las frecuencias de la población estudiada.

El diagrama de sectores es empleado en producción (papas, ganado, etc.).

Ejemplo:

El siguiente diagrama de sectores está referido a la producción de papas a nivel nacional.



Pictogramas

Se utilizan para representar índices de producción (o causas) empleando un símbolo del artículo que se produce.

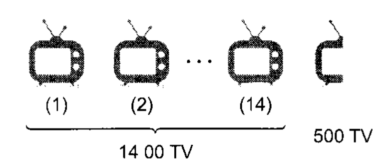
Ejemplo:

En una industria que se encarga a ensamblar televisores, su producción fue de 14 500 TV.

Resolución:

Si queremos representar 1000 TV podemos utilizar como símbolo:

Para representar los 14 500 TV será:



OTRAS GRÁFICAS

En algunos casos, el total en cada modalidad de una variable, puede estar compuesto de varias partes.

El tipo de gráfico depende de lo que se quiere resaltar.

Ejemplo.

El siguiente cuadro, contiene la población (en miles) de una ciudad de 1985 al 2000.

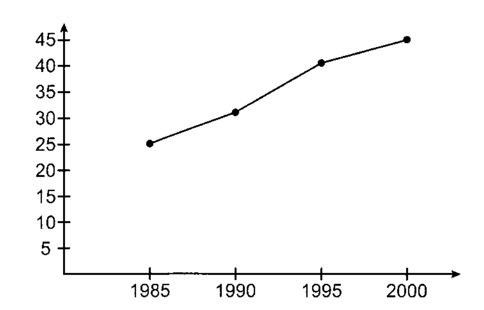
Año	Hombres	Mujeres	Total
1985	8	17	25
1990	12	20	32
1995	10	30	40
2000	18	27	45

Gráfica de línea

Se utiliza para resaltar variaciones de los datos a través del tiempo, se usa una gráfica de líneas.

Ejemplo:

Representar la población total del cuadro anterior, desde 1985 al 2000:

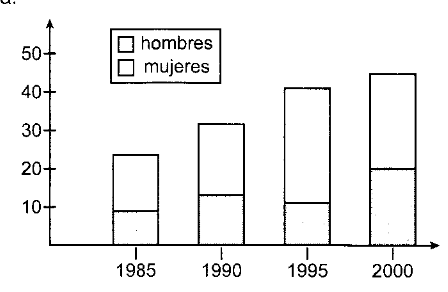


Gráfica de barras agrupadas:

Se utiliza para comparar las componentes o las frecuencias en cada modalidad.

Ejemplo:

Del cuadro anterior, la gráfica de barras agrupadas será:

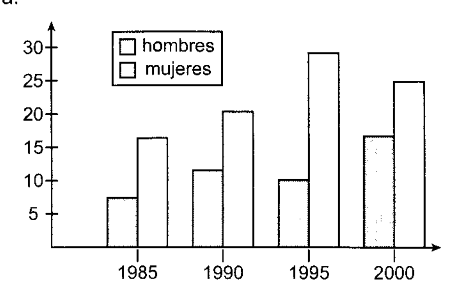


Gráfica de barras componentes

Se utiliza para resaltar a la vez el total y las frecuencias de cada componente a cada modalidad.

Ejemplo:

Del cuadro anterior, el gráfico de barras componentes será:



MEDIDAS DE POSICIÓN

Las medidas de posición reflejan la tendencia central y la localización de los datos.

Las medidas de tendencia central, ubican el centro de los datos como los promedios: media aritmética, media geométrica, media armónica y la mediana.

Media aritmética ($\bar{x}$)

Simplemente media, es la suma de los valores observados de la variable, dividida por el número de observaciones.

a) Media aritmética de datos no tabulados:

Sean "n" valores: x_1 ; x_2 ; x_3 ; ...; x_n de la variable x, la medida será:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Ejemplo:

Las edades de 5 personas son: 7 ; 15 ; 18; 30 y 20. Hallar la edad promedio.

Resolución:

La media es: $\bar{x} = \frac{7 + 15 + 18 + 30 + 20}{5} = 18$

b) Media para datos tabulados por intervalos:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} (f_i)(x_i)}{n}$$

Donde:
n : número de datos
f_i : frecuencia absoluta
x_i : marca de clase
k: número de intervalos

Ejemplo:

Dada la siguiente distribución de frecuencias:

I_i	[10; 24⟩	[24; 38⟩	[38; 52⟩	[52; 66⟩
f_i	14	26	24	16

Hallar la media.

Resolución.

Hallamos la marca de clase de cada intervalo:

x_i	17	31	45	59
f_i	14	26	24	16

Hallamos la media:

$$\bar{x} = \frac{17(14) + 31(26) + 45(24) + 59(16)}{14 + 26 + 24 + 16}$$

$$\bar{x} = \frac{3068}{80} = 38{,}35$$

∴ La media de los datos es 38,35

Mediana (Me)

La mediana o valor mediano, es el número que separa a la serie de datos ordenados en forma creciente (o decreciente) en dos partes de igual número de datos.

a) **Mediana de datos no tabulados:**

Ejemplo:

i) Si el número de datos es impar:

La mediana es el dato central de los datos ordenados.

Sean los datos: 17; 31; 24; 18; 60; 5; 56

Resolución:

Ordenamos los datos en forma creciente:
5; 17; 18; 24; 37; 56; 60 ∴ Me = 24

ii) Si el número de datos es par:

Se ordenan los datos en forma creciente (o decreciente) y la mediana será la semisuma de los datos centrales.

Ejemplo:

Sean los datos: 26; 8; 46; 34; 18; 62. Hallar la mediana.

Resolución

Ordenamos los datos: 8; 18; 26; 34; 46; 62
términos centrales: 26 y 34

La mediana será: $Me = \frac{26 + 34}{2} = 30$

b) **Mediana de datos tabulados:**

En éste caso, la mediana se calcula por tabulación:

Ejemplo:

Dada la siguiente distribución de frecuencias:

I_i	[6; 16⟩	[16; 26⟩	[26; 36⟩	[36; 46⟩	[46; 56⟩
f_i	10	16	20	9	5

Hallar la mediana.

Resolución:

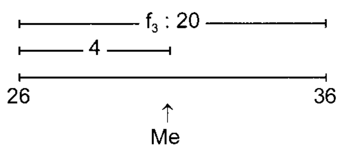
Hallamos el número de datos:
n = 10 + 16 + 20 + 9 + 5 = 60

Hallamos la mitad de los datos (n/2): $\frac{60}{2} = 30$

Hallamos la clase, que pertenece la mediana.
Vemos que: $f_1 = 10$; $f_2 = 16$ y $f_1 + f_2 = 26$

Luego, el dato 30 está en la tercera clase.

De los 20 datos, solo necesitamos 4 de ellas, para hallar la mediana empleamos tabulación:



$Me = 26 + \frac{4}{20}(36 - 26) = 28$ ∴ La mediana es 28

Moda (Mo)

La moda de una serie de datos, se define como el dato que más se repite.

La moda no siempre existe y si existe, no siempre es única.

a) **Moda de datos no tabulados**

Ejemplo:

Calcular la moda, en cada caso:

i) 7; 9; 7; 8; 7; 4; 7; 13; 7

Resolución:

De los 9 datos, vemos que el dato que más se repite es 7.

$\therefore$ Mo = 7 (unimodal)

ii) 5; 3; 4; 5; 7; 3; 5; 6; 3

Resolución:

De los 9 datos, vemos que los datos que más se repiten son 3 y 5.

$\therefore$ Mo = 3 $\wedge$ Mo = 5 (bimodal)

b) **Moda de datos tabulados**

Para calcular la moda de "n" datos tabulados en una distribución de frecuencias por intervalos, primero habrá que ubicar el intervalo que tiene la mayor frecuencia y luego utilizar la fórmula de interpolación.

$$Mo = L_i + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)A$$

Donde:

L_i: es el límite inferior del intervalo modal.

$d_1 = f_i - f_{i-1}$; d_1 es igual a la frecuencia del intervalo modal menos la frecuencia del intervalo inmediatamente anterior.

$d_2 = f_i - f_{i+1}$; d_2 es igual a la frecuencia del intervalo modal menos la frecuencia del intervalo inmediatamente posterior.

A: amplitud del intervalo modal.

Nota

La fórmula de la moda solo se aplica en distribuciones con una sola frecuencia máxima.

Ejemplo:

Dada la siguiente distribución de frecuencias:

I_i	[26; 34⟩	[34; 42⟩	[42; 50⟩	[50; 58⟩	[58; 66⟩
f_i	16	25	29	23	10

Hallar la moda.

Resolución:

Vemos que la clase de mayor frecuencia (clase modal) es la tercera clase.

Tenemos: $f_3 = 29$; $f_2 = 25$ y $f_4 = 23$

$A = 50 - 42 = 8$

Luego: $d_1 = f_3 - f_2 = 29 - 25 = 4$

$d_2 = f_3 - f_4 = 29 - 23 = 6$

Hallamos la moda:

$Mo = 42 + \left(\frac{4}{4+6}\right)8 = 45{,}2$ $\quad\therefore$ La moda es 45,2

PROBLEMAS RESUELTOS

1. En una encuesta sobre los ingresos anuales en miles de soles, de un grupo de familias se obtuvo la siguiente información:

I_i	x	f_i
[1 ; 3⟩		20
[3 ; 5⟩		
[5 ; 7⟩		
[7 ; 9⟩		20

Además: $\sum_{i=1}^{4} \frac{x_i f_i}{n} = 5{,}4$; $\frac{f_2}{f_3} = \frac{1}{5}$

¿Cuántas familias tienen ingresos no menos de 5 mil soles?

Resolución:

Tenemos en forma equivalente:

I_i	[1; 3⟩	[3; 5⟩	[5; 7⟩	[7; 9⟩
x_i	2	4	6	8
f_i	20	a	5a	20

Pero: $\sum_{i=1}^{4} \frac{x_i f_i}{n} = 5{,}4$

Reemplazando:

$$\frac{2\times 20 + 4\times a + 6\times 5a + 8\times 20}{20 + a + 5a + 20} = 5{,}4 \Rightarrow a = 10$$

$\therefore$ El número de familias cuyo ingreso es no menor de 5 mil soles es: 50 + 20 = 70

2. La siguiente distribución muestra el peso en gramos de 300 paquetes de un determinado paquete.

Peso (g)	10-14	15-19	20-24	25-29	30-35
h_i	k/2	0,17	2k	k	0,13

¿Cuántos paquetes pesan entre 12 y 26 gramos?

Resolución:

Hallamos el valor de k:

$\left(\sum_{i=1}^{k} h_i = 1\right) \Rightarrow \frac{k}{2} + 0{,}17 + 2k + k + 0{,}13 = 1$

$\Rightarrow k = 0{,}2$

Hallamos las respectivas frecuencias:

$$h_i = \frac{f_i}{300} \Rightarrow f_i = 300h_i$$

$f_1 = 300(0,10) = 30$; $f_2 = 300(0,17) = 51$;
$f_3 = 300(0,4) = 120$; $f_4 = 300(0,2) = 60$;
$f_5 = 300(0,13) = 39$

Peso (g)	10-14	15-19	20-24	25-29	30-35
h_i	0,10	0,17	0,40	0,20	0,13
f_i	30	51	120	60	39

Hallamos los paquetes que pesan entre 12 y 26 gramos:

¿?

I_i: 10 | 14 15 | 19 20 | 24 25 | 29
12 — 26

f_i: 30 — 51 — 120 — 60

Interpolando tenemos:

$$\text{n.° paquetes: } \left(\frac{2}{4}\right)30 + 51 + 120 + \left(\frac{1}{4}\right)60 = 201$$

∴ Son 201 paquetes.

3. De las edades de cuatro personas, se sabe que la media es igual a 24 años, la mediana es 23 y la moda es 22. La mayor de las edades es:

Resolución:

Sean las edades a; b; c y d, tales que: $a \geq b \geq c \geq d$

Por dato:

Media = 24 ⇒ $a + b + c + d = 96$ ...(1)

Mediana: = 23 ⇒ $\frac{b+c}{2} = 23 \Rightarrow b + c = 46$ ...(2)

Moda = 22 ⇒ $c = d = 22$ ...(3)

En (2): $b = 24$

En (1): $a + 24 + 22 + 22 = 96 \Rightarrow a = 28$

∴ La mayor de las edades: 28.

4. De una central telefónica salieron 70 llamadas de menos de 3 minutos, promediando 2,3 minutos; 40 llamadas de menos de 10 minutos pero no menos de 3 minutos, promediando 6,4 minutos; y 10 llamadas de al menos 10 minutos promediando 15 minutos. Calcular la duración promedio de todas las llamadas.

Resolución:

Del enunciado se elabora la siguiente distribución de frecuencias:

Tiempo	N.° de llamadas	Promedio
$t < 3$ min	70	2,3 min
3 min $\leq t <$ 10 min	40	6,4 min
10 min $\leq t$	10	15 min

El tiempo promedio:

$$t = \frac{70 \times 2,3 + 40 \times 6,4 + 10 \times 15}{70 + 40 + 10} = 4,725$$

∴ La duración promedio: 4,725 min.

5. En una empresa donde el sueldo medio es de \$400 se incrementa un personal igual al 25% del ya existente con un sueldo medio igual al 60% de los antiguos. Si 3 meses más tarde se incrementa cada sueldo en 20% más \$30, ¿cuánto es el nuevo salario medio?

Resolución:

Hallamos el sueldo promedio de la empresa, luego de que se incrementa a su personal:

	n.° empleados	Sueldo (\$)
Antiguos	100	400
Nuevos	25	60%(400) = 240

$$\text{Sueldo medio: } \frac{100 \times 400 + 25 \times 240}{125} = \$368$$

Dentro de 3 meses cada sueldo se incrementa 20% más \$30.

Nuevo sueldo promedio: 120%(368) + 30 = \$ 471,6

∴ Nuevo sueldo: \$471,6

6. En una distribución simétrica de 7 intervalos de igual amplitud se conocen los siguientes datos, a base de los cuales se pide reconstruir la distribución de frecuencias y calcular la media aritmética.

$C = 10$; $f_1 = 8$; $(x_3)(f_3) = 1260$

$h_3 = 0,21$; $f_2 + f_5 = 62$; $H_6 = 0,96$

Resolución:

Amplitud de los intervalos: C = 10

Distribución simétrica:

I_i	x_i	f_i	h_i	H_i
[5; 15⟩	10	8	0,04	0,04
[15; 25⟩	20	20	0,10	0,14
[25; 35⟩	30	42	0,21	0,35
[35; 45⟩	40	60	0,30	0,65
[45; 55⟩	50	42	0,21	0,86
[55; 65⟩	60	20	0,10	0,96
[65; 75⟩	70	8	0,04	1

Como: $H_6 = 0,96 \Rightarrow h_7 = h_1 = 0,04$

Pero: $h_1 = \frac{f_1}{n} \Rightarrow n = \frac{8}{0,04} \Rightarrow n = 200$

También: $h_3 = \frac{f_3}{200} = 0,21 \Rightarrow f_3 = 0,21 \times 200 = 42$

Además marca de clase, de la tercera clase:

$$(x_3)(f_3) = 1260 \Rightarrow x_3 = \frac{1260}{42} = 30$$

Luego, tercera clase:

$[25; 35\rangle$ (completamos la distribución)
$\uparrow$
30

Pero: $f_2 + f_5 = 62 \Rightarrow f_2 = f_6 = 20$
$\downarrow$
42

Sabemos que: $\sum_{i=1}^{7} f_i = 200$

$2(8 + 20 + 42) + f_4 = 200 \Rightarrow f_4 = 60$

Hallamos la media:

$$\bar{x} = \frac{8(10) + 20(20) + 42(30) + 60(40) + 42(50) + 20(60) + 8(70)}{200} = 40$$

$\therefore$ La media es: 40.

7. Una fábrica de pantalones tiene 3 máquinas, la máquina B produce la mitad de los que produce la máquina A y la producción de la máquina C es inferior en un 20% de los que produce la máquina B. Los costos de producción por unidad son 20; 30 y 50 nuevos soles para las máquinas A; B y C respectivamente. Si se desea, ganar el 20% por docena, se pide calcular,el precio medio de venta.

Resolución:

Suponiendo que la máquina A produce 100 pantalones, tendremos la siguiente tabla:

Máquina	Producción	Costo unit. (S/.)
A	100	20
B	50	30
C	40	50

Hallamos el precio medio de los pantalones:

$$\bar{x} = \frac{100 \times 20 + 50 \times 30 + 40 \times 50}{100 + 50 + 40} = 28{,}9$$

Ganancia: 20%(28,9) = 5,78 $\therefore P_V = \$34{,}7$ c/u

8. El jefe de control de calidad de una empresa ha clasificado un lote de 80 artículos con una distribución de 6 clases y con intervalos iguales de 5 unidades. Si las frecuencias correspondientes son: 6; 12; 24; 18; 13 y 7, siendo la cuarta marca de clase igual a 35 g, determinar la moda y mediana de la distribución.

Resolución:

Construyamos la distribución de frecuencia:

$n = 80$; $A = 5$

I_i	x_i	f_i
[17,5; 22,5⟩	20	6
[22,5; 27,5⟩	25	12
[27,5; 32,5⟩	30	24
[32,5; 37,5⟩	35	18
[37,5; 42,5⟩	40	13
[42,5; 47,5⟩	45	7

- Hallamos la moda

  Mayor frecuencia: $f_3 = 24$

  $d_1 = 24 - 12 = 12$

  $d_2 = 24 - 18 = 6$

  $L_3 = 27{,}5$

  $Mo = 27{,}5 + \left(\frac{12}{12 + 6}\right)5 = 30{,}83$

- Hallamos la mediana:

  Como: $n = 80$; hallamos el dato: $\frac{80}{2} = 40$

  $f_1 + f_2 + f_3 = 42$

  La mediana está en la tercera clase:

  $\Rightarrow Me = 27{,}5 + \left(\frac{22}{24}\right)5 = 32{,}08$

$\therefore Mo = 30{,}83$; $Me = 32{,}08$

9. Una distribución de frecuencias consta de 5 intervalos de clase de igual longitud y de ella se conocen los siguientes datos: $n = 110$; $f_4 - f_5 = 10$; $f_4 - f_3 - f_1 = 0$; $f_1 = f_5$; $f_2 = f_4$; límite superior de la primera clase 12,5 y $y_4(f_4) = 975$, donde y_4 es el límite inferior de la cuarta clase. Hallar el valor de la media y mediana.

Resolución:

Construimos la distribución de frecuencias:

I_i	x_i	f_i
[2,5; 12,5⟩	7,5	$a \Rightarrow 20$
[12,5; 22,5⟩	17,5	$10 + a \Rightarrow 30$
[22,5; 32,5⟩	27,5	10
[32,5; 42,5⟩	37,5	$10 + a \Rightarrow 30$
[42,5; 52,5⟩	47,5	$a \Rightarrow 20$

Hallamos "a": $\underbrace{\sum_{i=1}^{5} f_i}_{} = 110$

$30 + 4a = 110 \Rightarrow a = 20$

Además: $y_4(f_4) = 975 \Rightarrow y_4 = 32{,}5$
$\downarrow$
30

Hallamos "A" de cada intervalo:

$32{,}5 - 12{,}5 = 2A \Rightarrow A = 10$

- Hallamos la media:

  $$\bar{x} = \frac{7{,}5(20) + 17{,}5(30) + 27{,}5(10) + 37{,}5(30) + 47{,}5(20)}{110}$$

  $\bar{x} = 27{,}5$

- Hallamos la mediana:

  $\frac{n}{2} \Rightarrow \frac{110}{2} = 55$ datos (3.ª clase)

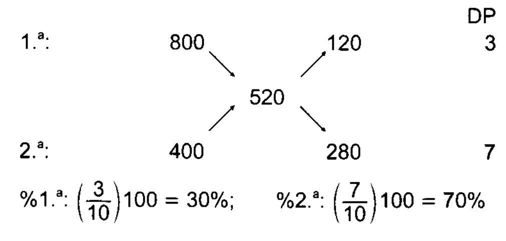
$\therefore Me = 22{,}5 + \left(\frac{5}{10}\right)10 = 27{,}5$

10. Se tiene una población dividida en dos grupos de diferentes tamaños; el primer grupo tiene un ingreso medio de S/.800 y el segundo grupo tiene un in-

greso medio de S/.400. Si el ingreso medio total es de S/.520, ¿qué porcentaje de la población está en cada grupo?

Resolución:

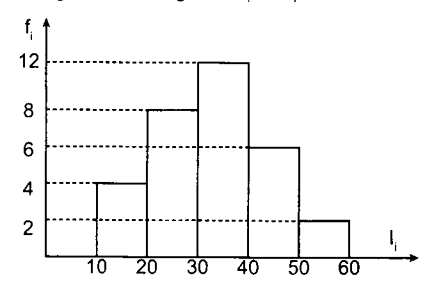
Usando la regla del aspa:



%1.ª: $\left(\frac{3}{10}\right)100 = 30\%$; %2.ª: $\left(\frac{7}{10}\right)100 = 70\%$

∴ Porcentajes: 30% y 70%

11. Del siguiente histograma f_i vs. I_i :



Hallar la media aritmética.

Resolución:

Del gráfico, hallamos:

Marca de clase:	15	25	35	45	55
frecuencia absoluta	4	8	12	6	2

$n = \sum_{i=1}^{5} f_i = 32$

$\Rightarrow \bar{x} = \frac{15\times4 + 25\times8 + 35\times12 + 45\times6 + 55\times2}{32} = 33{,}125$

∴ Media: 33,125.

12. Dada la distribución de los empleados de una industria por sueldos mensuales en dólares, ¿qué porcentaje gana 200 dólares a más?

Clases	Frecuencia
Menos de 45	10
45 a menos de 90	15
90 a menos de 135	36
135 a menos de 200	58
200 a menos de 300	82
300 a menos de 345	11
345 a más	3

Resolución:

Tenemos: $n = \sum_{i=1}^{7} f_i = 215$

Los que ganan $200 a más: 82 + 11 + 3 = 96

∴ El porcentaje será: $\left(\frac{96}{215}\right)100 = 44{,}65\%$

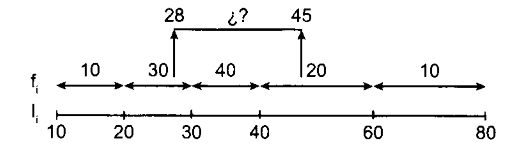
13. Dada la siguiente distribución de empresas según el número de empleados por empresa:

Número de empleados	Frecuencia
[10 – 20⟩	10
[20 – 30⟩	30
[30 – 40⟩	40
[40 – 60⟩	20
[60 – 80⟩	10
Total	110

Determinar el número de empresas cuyo número de empleados están comprendidos entre 28 y 45.

Resolución:

Usando interpolación:

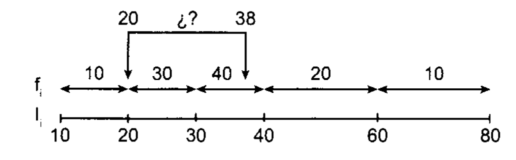


∴ N.° de empresas: $\left(\frac{2}{10}\right)30 + 40 + \left(\frac{5}{20}\right)20 = 51$

14. Del problema anterior, determinar el número de empresas cuyo número de empleados están comprendidos entre 20 y 38.

Resolución:

Usando interpolación:



∴ N.° de empresas: $30 + \left(\frac{38-30}{40-30}\right)40 = 62$

15. Dada la siguiente distribución de frecuencias:

$L_i - L_s$	f_i
16 – 32	6
32 – 48	a
48 – 64	8
64 – 80	3a
80 – 90	3

Se pide calcular el valor de "a" sabiendo que la moda es 60 y pertenece al tercer intervalo.

Resolución:

Mo = 60, entonces está en la 3.ª clase

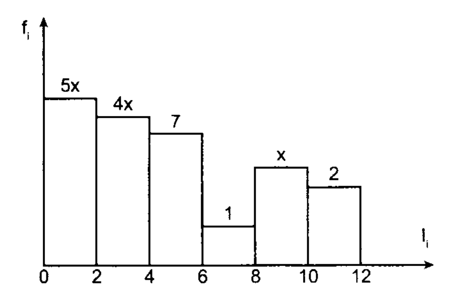
$d_1 = 8 - a$; $d_2 = 8 - 3a$; $A = 64 - 48 = 16$

Hallamos la moda:

$$Mo = 48 + \left(\frac{8-16}{16-4a}\right)16 = 60 \Rightarrow a = 2$$

∴ El valor de "a" = 2

16. Dado el siguiente histograma de frecuencias absolutas tomadas de una muestra de tamaño 40:



Hallar la mediana.

Resolución:

Hallamos "x", teniendo presente a la frecuencia absoluta:

$5x + 4x + 7 + 1 + x + 2 = 40 \Rightarrow x = 3$

Para localizar la mediana hallamos el dato:

$$\frac{40}{2} = 20$$

f_i: 15 | 12 | 7 | 1 | 3 | 2

I_i: 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12

Me (entre 2 y 4)

$$\therefore\ Me = 2 + \frac{5}{12}(4-2) = 2{,}83$$

17. De los 5 intervalos de clase de una distribución de frecuencias se tiene:

$$h_1 = \frac{k-3}{4k}\ ;\ h_2 = -\frac{10-k}{4k}\ ;\ h_3 = \frac{k-2}{4k}$$

$$h_4 = \frac{k+1}{4k}\ ;\ h_5 = \frac{k-1}{4k}$$

Determine el tamaño de la muestra.

Resolución:

Por propiedad de las frecuencias relativas:

$$\frac{k-3}{4k} + \frac{10-k}{4k} + \frac{k-2}{4k} + \frac{k+1}{4k} + \frac{k-1}{4k} = 1$$

$$\frac{5+3k}{4k} = 1 \Rightarrow k = 5 \qquad \therefore\ n = 4 \times 5 = 20$$

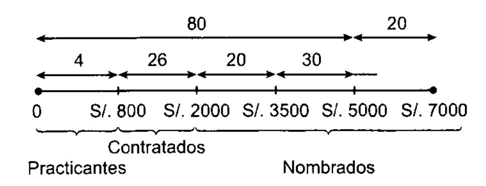
18. Una compañía tiene 100 trabajadores entre nombrados, contratados y practicantes. Para los nombrados el sueldo máximo es de S/.7000 y el mínimo es S/.2000 mensuales. El 4% son practicantes que reciben propinas de S/.800, y el 25% de los trabajadores son contratados que perciben haberes mayores o iguales que S/.800, pero menos que S/.2000; 20 trabajadores nombrados perciben haberes menores que S/.3500 y el 80% del total de trabajadores tiene haberes inferiores a S/.5000. Calcular:

i) ¿Qué porcentaje de trabajadores ganan desde S/.2000 hasta S/.5000?

ii) ¿Qué cantidad de trabajadores ganan sueldos de S/.1400 a S/.6000?

Resolución:

Del enunciado:



i. Número de trabajadores que ganan de S/.2000 a S/.5000:
20 + 30 = 50 <> 50%

ii. Número de trabajadores que ganan de S/.1400 a S/.6000:
$\frac{26}{2} + 20 + 30 + \frac{20}{2} = 73$ <> 73%

19. Se clasificó la inversión de un grupo de compañías mineras en una tabla de frecuencias. Se sabe que la máxima inversión es de 56 millones de dólares, que la amplitud de los intervalos es de 8 millones de dólares, las frecuencias absolutas correspondientes de los intervalos son: 1; 16; 21; 9; 8; 3; 2. ¿Qué porcentaje de compañías invierten menos de 40 millones de dólares?

Resolución:

Construimos la distribución de frecuencias:

Inversión en millones de dólares	n.° de compañías (f_i)
[0; 8⟩	1
[8; 16⟩	16
[16; 24⟩	21
[24; 32⟩	9
[32; 40⟩	8
[40; 48⟩	3
[48; 56⟩	2

n = 60

Número de compañías que intervienen menos de 40 millones de dólares: (5 primeras clases)

$1 + 16 + 21 + 9 + 8 = 55$

$\therefore$ Porcentaje de compañías: $\left(\frac{55}{60}\right)100 = 91{,}67\%$

20. Del problema anterior, ¿qué porcentaje de compañías invierten 24 millones de dólares como mínimo? (4 últimas clases).

Resolución:

Del cuadro anterior:

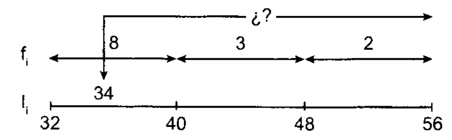
Número de compañías que invierten como mínimo 24 millones de dólares: (4 últimas clases)

$9 + 8 + 3 + 2 = 22$

$\therefore$ Porcentaje: $\left(\frac{22}{60}\right)100 = 36\frac{2}{3}\%$

21. Del problema 19, ¿cuántas compañías invierten 34 millones de dólares o más?

Resolución:



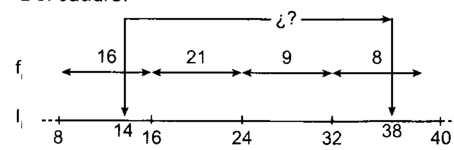
Usando interpolación, el número de compañías que invierten 34 millones de dólares o más:

$\left(\frac{40 - 34}{40 - 32}\right)8 + 3 + 2 = 11$ $\therefore$ Son 11 compañías

22. Del problema 19, ¿cuántas compañías invierten de 14 a 38 millones de dólares?

Resolución:

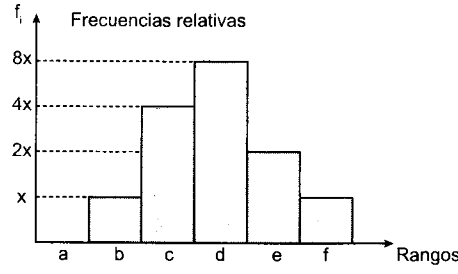
Del cuadro:



Número de compañías que invierten de 14 a 38 millones de dólares:

$\left(\frac{16 - 14}{16 - 8}\right)16 + 21 + 9 + \left(\frac{38 - 32}{40 - 32}\right)8 = 40$

23. Se tiene el siguiente histograma de frecuencias relativas:



¿Cuántas observaciones hay en el rango $\langle c; f\rangle$, si la población es de 400?

Resolución:

De I_1: $h_1 = x$ De I_3: $h_3 = 8x$ De I_5: $h_5 = x$
De I_2: $h_2 = 4x$ De I_4: $h_4 = 2x$

$\sum_{i=1}^{5} h_i = x + 4x + 8x + 2x + x = 16x$

De c a f: $h_3 + h_4 + h_5 = 11x$

Luego: 16x ——— 400
11x ——— y

$y = 400\left(\frac{11}{16}\right) = 275$

$\therefore$ En el rango $\langle c; f\rangle$ hay 275 observaciones

24. Se tiene una distribución de frecuencias con cinco intervalos de clase cuyas frecuencias relativas son:

$$\frac{2-k}{5};\ \frac{2k}{5};\ \frac{k}{5};\ \frac{2-3k}{5};\ \frac{k+1}{5}$$

respectivamente. Determinar los valores de k que hagan cierto el enunciado anterior:

Resolución:

Por propiedad: $\frac{2-k}{5} + \frac{2k}{5} + \frac{k}{5} + \frac{2-3k}{5} + \frac{k+1}{5} = 1$

$\Rightarrow 5 = 5;\ k \in \mathbb{R}$ ...(1)

Además:

$2 - k \geq 0 \ \wedge\ 2k \geq 0 \ \wedge\ 2 - 3k \geq 0 \ \wedge\ k + 1 \geq 0$

$2 \geq k \ \wedge\ k \geq 0 \ \wedge\ \frac{2}{3} \geq k \ \wedge\ k \geq -1$

$\therefore k \in \left[0; \frac{2}{3}\right]$

25. En una encuesta sobre el ingreso de turistas a una ciudad, según sus édades, se obtuvo la siguiente información:

Edades	f_i	F_i
$[20 - 24\rangle$	10	m
$[24 - 28\rangle$	a	2a
$[28 - 32\rangle$	b	c
$[32 - 36\rangle$	a + b	c + d
$[36 - 40\rangle$	15	15c/7

¿Cuántos son turistas mayores de 28 años?

Resolución:

Se conoce: $f_1 = F_1 = 10 = m$

También:

$F_2 = f_1 + f_2 = 10 + a = 2a \Rightarrow a = 10$

$F_3 = f_1 + f_2 + f_3 \Rightarrow c = 10 + a + b = 20 + b$

$F_5 = f_1 + f_2 + ... + f_5$

$\Rightarrow \frac{15c}{7} = 10 + a + b + a + b + 15$

Se tiene: $\frac{15}{7}(20 + b) = 45 + 2b$

Resolviendo: $b = 15$

La tabla será:

Edades	f_i
[20; 24⟩	10
[24; 28⟩	10
[28; 32⟩	15
[32; 36⟩	25
[36; 40⟩	15

Los turistas mayores de 28 años serán:
15 + 25 + 15 = 55

26. De una tabla de distribución de frecuencias con intervalos de clase de ancho común, se tiene:

I_i	h_i	H_i
[$\overline{nm}$; ⟩	0,16	
[; ⟩		0,36
[; ⟩	8%m	
[; ⟩	7%n	0,90
[; $\overline{mm}$⟩		

Halle m + n

Resolución:

Se observa: $H_2 = h_2 + h_1$
$0{,}36 = h_2 + 0{,}16 \Rightarrow h_2 = 0{,}20$

También: $H_5 = h_5 + H_4$
$1 = h_5 + 0{,}90 \Rightarrow h_5 = 0{,}10$

Propiedad: $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 = 1$
$0{,}16 + 0{,}20 + 8\%m + 7\%n + 0{,}10 = 1$

Se obtiene: $8m + 7n = 54$
Pero m y n son cifras (están en $\overline{nm}$)
$\Rightarrow m = 5$ y $n = 2$ $\quad \therefore m + n = 7$

27. Dado el tablero incompleto de la distribución de frecuencias de las notas de 50 alumnos. Se observa que al completarlo el ancho de clase es constante e igual a 2.

I_i	x_i	f_i
[; ⟩		
[; 8⟩		
[; ⟩		
[; ⟩	a	a
[; ⟩	b	b − 5

¿Qué porcentaje de alumnos desaprobados existen? La nota mínima aprobatoria es 10.

Resolución:

Siendo el ancho de clase constante: $\omega = 2$
Se tendrá: I_2 = [; 8⟩ = [6; 8⟩ y demás intervalos
Se conocerán en forma similar.

I_i
[4 ; 6⟩
[6 ; 8⟩
[8 ; 10⟩
[10 ; 12⟩
[12 ; 14⟩

Luego: $a = x_4 = \dfrac{10+12}{2} = 11$

$b = x_5 = \dfrac{12+14}{2} = 13$

También: $f_4 = a = 11 \;\wedge\; f_5 = b - 5 = 8$

Se desea conocer el porcentaje de alumnos desaprobados, estos son los que han sacado menos de 10.

$$\begin{matrix}\text{Alumnos} \\ \text{con nota} \\ \text{menor a 10}\end{matrix} = \begin{matrix}\text{Total} \\ \text{alumnos}\end{matrix} - \begin{matrix}\text{alumnos con} \\ \text{nota mayor} \\ \text{o igual 10}\end{matrix}$$

$$= \quad 50 \quad - \quad (11 + 8)$$

Luego: $\begin{matrix}\text{alumnos con} \\ \text{nota menor a 10}\end{matrix} = 31$

$\therefore$ Porcentaje: $\left(\dfrac{31}{50}\right)100\% = 62\%$

28. Un fabricante de varillas de acero, clasifica un lote según sus longitudes, obteniendo:

Longitud (cm)	h_i	f_i
[70; 80⟩	1/k	k
[80; 90⟩	2/k	
[90; 100⟩	4/k	
[100; 110⟩	5/k	
[110; 120⟩	3/k	

¿Cuántas varillas tienen entre 97,5 y 116 cm?

Resolución:

Propiedad:
$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{k} + \dfrac{2}{k} + \dfrac{4}{k} + \dfrac{5}{k} + \dfrac{3}{k} = 1$

Se obtiene: $k = 15 = f_1$

Además: $f_1 = h_1 \times n$ (total de la población)

$15 = \left(\dfrac{1}{15}\right)n \Rightarrow n = 225$

Se obtiene la tabla siguiente:

I_i	f_i
[70 ; 80⟩	15
[80 ; 90⟩	30
[90 ; 100⟩	60
[100 ; 110⟩	75
[110 ; 120⟩	45

Varillas mayores a 97,5 y menores a 100: x

$$\frac{100-90}{60}=\frac{100-97,5}{x} \Rightarrow x=15$$

- Mayores a 100 y menores a 110: $f_4 = 75$
- Mayores a 110 y menores a 116: y

$$\frac{120-110}{45}=\frac{116-110}{y} \Rightarrow y=27$$

$\therefore$ Total = 15 + 75 + 27 = 117

29. En la siguiente tabla de frecuencias se registra el número de personas por rango de edad. ¿Cuántas personas son mayores a 21 años?

Edad	f_i
[10 ; 14⟩	5
[14 ; 18⟩	10
[18 ; 22⟩	20
[22 ; 26⟩	25
[26 ; 30⟩	15
[30 ; 34⟩	5

Resolución:

De la tabla:

i. Mayores a 21, menores a 22: x

$$\frac{22-18}{20}=\frac{22-21}{x} \Rightarrow x=5$$

ii. Mayores a 22:

$f_4 + f_5 + f_6 = 25 + 15 + 5 = 45$

$\therefore$ Los mayores a 21: 5 + 45 = 50

30. En una prueba de aptitud académica se evaluaron a "n" estudiantes y las notas obtenidas se clasificaron en una tabla de distribución de frecuencias como se muestra a continuación:

Marca de clase	Frecuencias relativas
45	k/50
55	3k/100
65	2k/25
75	3k/50
85	k/100

¿Qué porcentaje de estudiantes obtuvieron una nota menor que 60 puntos o mayor o igual que 80 puntos?

Resolución:

Construyendo la tabla de frecuencia con un ancho de clase común: $\omega = 10$

I_i	h_i
[40; 50⟩	k/50
[50; 60⟩	3k/100
[60; 70⟩	2k/25
[70; 80⟩	3k/50
[80; 90⟩	k/100

Se desea hallar un porcentaje, no cantidades exactas, se puede mantener la frecuencia relativa o buscar un valor adecuado para facilitar las operaciones.

Haciendo k = 100, se tendría:

I_i	h_i
[40; 50⟩	2
[50; 60⟩	3
[60; 70⟩	8
[70; 80⟩	6
[80; 90⟩	1
	Total 20

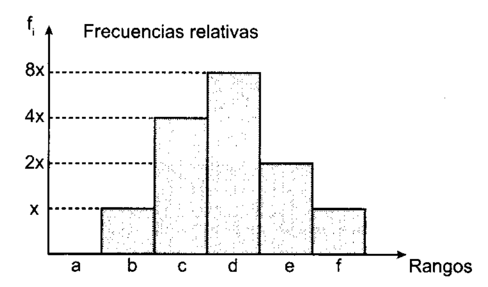
Luego, menos de 60: 2 + 3 = 5

Igual o más de 80: 1

Finalmente, menos de 60 o más de 80: 5 + 1 = 6

$\therefore$ Porcentaje: $\left(\frac{\text{Parte}}{\text{Total}}\right)100\% = \left(\frac{6}{20}\right)100\% = 30\%$

31. Se tiene el siguiente histograma de frecuencias relativas.



¿Cuántas observaciones hay en rango [c; f], si la población es de 400?

Resolución:

Se dan las frecuencias relativas:

$h_1 = x$ $h_2 = 4x$ $h_3 = 8x$

$h_4 = 2x$ $h_5 = x$

La misma relación será para las frecuencias absolutas:

$f_1 = m$ $f_2 = 4m$ $f_3 = 8m$

$f_4 = 2m$ $f_5 = m$

En [c; f] estará: 8m + 2m + m = 11m; de un total de 16m.

Es decir, que estará los 11/16 del total, como la población es 400.

$\therefore\ \frac{11}{16}(400) = 275$

32. Se da la siguiente tabla de frecuencias, donde "a" es mínimo:

$[a; b\rangle$	$a + 1$
$[b; \overline{ca}\rangle$	$\overline{cb}$
$[\overline{ca}; \overline{cb}\rangle$	$\overline{da}$
$[\overline{cb}; \overline{da}\rangle$	$\overline{cb} + 2$
$[\overline{da}; \overline{cb}\rangle$	$\overline{ca} - a$

Si los intervalos tienen el mismo tamaño, ¿cuál es el tanto por ciento aproximado de valores mayores que 9, pero menores que 22?

Resolución:

Como los intervalos poseen el mismo tamaño:

$a \underset{+w}{\frown} b \underset{+w}{\frown} \overline{ca} \underset{+w}{\frown} \overline{cb} \underset{+w}{\frown} \overline{da}$

Pero: $a + w + w = \overline{ca} = 10c + a$

$2w = 10c \quad \begin{cases} c = 1 \\ w = 5 \end{cases}$

Como "a" es mínimo: $a = 1$

Luego: $b = a + w = 1 + 5 = 6$

$d = c + 1 = 1 + 1 = 2$

Luego: $a = 1$; $b = 6$; $c = 1$; 2

Se completa la tabla con los valores indicados.

$[a; b\rangle$	$[1; 6\rangle$	$a + 1 = 2$
$[b; \overline{ca}\rangle$	$[6; 11\rangle$	$\overline{cb} = 16$
$[\overline{ca}; \overline{cb}\rangle$	$[11; 16\rangle$	$\overline{da} = 21$
$[\overline{cb}; \overline{da}\rangle$	$[16; 21\rangle$	$\overline{cb} + 2 = 18$
$[\overline{da}; \overline{db}\rangle$	$[21; 26\rangle$	$\overline{ca} - a = 10$

Mayores de 9 / menores a 22

De $[6; 11\rangle$ hay 16 datos y de $[9; 11\rangle$ hay x datos.

$\Rightarrow x = 16\left(\frac{11 - 9}{11 - 6}\right) = 6{,}4$

De $[11; 21\rangle = [11; 16\rangle \cup [16; 21\rangle$

Entonces hay: $21 + 18 = 39$ datos

De $[21; 22\rangle$: $y = 10\left(\frac{22 - 21}{26 - 21}\right) \Rightarrow y = 2$

$\% = \left(\frac{6{,}4 + 39 + 2}{67}\right)100\%$

$\therefore$ Porcentaje: $70{,}7\% \approx 71\%$ aproximado

33. Se tiene la siguiente tabla incompleta acerca de las edades de 88 profesores que laboran en el CEPRE-UNI.

Edades	x_i	f_i	F_i	$h_i(\%)$	$H_i(\%)$
$[30; \ \rangle$					12,5
			30		
		30	60		
	48			$9{,}\overset{\frown}{09}$	

Considerando que los intervalos de clase tienen el mismo tamaño, ¿cuál es el porcentaje de profesores que tienen 35 años o más?

Resolución:

$H_1\% = h_1\% = 12{,}5\%$

Donde: $f_1 = 88(12{,}5\%) = 11$

(88 → total de datos)

$\left.\begin{matrix} F_2 = f_1 + f_2 \\ 30 = 11 + f_2 \end{matrix}\right\} f_2 = 19$

$h_5\% = 9{,}09\% = \frac{100}{11}\% \Rightarrow f_5 = 88\left(\frac{100}{11}\%\right) = 8$

También, total de datos: $n = \sum_1^5 f_i$

$\Rightarrow n = 88 = \underbrace{11}_{f_1} + \underbrace{19}_{f_2} + \underbrace{30}_{f_3} + f_4 + \underbrace{8}_{f_5} \Rightarrow f_4 = 20$

Como $x_5 = 48$, de la tabla:

$30 + w + w + w + w + \frac{w}{3} = 48$

$30 + \frac{9}{2}w = 48 \Rightarrow w = 4$

Completando la tabla:

Edades	f_i
$[30; 34\rangle$	11
$[34; 38\rangle$	19
$[38; 42\rangle$	30
$[42; 46\rangle$	20
$[46; 50\rangle$	8

Profesores con 35 años o más

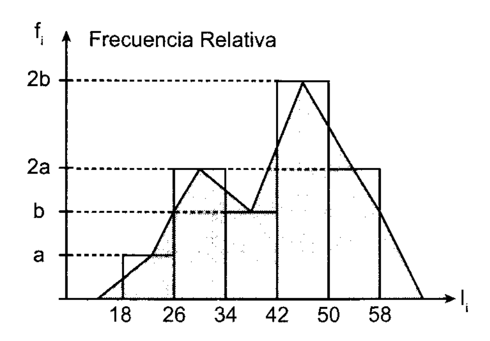
De 35 a 38 años: $x \Rightarrow x = 19\left(\frac{38 - 35}{38 - 34}\right) = 14{,}25$

Más de 38 años: $30 + 20 + 8 = 58$

Total con mas de 35 años: $14{,}25 + 58 = 72{,}25$

$\therefore$ Porcentaje pedido: $\left(\frac{72{,}25}{88}\right)100\% = 82{,}10\%$

34. El siguiente polígono de frecuencias muestra el número de datos obtenidos según los intervalos señalados:



Si la superficie sombreada es 720 y la media es $40,\hat{6}$, calcule el número de datos que hay en [30; 50⟩.

Resolución:

Se comprueba que el área sombreada es la suma de las áreas del histograma, luego:

$720 = a \times 8 + 2a \times 8 + b \times 8 + 2b \times 8 + 2a \times 8$

$90 = 5a + 3b \qquad \ldots(\alpha)$

Cálculo de la media:

$$\bar{x} = 40,\hat{6} = 22 + \frac{0(a) + 8(2a) + 16(b) + 24(2b) + 32(2a)}{\underbrace{a + 2a + b + 2b + 2a}_{90}}$$

Efectuando y simplificando

$5a + 4b = 105 \qquad \ldots(\beta)$

De (α) y (β): a = 9; b= 15, se tiene la tabla:

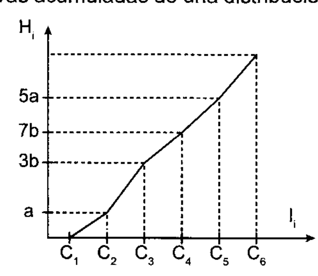
I_i	f_i
[18; 26⟩	9
[26; 34⟩	18
[34; 42⟩	15
[42; 50⟩	30
[50; 58⟩	18

Se desea conocer los datos en [30; 50⟩

- [30; 34⟩: $\frac{34-26}{18} = \frac{34-30}{x} \Rightarrow x = 9$
- [34; 42⟩ : $f_3 = 15$
- [42; 50⟩ : $f_4 = 30$

$\therefore$ Total: 9 + 15 + 30 = 54 datos

35. El siguiente gráfico muestra la ojiva de frecuencias relativas acumuladas de una distribución simétrica.



¿Cuántas observaciones se presentan en el intervalo $[C_3; C_4\rangle$ si la población es de 420?

Resolución:

Llevando a una tabla se tendría:

I_i	H_i	h_i	
$[C_1; C_2\rangle$	a	a	
$[C_2; C_3\rangle$	3b	3b − a	$\Rightarrow h_2 = H_2 - H_1$
$[C_3; C_4\rangle$	7b	4b	
$[C_4; C_5\rangle$	5a	5a − 7b	$\Rightarrow h_4 = H_4 - H_3$
$[C_5; C_6\rangle$			

Como es simétrica: $h_1 = h_5 \wedge h_2 = h_4$

De la tabla: $\underbrace{3b - a}_{h_2} = \underbrace{5a - 7b}_{h_4}$

Se obtiene: $5b = 3a \quad \begin{cases} a = 5k \\ b = 3k \end{cases}$

Luego:
$h_1 = h_5 = a = 5k$
$h_2 = h_4 = 3b - a = 4k$
$h_3 = 4b = 12k$

La relación de frecuencias relativas será la misma para las frecuencias absolutas, luego:

$f_1 = f_5 = 5k'$
$f_2 = f_4 = 4k'$
$f_3 = 12k'$

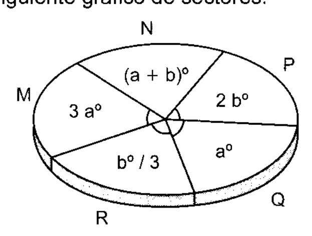
Donde: $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 420$

Reemplazando se obtiene k' = 14

En $[C_3; C_4\rangle$, tercer intervalo se tendrá:

$\therefore f_3 = 12 \times 14 = 168$

36. Se realizó una encuesta a cierto número de personas sobre sus preferencias a 5 marcas de cigarrillos, designados como. M, N, P, Q, R, presentándose el siguiente gráfico de sectores:



- Además gustan de M tantos como gustan de P.
- 72 personas gustan de R.

¿Cuántos gustan de N? si en M hay tantos como en P y el ángulo que corresponde a cada uno es el mismo, luego: 3a = 2b

Resolución:

También: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = k \Rightarrow \begin{matrix} a = 2k \\ b = 3k \end{matrix}$

Además la suma de todos los ángulos debe de ser 360°.

$$\left[3a+(a+b)+2b+a+\frac{b}{3}\right]^{\circ}=360^{\circ}$$

Reduciendo y simplificando: $3a + 2b = 216$

Reemplazando: $3(2k) + 2(3k) = 216 \Rightarrow k = 18$

Luego: $a = 36 \wedge b = 54$

Los ángulos son:

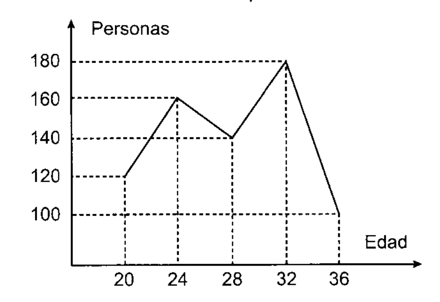
M : 3 × 36 = 108°
N : 36 + 54 = 90°
P : 2 × 54 = 108°
Q : = 36°
R : 54/3 = 18°

Pero 72 gustan de R, queremos hallar los que gustan de N, directamente.

$$\Rightarrow \frac{72}{18^{\circ}}=\frac{x_N}{90^{\circ}} \longleftarrow \text{gustan de N}$$

∴ Gustan de N: $x_N = 360$

37. El siguiente polígono de frecuencias muestra el número de personas con una determinada edad:



Calcule la mediana.

Resolución:

Hallando la mediana x_m, las frecuencias son:

$f_1 = 120$; $f_2 = 160$; $f_3 = 140$

$f_4 = 180$; $f_5 = 100$

El polígono de frecuencias une las marcas de clase, luego: $x_1 = 20$; $x_2 = 24$; ... etc.

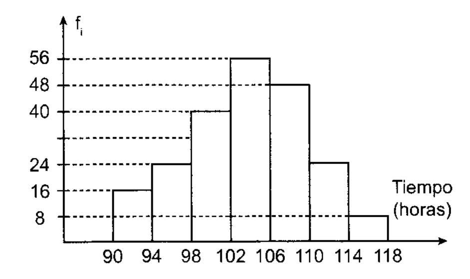
Se observa ancho de clase constante: $\omega = 4$

Como el total de datos $\sum_{i=1}^{5} f_i = 700$, la mediana debe de aparecer en el tercer intervalo

$$x_m=\underbrace{\left(28-\frac{4}{2}\right)}_{\substack{\text{Límite inferior}\\ \text{del tercer intervalo}}}+4\left[\frac{350-(120+160)}{104}\right]$$

∴ Mediana: $x_m = 28$

38. El diagrama mostrado ha sido elaborado con los tiempos de duración de un conjunto de baterías.



¿Cuántas baterías tienen una duración entre 100 y 115 horas?

Resolución:

Del histograma mostrado se puede señalar las frecuencias absolutas de los 5 últimos intervalos:

I_i	f_i
[98; 102⟩	40
[102; 106⟩	56
[106; 110⟩	48
[110; 114⟩	24
[114; 118⟩	8

i. Mayores a 100 pero menores a 102: x

$$\frac{102-98}{40}=\frac{102-100}{x} \Rightarrow x = 20$$

ii. Mayores a 102 pero menores a 114:

$56 + 48 + 24 = 128$

iii. Mayores a 114 pero menores a 115: y

$$\frac{118-114}{8}=\frac{115-114}{y} \Rightarrow y = 2$$

∴ Total: $20 + 128 + 2 = 150$

39. Del siguiente cuadro de frecuencias

I_i	f_i	F_i	h_i	H_i
[20; ⟩		5	0,20	
[; ⟩				0,44
[; ⟩	8			
[; 60⟩				

¿Qué error se obtiene al calcular la mediana como si fuera la moda?

Resolución:

Considerando un ancho de clase constante se calcula:

$$\omega=\frac{60-20}{4}=10$$

También: $f_1 = F_1 = 5$ y como $h_1 = 0{,}20$

Total de datos: $\frac{f_1}{h_1}=\frac{5}{0{,}20}=25$

Se conoce: $H_2 = 0{,}44 = h_1 + h_2 \Rightarrow h_2 = 0{,}24$

Luego: $f_2 = 25 \times 0{,}24 = 6$

Finalmente: $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 25$

$\Rightarrow 5 + 6 + 8 + f_4 = 25 \Rightarrow f_4 = 6$

Se tendrá la tabla:

I_i	f_i
[20; 30⟩	5
[30; 40⟩	6
[40; 50⟩	8
[50; 60⟩	6

Cálculo de la mediana x_m (en el tercer intervalo):

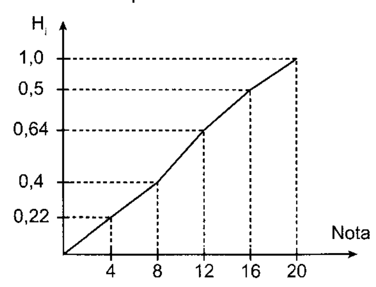
$$x_m = 40 + 10\left(\frac{12{,}5 - 11}{8}\right) \Rightarrow x_m = 41\frac{7}{8} = 41{,}86$$

Cálculo de la moda x_o (en el tercer intervalo):

$$x_o = 40 + 10\left(\frac{8-6}{8-6+8-6}\right) \Rightarrow x_o = 45$$

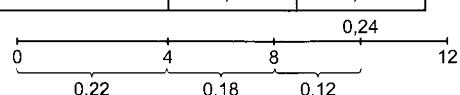
$\therefore$ Luego: $x_o - x_m = 45 - 41\frac{7}{8} = 3\frac{1}{8} = 3{,}125$

40. La siguiente figura muestra la ojiva de frecuencia relativa acumulada de las notas obtenidas por 2000 alumnos. ¿Cuántos alumnos ingresaron? si la nota mínima aprobatoria fue 10.



Resolución:

Intervalo		h_i	H_i
0	4	0,22	0,22
4	8	0,18	0,40
8	12	0,24	0,64



No aprobaron: $0{,}22 + 0{,}18 + 0{,}12 = 0{,}52$

$\therefore$ Aprobaron: $(1 - 0{,}52)2000 = 960$ alumnos.

41. En la siguiente tabla de distribución de frecuencias, Hallar el valor n, sabiendo que la mediana vale 46.

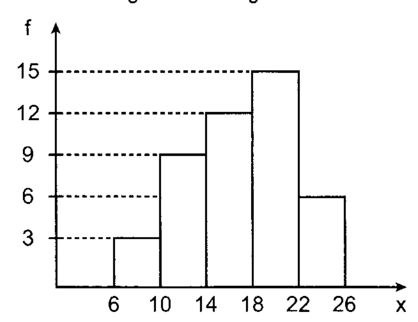
Intervalos de clase	f_i
[30; 36⟩	8
[36; 42⟩	4
[42; 48⟩	n
[48; 54⟩	6
[54; 60⟩	10

Resolución:

Aplicando la fórmula de la mediana en el tercer intervalo, porque en ese intervalo está la mediana que es 46, tenemos:

$$Me = 42 + 6\left(\frac{\frac{28+n}{2} - 12}{n}\right) = 46; \quad \therefore n = 12$$

42. Señalado el siguiente histograma:



Señale: $x + x_m$

Resolución:

Del histograma, se forma la siguiente tabla:

I_i	x_i	f_i
[6; 10⟩	8	3
[10; 14⟩	12	9
[14; 18⟩	16	12
[18; 22⟩	20	15
[22; 26⟩	24	6

Se tendría:

$$\bar{x} = \frac{8\times3 + 12\times9 + 16\times12 + 20\times15 + 24\times6}{3+9+12+15+6}$$

Nótese que $\bar{x}$ no varía si se calcula así:

$$\bar{x} = 8 + \underbrace{\frac{0\times3 + 4\times9 + 8\times12 + 12\times15 + 16\times6}{3+9+12+15+6}}_{\text{Existe factor común 3}}$$

$$\bar{x} = 8 + \frac{0\times1 + 4\times3 + 8\times4 + 12\times5 + 16\times2}{1+3+4+5+2}$$

$$\bar{x} = 8 + \frac{136}{15} = 8 + 9{,}0\hat{6} = 17{,}0\hat{6}$$

Para x_m, la mediana se tendrá:

$$x_m = 14 + 4\left(\frac{\frac{45}{2} - 12}{12}\right) = 17{,}5$$

En el cálculo de $\bar{x}$ si corresponde a una distribución de ancho de clase común, se puede indicar de la forma:

$$\bar{x} = x_1 + \frac{0 \times f_1 + \omega \times f_2 + 2\omega \times f_3 \ldots}{f_1 + f_2 + f_3 \ldots + f_k}$$

Donde:

x_1: Marca de clase del primer intervalo

ω: ancho de clase

f_i: frecuencia absoluta

$\therefore$ Para el problema: $\bar{x} + x_m = 34{,}5\hat{6}$

43. La siguiente tabla muestra la distribución de las notas de un grupo de alumnos. ¿Cuántos alumnos tienen notas mayores que la media de dichas notas?

Notas	h_i	f_i
0 –	2/x	x
–	4/x	
–	6/x	
– x	4/x	

Resolución:

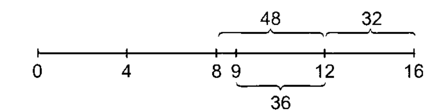
$$\frac{2}{x} + \frac{4}{x} + \frac{6}{x} + \frac{4}{x} = 1 \Rightarrow \frac{16}{x} = 1 \Rightarrow x = 16$$

Entonces la tabla quedaría así:

		h_i	f_i
0 – 4	2/16	0,125	16
4 – 8	4/16	0,250	32
8 – 12	6/16	0,375	48
12 – 16	4/16	0,250	32

Luego la media sería:

$\bar{x} = 2(0{,}125) + 6(0{,}25) + 10(0{,}375) + 14(0{,}25) = 9$



$$\left.\begin{array}{l} 4 \longrightarrow 48 \\ 3 \longrightarrow x \end{array}\right\} x = 36$$

$\therefore$ Tiene más que la media: 36 + 32 = 68

44. Se tiene la siguiente tabla de frecuencias. Hallar la media.

Sueldos	f_i	H_i
– 1360		
–	60	0,50
–		0,80
1520 –	80	

Resolución:

Completando la tabla:

Sueldos	f_i	h_i	H_i
– 1360			
1360 –	60		0,50
– 1520			0,80
1520 –	80	0,20	1,00

El ancho de clases sería: $\frac{1520 - 1360}{2} = 80$ y el tamaño de muestra "n": $0{,}20 = 80/n \Rightarrow n = 400$

Finalmente, completando la tabla:

Sueldos	f_i	h_i	H_i	x_i
1280 – 1360	140	0,35	0,35	1320
1360 – 1440	60	0,15	0,50	1400
1440 – 1520	120	0,30	0,80	1480
1520 – 1600	80	0,20	1,00	1560

Luego, la media sería:

$\bar{x} = 1320(0{,}35) + 1400(0{,}15) + 1480(0{,}30) + 1560(0{,}20) = 1428$

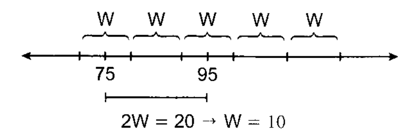
45. A 60 alumnos se aplicó un examen de matemática y se anotó el tiempo en minutos que demoró cada uno en contestar el examen. Los tiempos se ordenaron en una tabla de frecuencias con amplitudes iguales.

He aquí algunos resultados.

TIEMPO (minutos)	Y_i	f_i	F_i	$\%_i$
⟨ –]	75			10
⟨ –]		14		
⟨ –]	95			
⟨ –]			52	20
⟨ –]				
Total				

Indique el número de alumnos que terminaron el examen en más de hora y media.

Resolución:
De la tabla con 5 intervalos.



Para conocer cuántos terminaron en más de hora y media, necesitamos el total (F_5) y cuántos terminaron en una hora y media o menos (F_2).

$10\%60 = f_1 \Rightarrow f_1 = 6 \Rightarrow F_2 = 6 + 14 = 20$

TIEMPO (minutos)	x_i	f_i	F_i	$100\%h_i$
⟨70 – 80]	75	6		0,10
⟨80 – 90]		14	20	
⟨90 – 100]	95			
⟨100 – 110]			52	0,20
⟨110 – 120]			60	
Total		60		

Número de estudiante que terminaron el examen en más de hora y media (en más de 90 minutos), es: $F_5 - F_2 = 60 - 20 = 40$

46. Indicar el valor de verdad de las siguientes proporciones:

I. La mediana es la medida promedio que depende del número de datos ordenados y no de los valores de estos datos.
II. La moda es la medida de tendencia central, que señala el valor más común de una serie de datos.
III. Si los datos tienden a distribuirse alrededor de su media, la varianza será pequeña.

Resolución:

I. La mediana es el valor que divide al conjunto de datos en dos partes con igual cantidad de datos en cada parte, depende de los valores de estos datos.

Ejemplo (1): $\underbrace{7;\ 9;\ 10;\ 11;\ 15;\ 15}_{6\text{ datos}}$

$$\Rightarrow Me_1 = \frac{10+11}{2} = 10{,}5$$

Ejemplo (2): $\underbrace{7;\ 10;\ 12;\ 12;\ 13;\ 17}_{6\text{ datos}}$

$$\Rightarrow Me_2 = \frac{12+12}{2} = 12$$

(I) es falsa

II. Por definición de moda.
(II) es verdadera.

III. La varianza (σ^2) es una medida de dispersión, que señala como se distribuyen los datos alrededor de la media. Mientras menor sea su valor, los datos se concentran más alrededor de su media.
(III) es verdadera.

∴ FVV

47. Indique verdadero (V) o Falso (F)

I. La desviación standar es la raíz cuadrada de la varianza.
II. La varianza es una medida de tendencia central.
III. La moda y la mediana de los valores 1; 1; 2; 5; 4; 6; 7; 5; 9; 8; 10; 10; 5 poseen el mismo valor.

Resolución:

I. desviación stándar: $\sigma = \sqrt{\text{varianza}}$
(I) es verdadero

II. La varianza es una medida de dispersión.
(II) es falso

III. Falta Completar:
"La moda y la mediana de los valores: 1; 1; 2; 5; 4; 6; 7; 5; 9; 8; 10; 10; 5, poseen el mismo valor"

⇒ ordenando los datos:

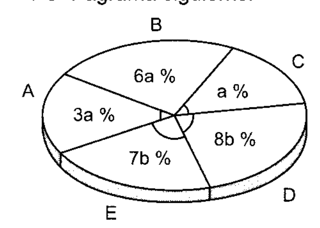
$$\underbrace{1;\ 1;\ 2;\ 4;\ 5;\ 5}_{6\text{ datos}};\ 5;\ \underbrace{6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10;\ 10}_{6\text{ datos}}$$

Me = 5

Dato que más se repite: Mo = 5
Donde Me = Mo = 5
(III) es verdadero

∴ VFV

48. Se realizó una encuesta de las preferencias de un grupo de personas sobre 5 diarios A, B, C, D y E y se obtuvo el diagrama siguiente:



Indicar que tanto por ciento del total tiene el diario de mayor preferencia si este es máximo (a y b enteros).

Resolución:
El total es 100%, luego:
$(3a + 6a + a + 8b + 7b)\% = 100\%$
$10a + 15b = 100$

Simplificando: $2a + 3b = 20$
Como a + b son enteros, se forma una ecuación diofántica, resolviendo:

$a = 10 - \dfrac{3b}{2}$; donde b debe ser par

i) Si a es máximo y b es mínimo: $b = 2 \wedge a = 7$

Los porcentajes serán:

A: 21% B: 42% C: 7%
D: 16% E: 14%

ii) Si b es máximo y a es mínimo: $b = 6 \wedge a = 1$

Los porcentajes serán:

A: 3% B: 6% C: 1%
D: 48% E: 42%

∴ El mayor porcentaje se presenta en (ii), para el diario D: 48%

49. El registro del número de tazas de café consumidas por un empleado durante 20 días es:
4; 0; 1; 3; 2; 4; 3; 0; 4; 5; 2; 1; 4; 3; 2; 1; 4; 2; 1; 4
Determine la mediana y la moda.

Resolución:

Ordenando los datos:

0	0	1	1	1
1	2	2	2	2
3	3	3	4	4
4	4	4	4	5

Mediana, Para datos no clasificados:

$Me = \frac{1}{2}$(suma de los términos centrales)

$Me = \frac{1}{2}(2 + 3) = 2{,}5$

Moda: Mo = 4 (dato que más aparece)

∴ $Me = 2{,}5 \wedge Mo = 4$

50. Las notas de un examen fueron 10; 12; 15; 16; 17. Hallar la desviación standard de los números.

Resolución:

$$\bar{x} = \frac{10 + 12 + 15 + 16 + 17}{5} = 14$$

Se forma la tabla:

x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
10	$10 - 14 = -4$	$(-4)^2 = 16$
12	$12 - 14 = -2$	$(-2)^2 = 4$
15	$15 - 14 = 1$	$1^2 = 1$
16	$16 - 14 = 2$	$2^2 = 4$
17	$17 - 14 = 3$	$3^2 = 9$

Varianza: $\sigma^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}$

$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{16 + 4 + 1 + 4 + 9}{5} = 6{,}8$

∴ Desviación standard: $\sqrt{\sigma^2} = \sqrt{6{,}8} = 2{,}6$

51. El promedio aritmético de 51 números múltiplos consecutivos $(\overset{\circ}{16})$ es "a"; si se añade el próximo múltiplo consecutivo $(\overset{\circ}{16})$ su promedio es "b".

Hallar: b − a

Resolución:

Sean los múltiplos consecutivos de 16:

$\underbrace{16n\ ;\ 16(n+1)\ ;\ 16(n+2);\ \ldots\ 16(n+50)}_{51\ \text{números}}$

1.^{er} promedio: $P_1 = \frac{16n + 16(n+1) + \ldots 16(n+50)}{51}$

$$P_1 = \frac{16\left[(n + n + 50)\frac{51}{2}\right]}{51}$$

$P_1 = 16(n + 25)$ ...(1)

Se añade el siguiente $(\overset{\circ}{16})$

$\underbrace{16n\ ;\ 16(n+1)\ ;\ 16(n+2);\ \ldots\ 16(n+51)}_{52\ \text{números}}$

2.° promedio: $P_2 = \frac{16n + 16(n+1) + \ldots + 16(n+51)}{52}$

$$P_2 = \frac{16\left[(n + n + 51)\frac{52}{2}\right]}{52}$$

$P_2 = 16(n + 25{,}5)$ ...(2)

Restando (2) − (1)

∴ $P_2 - P_1 = 16(n + 25{,}5) - 16(n + 25) = 8$

52. ¿Qué tanto por ciento de los números 1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 11; 12; 18 y 22 están comprendidos en el intervalo $\langle \bar{x} - \sigma ; \bar{x} + \sigma \rangle$?

Resolución:

Calculando $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8 + 10 + 11 + 12 + 18 + 22}{12}$$

$\Rightarrow \bar{x} = 8{,}5$

Luego se determina:

$$\frac{\sum x_i^2}{n} = \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + 6^2 + 8^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2 + 18^2 + 22^2}{12}$$

$\Rightarrow \frac{\sum x_i^2}{n} = \frac{1328}{12} = 110{,}\hat{6}$

De la expresión:

$\sigma^2 = 110{,}\hat{6} - (8{,}5)^2 = 38{,}42$

$\Rightarrow \sigma = \sqrt{38{,}42} = 6{,}2$

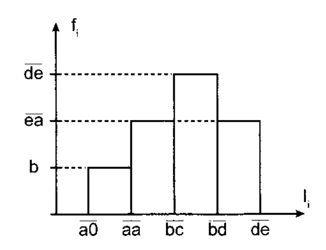
$\langle x - \sigma; x + \sigma \rangle = \langle 8{,}5 - 6{,}2 ; 8{,}5 + 6{,}2 \rangle$

$\Rightarrow \langle x - \sigma; x + \sigma \rangle = \langle 2{,}3 ; 14{,}7 \rangle$

Los datos que se encuentran en $\langle 2{,}3 ; 14{,}7 \rangle$ son: $\underbrace{3;\ 4;\ 5;\ 6\ ;\ 8\ ;\ 10;\ 11;\ 12}_{8\ \text{datos}}$

∴ Porcentaje de datos: $\left(\frac{8}{12}\right)100\% = 66{,}\hat{6}\%$

53. Dado el siguiente polígono de frecuencia, con ancho de clase constante.



Señale la suma de la moda y la mediana

Resolución:

Siendo el ancho de clase constante:

$\underbrace{\overline{aa} - \overline{a0}}_{a} = \underbrace{\overline{bd} - \overline{bc}}_{d-c} = \overline{de} - \overline{bd} \Rightarrow a + c = d \quad ...(\alpha)$

En el segundo intervalo:

$\overline{aa} + a = \overline{bc}$ (a: ancho de clase) — Se cumple: $2a = \overline{1c}$ ...(β); $a + 1 = b$...(γ)

De (β): $2a = 10 + c \Rightarrow a = 5 + c/2$

Reemplazando en (α): $\left(5 + \frac{c}{2}\right) + c = d$

Solo c = 2, d = 8, a = 6

En (γ): b = 7 ∧ e = 4

Si c = 4; d = 11 no es cifra

Si c = 0; a = 5 y e= 0, pero $\overline{ea} \neq 05$

Se forma la tabla:

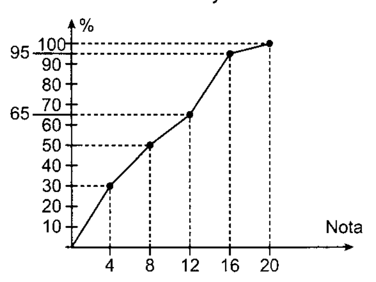
I_i	f_i
[60; 66⟩	7
[66; 72⟩	46
[72; 78⟩	82
[78; 84⟩	46

Moda: $x_o = 72 + 6\left(\frac{82-46}{82-46+82-46}\right) = 75$

Mediana: $x_m = 72 + 6\left(\frac{90,5-53}{82}\right) = 74,74$

$\therefore\ x_o + x_m = 149,74$

54. El siguiente cuadro muestra la ojiva de la frecuencia relativa acumulada de las notas de un examen de ingreso a la UNI, ¿Qué porcentaje de alumnos tuvieron una nota entre 9 y 15?



Resolución:

Señalamos la tabla:

I_i	x_i	h_i%
[0; 4⟩	2	30%
[4; 8⟩	6	20%
[8; 12⟩	10	15%
[12; 16⟩	14	30%
[16; 20⟩	18	5%

Se conoce: $h_i\% = H_i\% = 30\%$, para cada frecuencia relativa simple, se puede indicar:

$h_i\% = H_i\% - H_{i-1}\%$

Como no se desean cantidades exactas, se puede tomar las frecuencias relativas para el cálculo de porcentajes:

i. Mayores a 9, menores a 12: x

Donde: $\frac{12-8}{15\%} = \frac{12-9}{x} \Rightarrow x = 11,25\%$

ii. Mayores a 12, menores a 15: y

Donde: $\frac{16-12}{30\%} = \frac{15-12}{y} \Rightarrow y = 22,5\%$

$\therefore$ Porcentaje total: 11,25% + 22,5% = 33,75%

55. Se ha elaborado una tabla de frecuencias con las siguientes características:

Alcance: [2; 20] ; W= 2;

n.° datos: {log(CA(N) + N)} × 100 ; $F_2 = 30$

$F_3 = 60$; $F_5 = \frac{10}{3}F_3$; $h_6 = 0,1\hat{3}$; $\frac{f_1}{f_2} = \frac{7}{8}$

Si la distribución es simétrica, calcular $\frac{f_8 + f_5}{x_1 + x_2}$

Sabiendo que $N = 5^k \times 3^{k+1}$, siendo $\phi_{(N)} = 360$.

Resolución:

$\phi_{(N)} = 360$; $N = 5^k \times 3^{k+1}$

$5^{k-1} \times 4 \times 3^k \times 2 = 360 \quad \therefore k = 2$

log(CA(N) + N) × 100 = 300 = n.° datos

Tabla de los datos

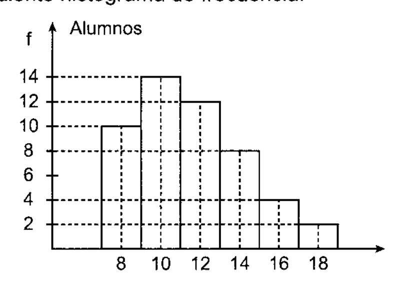
I_i	X_i	F_i	h_i	f_i
[2; 4⟩	3	14		14
[4; 6⟩	5	30		16
[6; 8⟩		60		30
[8; 10⟩				40
[10; 12⟩		200		100
[12; 14⟩		240	$0,\widehat{13}$	40
[14; 16⟩				30
[16; 18⟩				16
[18; 20]		300		14

$f_i = h_i$(N.° datos) $x_1 = 3$; $x_2 = 5$

$F_2 = f_1 + f_2 \Rightarrow f_1 = 14 \wedge f_2 = 16$

$f_6 = \frac{12}{90} = \frac{f_6}{300} \Rightarrow f_6 = 40 \quad \therefore \frac{f_8 + f_5}{x_1 + x_2} = \frac{16 + 100}{5 + 3} = \frac{29}{2}$

56. En el curso de electromagnetismo, se tienen las notas de los alumnos, distribuidas según el siguiente histograma de frecuencia:



Determine la nota promedio del curso.

Resolución:

Siendo el ancho de clase constante: $\omega = 2$

se utiliza para hallar el promedio $\bar{x}$:

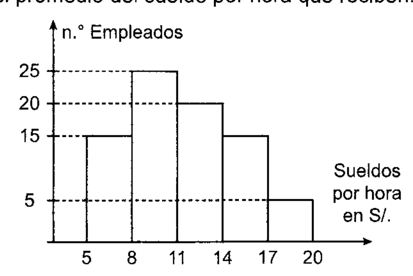
$$\bar{x} = x_1 + \omega\left(\frac{0 \times f_1 + 1 \times f_2 + 2 \times f_3 + \ldots}{f_1 + f_2 + f_3}\right)$$

Reemplazando:

$$\bar{x} = 8 + 2\left[\frac{0(10) + 1(14) + 2(12) + 3(8) + 4(4) + 5(2)}{10 + 14 + 12 + 8 + 4 + 2}\right]$$

$\therefore \bar{x} = 11{,}52$

57. En el siguiente histograma se muestran los sueldos por hora de un grupo de empleados. Calcular el promedio del sueldo por hora que reciben:



Resolución:

Del histograma

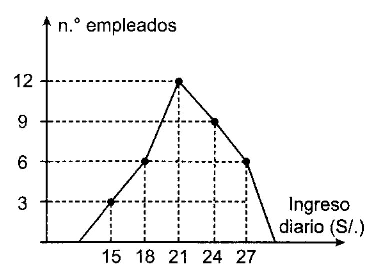
I_i	f_i
[5; 8⟩	15
[8; 11⟩	25
[11; 14⟩	20
[14; 17⟩	15
[17; 20⟩	5

Cálculo de $\bar{x}$:

$$\bar{x} = 6{,}5 + \frac{3[0(15) + 1(25) + 2(20) + 3(15) + 4(5)]}{15 + 25 + 20 + 15 + 5}$$

$\therefore \bar{x} = 11{,}375$

58. Según el siguiente diagrama, obtenido en una empresa considerando los ingresos diarios de los empleados.



¿Cuántos tendrán un ingreso inferior al promedio de los ingresos?

Resolución:

Hallando el promedio:

$$\bar{x} = 15 + \frac{3[0(3) + 1(6) + 2(12) + 3(9) + 4(6)]}{3 + 6 + 12 + 9 + 6}$$

$\bar{x} = 21{,}75$

En el intervalo $I_3 = [19{,}5; 22{,}5\rangle$, se conoce:

$x_3 = 21$; $f_3 = 12$

- Mayores a 21,75, pero menores a 22,5: x

$$\frac{22{,}5 - 19{,}5}{12} = \frac{22{,}5 - 21{,}75}{x} \Rightarrow x = 3$$

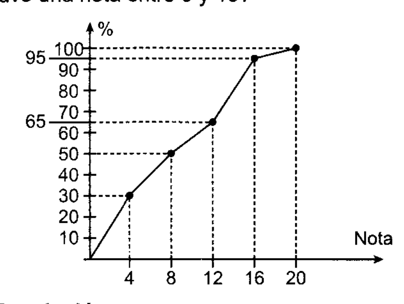
- Mayores a 22,5: $f_4 = 9$; $f_5 = 6$

  Luego, mayores de 21,75: 3 + 9 + 6 = 18

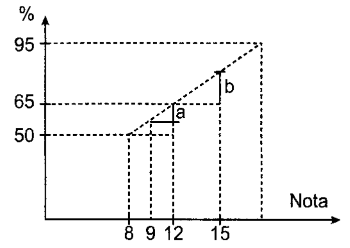
Se desea conocer los que tienen menos de 21,75, como el total es 36.

$\therefore$ Con menos de S/.21,75: 36 − 18 = 18

59. El siguiente cuadro muestra la ojiva de la frecuencia relativa acumulada de las notas de un examen de ingreso a la UNI. ¿Qué porcentaje de alumnos tuvo una nota entre 9 y 15?



Resolución:



En el intervalo [12; 16]

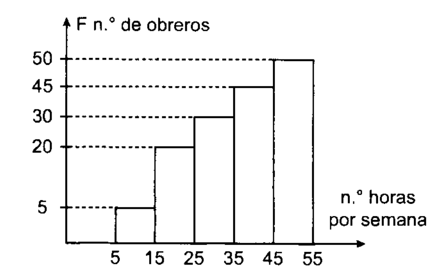
$$\frac{12-8}{12-9} = \frac{95\% - 65\%}{b\%} \Rightarrow b\% = 22{,}5\%$$

En el intervalo [8; 12]

$$\frac{12-8}{12-9} = \frac{65\% - 50\%}{a\%} \Rightarrow a\% = 11{,}25\%$$

Por lo tanto, el porcentaje de alumnos que obtuvo notas entre 9 y 15 sería: a% + b% = 33,75%

60. En el siguiente diagrama escalonado se muestran las horas trabajadas por semana de un grupo de obreros. Calcule el promedio del número de horas que trabajan.



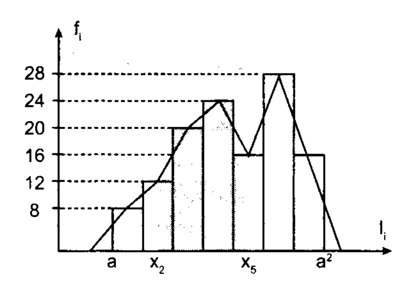
Resolución:

Siendo el gráfico correspondiente a las frecuencias acumuladas, las diferencias de las alturas señalan la frecuencia absoluta.

I_i	x_i	f_i
[5; 15⟩	10	5
[15; 25⟩	20	15
[25; 35⟩	30	10
[35; 45⟩	40	15
[45; 55⟩	50	5

Se observa que la distribución es simétrica con 5 intervalos, luego: $\bar{x} = x_3 = 30$

61. En el siguiente histograma de ancho de clase común. Si el área sombreada es 464, señale la suma de la moda y la mediana (a es entero).



Resolución:

Del diagrama, el área sombreada será:

$$\frac{f_2\omega}{2} + f_3\omega + f_4\omega + \frac{f_5\omega}{2} = 464$$

Conocidas las frecuencias:

$f_2 = 12$; $f_3 = 20$; $f_4 = 24$; $f_5 = 16$

Se reemplaza obteniendo: $\omega = 8$

Se observa que: $a + \underbrace{8 + 8 + \ldots + 8}_{7 \text{ veces}} = a^2$

$\Rightarrow a + 56 = a^2$, de donde a = 8

Se obtiene la tabla siguiente:

I_i	f_i	F_i
[8; 16⟩	8	8
[16; 24⟩	12	20
[24; 32⟩	20	40
[32; 40⟩	24	64
[40; 48⟩	16	80
[48; 56⟩	28	108
[56; 64⟩	16	124

Cálculo de la moda: x_o

$$x_o = 48 + 8\left(\frac{28-16}{28-16+28-16}\right) \Rightarrow x_o = 52$$

Cálculo de la mediana: x_m

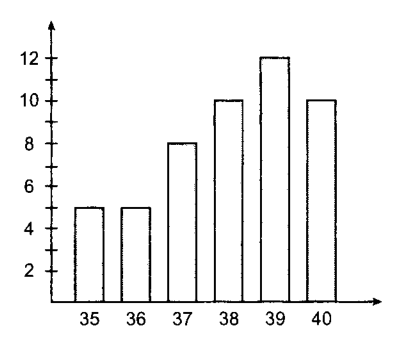
$$x_m = 32 + 8\left(\frac{62-40}{24}\right) \Rightarrow x_m = 39,\hat{3}$$

$\therefore\ x_o + x_m = 52 + 39,\hat{3} = 91,\hat{3}$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2004 - I)

En el gráfico se presenta la distribución del número de pacientes atendidos diariamente en un centro de salud de la zona norte de Lima. La muestra fue de 50 días de atención.



Determine la validez de las siguientes afirmaciones:

I. En el 20% de los días el centro de salud atendió a lo más 39 pacientes.
II. En el 90% de los días el centro de salud ha atendido un mínimo de 36 pacientes.
III. En más del 50% de los días el centro de salud atendió al menos 38 pacientes.

A) FVV B) VFF C) FVF
D) FFV E) VVF

Resolución:

I. En el 20% de los días (los 10 primero días) se han atendido, a lo más 36 pacientes. (Falsa)
II. En el 90% de los días (45 días) como mínimo se han atendido 35 pacientes. (Falsa)
III. En más del 50% de los días (del día 25 al 50) se han atendido como mínimo 38 pacientes. (Verdadera)
$\therefore$ FFV

Clave: D

PROBLEMA 2 (UNI 2005 - I)

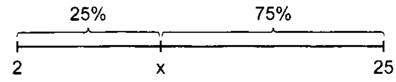
La tabla siguiente presenta la distribución de los trabajadores de una empresa según el tiempo de servicio en años.

Tiempo de servicios (años)	Número de trabajadores
[2 ; 5⟩	12
[5 ; 8⟩	15
[8 ; 10⟩	18
[10 ; 15⟩	12
[15 ; 20⟩	10
[20 ; 25⟩	8

Determine el tiempo de servicio para el 25% de los trabajadores.

A) 5,55 años B) 6,35 años C) 7,10 años
D) 14,82 años E) 15,30 años

Resolución:



Se determina el valor de x:

25%75 = 18,75

6,75

12 15 16 12 10 8 (años de servicio)

2 5 x 8 10 15 20 25

a

A partir del esquema: $x = 5 + a$; $\frac{a}{3} = \frac{6,75}{15}$

$\therefore$ Resolviendo: $a = 1,35$; $x = 6,35$ años

Clave: B

PROBLEMA 3 (UNI 2005 - II)

Con una muestra de tamaño m, se construyó la siguiente tabla de datos:

⟨0; 2]	⟨2; 4]	⟨4; 6]	⟨6; 3]	⟨8; 10]
0	$n^2 - 3a$	$(n^2 - a)^2$	n^2	a

Entonces el valor de a es:

A) $n^2 - \sqrt{1 + m} + 1$, si $n^2 - a \geq 0$

B) $n^2 + \sqrt{1 + m} + 1$, si $n^2 - a \geq 0$

C) $\frac{m - n^2}{2}$

D) $2n^2 - \sqrt{1 + m}$

E) $\sqrt{n^2 + m}$

Resolución:

Tabla de datos:

⟨0; 2]	⟨2; 4]	⟨4; 6]	⟨6; 8]	⟨8; 10]
0	$n^2 - 3a$	$(n^2 - a)^2$	n^2	a

Por teoría, sabemos que la suma de las cantidades de cada intervalo es igual al tamaño de la muestra.

$\Rightarrow 0 + n^2 - 3a + (n^2 - a)^2 + n^2 + a = m$

$\Rightarrow (n^2 - a)^2 + 2(n^2 - a) = m$

Completando cuadrados:

$\Rightarrow (n^2 - a)^2 + 2(n^2 - a) + 1 = m + 1$

$\Rightarrow [(n^2 - a) + 1]^2 = m + 1$

$\underbrace{(n^2 - a)}_{+} + \underbrace{1}_{+} = \pm \underbrace{\sqrt{m + 1}}_{+}$ ...(I)

Como las cantidades de cada intervalo son positivas $\Rightarrow n^2 - a > 0$

De (I): $(n^2 - a) + 1 = \sqrt{m+1}$

$\therefore\ a = n^2 - \sqrt{1+m} + 1;\ \text{si } n^2 - a > 0$

Clave: A

PROBLEMA 4 (UNI 2006 - I)

Se tiene la siguiente distribución de frecuencias de una variable aleatoria discreta X, para un total de 100 observaciones.

X	3	4	5	6	7	8	9	10
f_x	10	12	18 + p	18 + q	4	8	15	10

Se sabe que la moda de esta distribución es un valor impar y la diferencia de las dos mayores frecuencias es 1. Calcule la esperanza matemática de X.

A) 4,0 B) 5,3 C) 6,3
D) 7,2 E) 8,6

Resolución:

Utilizando los datos del problema:
Se sabe que la moda es impar, o sea que tendrá la mayor frecuencia. Observando la tabla:

$18 + p > 18 + q \Rightarrow p > q$

Además, el número de observadores es 100; ahora apoyándonos en los datos de la tabla:

$$10 + 12 + (18 + p) + (18 + q) + 4 + 8 + 15 + 10 = 100$$
$$p = 5 - q \qquad \ldots(\beta)$$

Finalmente por dato del enunciado, la diferencia de las dos frecuencias mayores es 1.
Ahora, considerando $(p > q)$:

$(18 + p) - (18 + q) = 1 \Rightarrow p - q = 1 \quad \ldots(\theta)$

(β) en (θ): $(5 - q) - q = 1 \Rightarrow q = 2 \wedge p = 3$

Por teoría la frecuencia relativa:

$$h_x = \frac{f_x}{\Sigma f_x} \qquad \ldots(\gamma)$$

Con estos datos podemos construir una tabla:

X	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
f_x	10	12	21	20	4	8	15	10	100
h	0,10	0,12	0,21	0,20	0,04	0,08	0,15	0,10	1

Finalmente, por concepto de esperanza: $E_x = \Sigma h_x X$

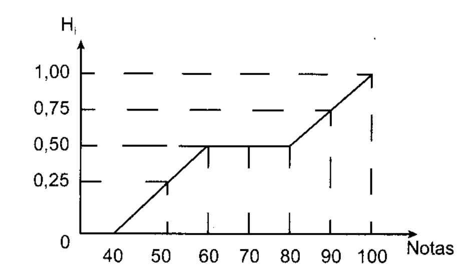
$$E_x = (0{,}10)3 + (0{,}12)4 + (0{,}21)5 + (0{,}20)6 + (0{,}04)7 + (0{,}08)8 + (0{,}15)9 + (0{,}10)10$$

$\therefore\ E_x = 6{,}3$

Clave: C

PROBLEMA 5 (UNI 2007 - II)

El siguiente gráfico representa las frecuencias relativas acumuladas (H_i) de las notas de un examen.



Determine los valores para las proposiciones:

I. ¿Cuántos de los evaluados obtuvieron notas entre 70 y 80?
II. ¿Qué porcentaje de evaluados tienen notas menores a 65?
III. Si hay en total 400 evaluados, ¿cuántos obtuvieron notas entre 90 y 100?

A) 0; 50%; 80 B) 0; 45%; 80 C) 20; 45%; 80
D) 0; 50%; 100 E) 0; 50%; 120

Resolución:

I_i	H_i	h_i
[40; 50⟩	25%	25%
[50; 60⟩	50%	25%
[60; 70⟩	50%	0%
[70; 80⟩	50%	0%
[80; 90⟩	75%	25%
[90; 100⟩	100%	25%

Del gráfico:

I. Nota entre 70 y 80: 0
II. Nota menor que 65: 50%
III. Si hay en total 400 evaluados, tienen notas entre 90 y 100. Luego: $(1{,}00 - 0{,}75)400 = 100$

$\therefore$ I. 0; II. 50%; III. 100

Clave: D

PROBLEMA 6 (UNI 2008 - I)

Para cubrir el puesto de mecánico electricista se recibieron solicitudes de 200 postulantes. En el cuadro siguiente se presenta la distribución de los postulantes según experiencia laboral en el área.

Experiencia laboral (años)	Porcentaje acumulado
[5 ; 7⟩	8%
[7 ; 9⟩	18%
[9 ; 11⟩	34%
[11 ; 13⟩	65%
[13 ; 15⟩	100%

Entonces la experiencia laboral mínima para el 90% de los postulantes es:

A) 7,4 años B) 8,4 años C) 10,4 años
D) 12,4 años E) 14,4 años

Resolución:

Experiencia laboral (años)	Porcentaje acumulado	%
[5 ; 7⟩	8%	8%
[7 ; 9⟩	18%	10%
[9 ; 11⟩	34%	16%
[11 ; 13⟩	65%	31%
[13 ; 15⟩	100%	35%

Tomando 2% en el 2.° intervalo:

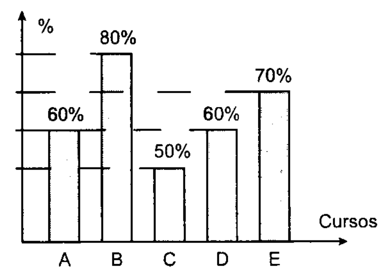
$\Rightarrow \frac{2\%}{10\%}(9-7)=\frac{1}{5}(2)=0,4$

$\therefore$ Experiencia mínima: 7 + 0,4 = 7,4

Clave: A

PROBLEMA 7 (UNI 2009 - II)

Del gráfico:
Tasa de aprobación en los cursos A, B, C, D y E de un grupo de estudiantes.



Se afirma:

I. El porcentaje promedio de desaprobación por curso es 36%.
II. El porcentaje de aprobación del curso D es el 60% del porcentaje de aprobación del curso B.
III. La tasa de aprobación del curso E es el 60% de la tasa de aprobación en el curso C.

¿Cuáles de las afirmaciones son verdaderas?

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y II E) I y III

Resolución:

Sea M el total de estudiantes, del gráfico tenemos:

Curso	Aprobación	Desaprobación
A	60%M	40%M
B	80%M	20%M
C	50%M	50%M
D	60%M	40%M
E	70%M	30%M

I. El promedio de desaprobación del curso es:

$\overline{P}=\frac{180\%M}{5}=36\%M$

Luego, la proporción (I) es verdadera

II. De los datos, se tiene:

Curso	%Aprobación
B	80%M
D	60%M

Para justificar la proposición planteamos:
$60\%M = n\%(80\%M) \Rightarrow n = 75\%$

Entonces, la proposición (II) es falsa

III. De los datos tenemos:

Curso	%Aprobación	%Desaprobación
C	50%M	50%M
E	70%M	30%M

Para justificar la proposición, planteamos:
$30\%M = n\%(50\%M) \Rightarrow n = 60\%$

Luego, la proposición (III) es verdadera

Clave: E

PROBLEMA 8 (UNI 2012 - II)

Indique la alternativa correcta después de determinar si cada proposición es verdadera (V) o falsa (F) según el orden dado:

I. La frecuencia relativa es el cociente entre la frecuencia acumulada del i-ésimo intervalo y el número total de datos.
II. La mediana de un conjunto de n datos es el valor que más veces se repite.
III. Si {18; 19; 16; 17; 14} son los datos que representan las notas de un examen, entonces la desviación estándar es mayor que 1,7.

A) VVV B) VVF C) FVV
D) FFV E) FFF

Resolución:

I. Frecuencia relativa = h_i

$h_i=\frac{f_i}{N}$ f_i ⟶ frecuencia absoluta; N ⟶ total de datos

(F)

II. Me = Dato central
Mo = Dato de mayor frecuencia (F)

III. $M_A=\frac{18+19+16+17+14}{5}=16,8$

$\text{Var}[x]=\frac{(1,2)^2+(2,2)^2+(0,8)^2+(0,2)^2+(2,8)^2}{5}$

$\text{Var}[x]=\frac{14,8}{5}=2,96$

$\sigma=\sqrt{\text{Var}[x]}=\sqrt{2,96}=1,72>1,7$ (V)

$\therefore$ FFV

Clave: D

PROBLEMA 9 (UNI 2014 - II)

Una encuesta realizada en la ciudad de Lima muestra la tabla siguiente:

N.° de hijos	N.° de familias
0 – 2	1200
3 – 6	400
7 – 9	150
10 – 12	30
13 – 15	15

Calcule el número de familias que tiene de 4 hasta 11 hijos.

A) 380 B) 470 C) 480
D) 570 E) 580

Resolución:

Distribución uniforme:

4 – 6 ⇒ 300 familias
7 – 9 ⇒ 150 familias
10 – 11 ⇒ 20 familias

∴ De 4 a 11 hijos: 470 familias

Clave: B

PROBLEMA 10 (UNI 2015 - I)

Semanalmente, un trabajador ahorra cierta cantidad en soles, y durante 40 semanas ahorra las siguientes cantidades:

21	35	29	31	23	22	28	33
28	25	31	26	24	27	27	33
37	29	19	36	23	18	46	12
26	41	30	18	39	15	24	4
25	33	10	28	20	27	17	31

Se construye una tabla de frecuencias de 7 intervalos de igual longitud fija A. Si F_5 es la frecuencia acumulada del quinto intervalo (ordenados los extremos de los mismos de forma creciente), determine el valor de $(A + F_5) - 1$

A) 30 B) 32 C) 37 D) 38 E) 39

Resolución:

Tabla de frecuencias:

I_i	f_i	F_i
[4; 10⟩	1	1
[10; 16⟩	3	4
[16; 22⟩	6	10
[22; 28⟩	12	22
[28; 34⟩	12	34
[34; 40⟩	4	38
[40; 46⟩	2	40

A = 6: Intervalo de igual longitud
$F_5 = 34$ ∴ $(A + F_5) - 1 = 39$

Clave: E

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Dada la siguiente distribución:

Clases	f_i
[35; 45⟩	5
[45; 55⟩	12
[55; 65⟩	18
[65; 75⟩	14
[75; 85⟩	6
[85; 95⟩	3

Determine la mediana:

A) 60,23 B) 61,67 C) 60,49
D) 61,50 E) N. A.

2. Dada la distribución:

I_i	[35; 45⟩	[45; 55⟩	[55; 65⟩	[65; 75⟩	[75; 85⟩
f_i	4	5	10	15	13

Determinar la suma de la media, mediana y moda.

A) 199,6 B) 201,2 C) 202,6
D) 204,1 E) N. A.

3. Determinar la moda de la siguiente distribución:

I_i	[0; 1⟩	[1; 2⟩	[2; 3⟩	[3; 4⟩	[4; 5⟩
f_i	3	10	17	8	5

A) 2,43 B) 2,35 C) 2,25
D) 2,65 E) 2,56

4. En una encuesta se obtuvo la siguiente información:

Puntaje	f_i	h_i
[20; 40⟩		
[40; 50⟩		
[50; 60⟩	30	
[60; 80⟩		
[80; 96⟩		
Total	90	

Se sabe además que:

$$h_1 = h_5;\ h_2 = h_4 \text{ y } h_2 - h_1 = 1/9$$

Determinar la media.

A) 56,5 B) 57 C) 57,5
D) 58 E) N. A.

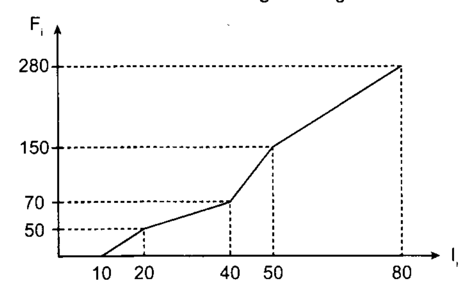
5. Dada la distribución:

Clases	f_i
[35; 45⟩	5
[45; 55⟩	12
[55; 65⟩	18
[65; 75⟩	14
[75; 85⟩	6
[85; 95⟩	3

Hallar la mediana.

A) 61,67 B) 60,54 C) 59,72
D) 61,84 E) 62,21

6. Hallar la mediana de la siguiente gráfica:



A) 48,72 B) 45,25 C) 44,5
D) 47,5 E) N. A.

7. Determine la moda de la siguiente distribución:

I_i	f_i
[4; 9⟩	6
[9; 14⟩	10
[14; 19⟩	12
[19; 24⟩	9

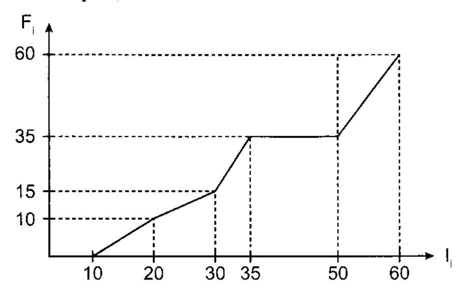
A) 16 B) 18 C) 15
D) 17 E) 12

8. Hallar la mediana de la siguiente distribución:

I_i	f_i
[2; 6⟩	2
[6; 10⟩	6
[10; 14⟩	4
[14; 18⟩	10
[18; 22⟩	18

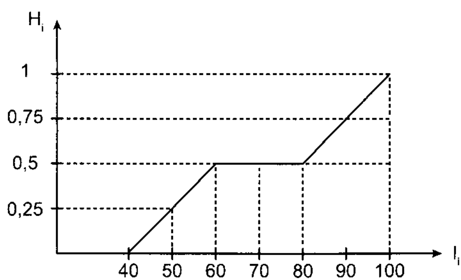
A) 16,8 B) 17,2 C) 18,1
D) 17,6 E) 17,5

9. De la ojiva, hallar la mediana.



A) 31,25 B) 32,25 C) 33,75
D) 31,50 E) N. A.

10. El siguiente gráfico:



ha sido formado con las notas obtenidas en un examen; diga:

I. ¿Cuántos alumnos obtiene notas entre 70 y 80?
II. ¿Qué porcentaje del total tienen notas menores a 65?
III. Si la población corresponde a un total de 400 alumnos, ¿cuántos obtendrán nota entre 90 y 100?

A) 0; 50%; 80 B) 0; 45%; 80
C) 20; 50%; 80 D) 0; 50%; 100
E) 0; 50%; 120

11. ¿Cuáles de las siguientes relaciones son posibles?

I. $H_4 = 0,3$; $n = 10$; $f_3 = 31$
II. $h_1 = 4$; $f_3 = 12$; $H_4 = 15$
III. $h_2 = 0,4$; $n = 50$; $f_1 = 20$
IV. $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = 1$; $n_6 = 3$; $H_5 = 1$
V. $H_4 = 0,2$; $H_5 = 0,12$; $h_5 = 0,08$

A) I, II B) I, III, V C) II, IV
D) III E) Todas

12. En cierta fábrica se hizo un estudio sobre la edad de los trabajadores. Se obtuvo la siguiente tabla:

Edad de los trabajadores	f_i
[20 – 29]	8
[30 – 39]	15
[40 – 49]	30
[50 – 59]	12
[60 – 69]	5

¿Cuántos trabajadores tienen menos de 50 años?

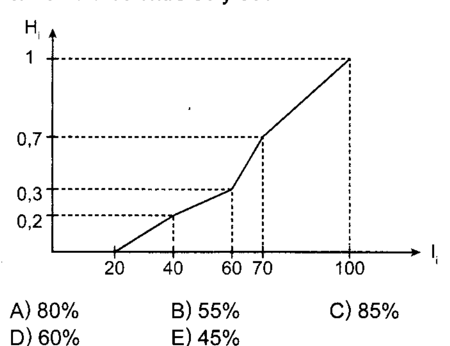
A) 25 B) 43 C) 45
D) 53 E) N. A.

13. Determinar la media de los datos tabulados en la siguiente tabla:

I_i	f_i
[12; 16⟩	5
[16; 20⟩	12
[20; 24⟩	10
[24; 28⟩	13

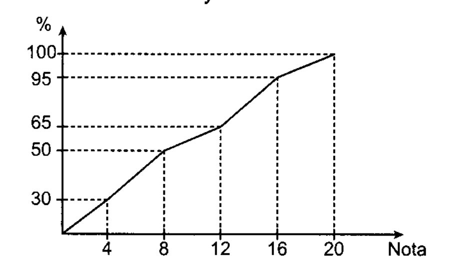
A) 21,2 B) 23,1 C) 24,3
D) 20,7 E) 25,3

14. De la siguiente ojiva, ¿qué porcentaje de datos toma valores entre 50 y 80?



A) 80% B) 55% C) 85%
D) 60% E) 45%

15. El siguiente cuadro muestra la ojiva de la frecuencia relativa acumulada de las notas del examen de ingresos a la UNI. ¿Qué porcentaje de alumnos tuvieron notas entre 6 y 12?



A) 25%　B) 30%　C) 35%
D) 40%　E) 45%

16. Se tiene que:

P: 2; 3; 3; 5; 7; 6; 7; 5; 8; 4
Q: 6; 7; 5; 2; 9; 1; 7; 6; 4; 2
R: 3; 4; 7; 6; 8; 9; 7; 6; 3; 2

Se pide determinar en qué orden se encuentran las medianas:

A) Me_Q; Me_P; Me_R　B) Me_Q; Me_R; Me_P
C) Me_P; Me_Q; Me_R　D) Me_P; Me_R; Me_Q
E) Me_R; Me_Q; Me_P

17. Del tablero incompleto de la distribución de frecuencias de las notas de alumnos, completar el tablero con un archivo de clase constante igual a 2.

	x_i	I_i	F_i	$x_i f_i$
				28
[8 – 10⟩				72
			22	110
		50		
				195
			50	

Si la nota aprobatoria es 10, ¿qué porcentaje de alumnos aprobados existen?

A) 56%　B) 66%　C) 68%
D) 70%　E) 76%

18. Del problema anterior determinar la clase en la cual se encuentra el mayor porcentaje de alumnos y hallar dicho porcentaje.

A) 3.ª, 26%　B) 4.ª, 52%　C) 3.ª, 28%
D) 5.ª, 26%　E) 4.ª, 26%

19. Para dictar la clase de aritmética poseo 6 tizas de diferentes colores cuyo peso en gramos ordenados de menor a mayor son 9; 9; 13; 32; 33. Calcular la mediana.

A) 13　B) 16　C) 15
D) 14,5　E) 13,5

20. Para el siguiente conjunto de datos: 1; 1; 2; 3; 2; 5; 7; 8; 13; 14; 2; 3; 14; 5; 6; 7; 8 determinar la semisuma de la mediana y moda.

A) 2,5　B) 3,5　C) 7
D) 5　E) N. A.

21. Un estudio de la cantidad de personas que fallecen por causas naturales a ciertas edades arroja el siguiente resultado (por cada año). Ciudad; Lima.

Edad	n.° de personas fallecidas
[40 – 50⟩	2000
[50 – 60⟩	4800
[60 – 70⟩	12 000
[70 – 80⟩	11 200

Hallar la frecuencia relativa porcentual de los fallecidos no mayores de 60 años.

A) 24,6%　B) 22,7%　C) 25,8%
D) 29,2%　E) 19,9%

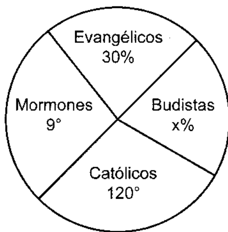
22. En una prueba de Aptitud Académica se evaluaron a n estudiantes y las notas obtenidas se clasificaron en una tabla de distribución de frecuencias como se muestra a continuación:

Marca de clase	45	55	65	75	85
Frecuencia relativa	$\frac{k}{50}$	$\frac{3k}{100}$	$\frac{2k}{25}$	$\frac{3k}{50}$	$\frac{k}{100}$

¿Qué porcentaje de estudiantes obtuvieron una nota menor que 60 puntos a mayor o igual que 80 puntos?

A) 70%　B) 25%　C) 30%
D) 15%　E) 30%

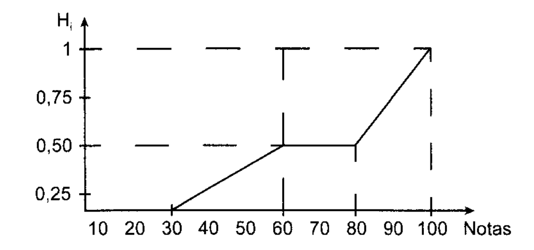
23. Se encuesta a 1000 personas acerca de su creencia religiosa obteniendo la siguiente distribución



¿Qué porcentaje de encuestados son budistas?

A) 65%　B) 45%　C) 80%
D) 75%　E) 32,5%

24. El siguiente gráfico:



ha sido elaborado con las notas obtenidas en un examen. Diga:

a) ¿Cuántos alumnos obtiene notas entre 70 y 90 puntos, si el total de alumnos es 4000?
b) ¿Cuántos alumnos tienen notas mayores o iguales a 80 puntos, si el total de alumnos es 4000?
c) ¿Qué porcentaje de alumnos obtiene notas desde 36 hasta 90 puntos?

A) 1000; 3000; 50% B) 1500; 2000; 50%
C) 1000; 2000; 65% D) 1500; 3000; 65%
E) 1000; 2500; 65%

25. En cierta fábrica se hizo el estudio sobre la edad de los trabajadores y se obtuvo la siguiente distribución de frecuencias:

Edades de los trabajadores	Número
[20 – 30⟩	20
[30 – 40⟩	16
[40 – 50⟩	18
[50 – 60⟩	11
[60 – 70⟩	5

¿Cuál es el porcentaje de trabajadores que tiene más de 40 años?

A) 47,14% B) 47% C) 45,24%
D) 47,2% E) 48,57%

26. La siguiente distribución muestra un peso en gramos de 600 paquetes de un determinado producto.

g	h_i
10 – 14	0,5k
15 – 19	17/100
20 – 24	2k
25 – 29	k
30 – 35	0,13

Determinar, ¿cuántos paquetes tienen pesos comprendidos entre 12 y 22 gramos?

A) 370 B) 290 C) 252
D) 390 E) 410

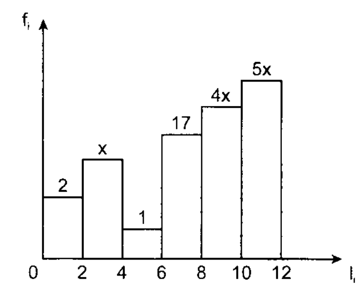
27. La siguiente tabla corresponde a las distribuciones del número de pacientes atendidos en febrero del 2004, por 75 puestos de salud de la selva. Los anchos de clase son iguales.

n.° de pacientes	x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
[; ⟩	30			0,04	
[; ⟩			12		
[; ⟩		15			
[; ⟩		21			
[; ⟩		12			
[; ⟩		9			
[; 160⟩					
Total					

Calcular: $H_4 + h_5$

A) 0,80 B) 0,64 C) 0,16
D) 0,96 E) 0,84

28. Dado el siguiente histograma de frecuencias absolutas; tomados de una muestra de tamaño 120



Hallar: $f_4 + f_5$

A) 70 B) 71 C) 57
D) 83 E) 80

29. La tabla muestra la distribución del ingreso familiar correspondiente a 80 familias. Determinar el número de familias que ganan de 200 soles a más.

Intervalo de ingresos S/.	I_i	F_i	h_i
[160 – 170⟩			
[170 – 180⟩	48	60	
[180 – 190⟩			0,125
[190 – 200⟩			0,075
[200 – 210⟩			

A) 14 B) 10 C) 26
D) 4 E) 30

30. La tabla muestra una distribución de frecuencias absolutas y relativas de los dividendos pagados por acción por 20 empresas escogidas al azar de la lista de la bolsa de valores de Tokio.

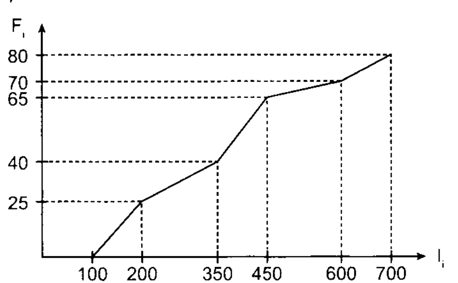
Clases	f_i	h_i
[0,00 – 0,10⟩		0,05
[0,10 – 0,20⟩	0	
[0,20 – 0,30⟩	1	
[0,30 – 0,40⟩		
[0,40 – 0,50⟩		0,15
[0,50 – 0,60⟩		0,20
[0,60 – 0,70⟩	2	
[0,70 – 0,80⟩		0,05
[0,80 – 0,90⟩	3	
[0,90 – 1,00⟩		0,15

Completando la tabla se pide:

$h_2 + h_3 + h_4 + h_7 + h_9$

A) 0,9 B) 0,6 C) 0,8
D) 0,7 E) 0,5

31. De la siguiente ojiva acerca de los sueldos de empleados:



Hallar la mediana.

A) 320 B) 340 C) 350
D) 400 E) 450

32. El sueldo medio de los obreros de una fábrica es de $286, ¿qué porcentaje de hombres y mujeres trabajan en la fábrica si sus sueldos medios respectivos son $300 y $200?

A) 65%; 35% B) 60%; 40% C) 55%; 45%
D) 68%; 32% E) N. A.

33. Se tiene la siguiente tabla de frecuencias relativas de 320 empleados según su edad

Edades	h_i
19 – 21	0,15
22 – 24	0,25
25 – 27	0,40
28 – 30	0,10
31 – 33	0,10

¿Cuántos empleados tienen edades entre 23 y 32 años?

A) 216 B) 225 C) 240
D) 215 E) 200

34. La tabla adjunta contiene datos sobre número de profesores de secundaria de distintos colegios de una provincia. El trabajo quedó inconcluso, por lo que se pide completar y averiguar cuántos colegios tienen menos de 22 profesores?

Clases	x_i	f_i
		4
		8
	20	
		10
		2

Sabiendo también que los anchos de clase son iguales, se observó 40 colegios y su media es 19,80.

A) 4 B) 12 C) 15
D) 28 E) 32

35. Un grupo de 80 datos tiene como mínimo dato 10 y como máximo valor 60. Si se divide en 5 intervalos de igual amplitud, se observa que la frecuencia absoluta simple es simétrica siendo además $f_1 + f_2 = 35$; además f_5 es un cuadrado perfecto múltiplo de 8. Hallar la moda de la distribución.

A) 22,5 B) 32,5 C) 58,5
D) 47,5 E) A y D son modas

36. Una empresa que se dedica a preparar dietas, proyecta lanzar al mercado una dieta rigurosa. Los empleados de una compañía se presentaron como voluntarios para dicha promoción. Se realizó un muestreo con 80, dichos empleados elegidos aleatoriamente. Los resultados del chequeo de los pesos (en kg) fueron los siguientes:

80,6	85,8	49,6	79,1	64,4	66,2	79,3	59,4	72,9	73,6
53,2	60,2	91,2	74,6	78,6	81,4	58,6	68,2	67,4	55,6
76,9	77,4	67,9	63,7	49,9	46,4	68,8	67,3	72,3	75,8
88,3	94,6	57,3	67,3	74,3	73,2	90,4	76,3	52,7	71,7
75,6	41,8	73,6	71,4	83,2	67,4	99,3	62,3	89,2	86,8
65,2	62,1	44,6	82,9	81,7	70,4	74,6	76,9	85,7	40,9
64,2	75,3	50,1	61,1	42,3	86,6	56,2	70,6	47,3	66,9
80,2	80,2	71,6	77,1	94,9	61,4	82,1	78,3	51,2	79,3

¿Cuántos empleados tienen pesos entre 45 y 60 kg?

A) 13 B) 14 C) 15
D) 16 E) 17

37. Los salarios de una empresa son en promedio S/.500, con posterioridad se incorporan a la em-

presa un grupo de obreros igual al 25% de los que estaban anteriormente. El nuevo grupo ingresa a la empresa con un salario medio igual al 60% de los antiguos. Dos meses más tarde, la empresa concede un aumento de salario de S/.30. El promedio de salario del total de obreros es:

A) S/. 460 B) S/. 455 C) S/. 450
D) S/. 445 E) S/. 490

38. Al estudiar el consumo diario de leche, se verificó que en cierta región el 20% de las familias consumen menos de un litro, 50% de las familias consumen entre 1 y 2 litros, 20% consumen entre 2 y 3 litros. Para la variable en estudio, ¿cuál es la media y la mediana respectivamente?

A) 1,7 y 1,6 B) 1,72 y 1,62 C) 1,76 y 1,62
D) 1,8 y 1,7 E) N. A.

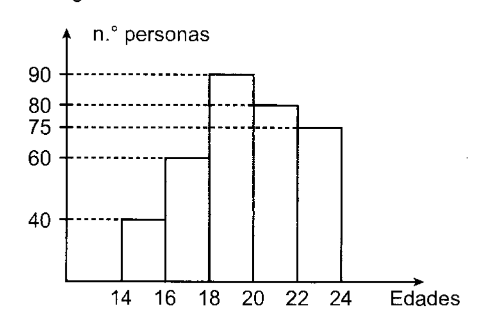
39. El ingreso por habitante de la ciudad de Lima es de S/.31 000 al año, el sector obrero que constituye el 60% de la población limeña, percibe 1/5 del ingreso total. Calcule el ingreso por habitante de este sector.

A) S/. 10 672,25 B) S/. 10 472,8
C) S/. 12 500,8 D) S/. 1200,5
E) S/. 10 333,33

40. En una distribución de 5 intervalos de ancho de clase común el $x_2 = 300$ y $x_4 = 420$. Determine el límite superior del cuarto intervalo.

A) 420 B) 380 C) 390
D) 510 E) 450

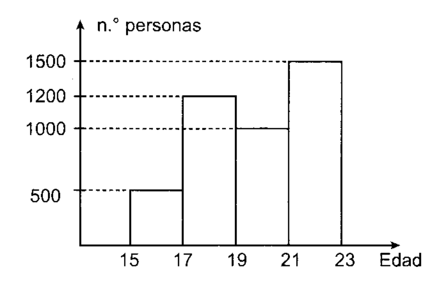
41. Se hizo una encuesta en un auditorio sobre el número de personas que postulan a medicina y se las clasifica por edades. Luego se hizo el siguiente histograma:



Determine el tamaño de la muestra.

A) 360 B) 345 C) 348
D) 367 E) 381

42. En el último examen de admisión se observó las edades de los postulantes, las cuales se muestran en el cuadro. Calcule la edad promedio.



A) 18,1 B) 17,2 C) $19,\hat{6}$
D) $14,\hat{6}$ E) 21,2

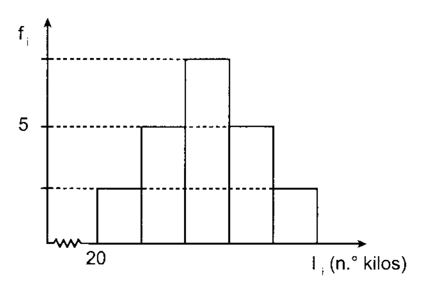
43. La tabla muestra la distribución de los salarios de 100 empleados de la compañía Timo S. A.

Intervalos de salarios	f_i	F_i	h_i	H_i
[300; 360⟩				
[360; 420⟩				3
[420; 480⟩				
[480; 540⟩				
[540; 600]			1	

¿Cuántos empleados ganan menos de 480 soles?
Dato: $f_4 = 2f_3$

A) 48 B) 50 C) 56
D) 53 E) 39

44. El histograma muestra la distribución de un grupo de 50 alumnos según su peso en intervalos de igual ancho:



$\bar{x} = 45$; $f_3 - f_9 = 34$

Halle que tanto por ciento del total de alumnos pesan entre 35 y 65 kilos

A) 17% B) 18% C) 19%
D) 21% E) 27%

45. En una prueba de destreza manual se observa el tiempo, en segundos, que utilizan un grupo de personas para realizar cierta tarea. La distribución de frecuencias, considerando cinco intervalos de igual ancho, resultó simétrica. El menor y mayor tiempo

observado fue 50 y 200 segundos. Además, el 20% de las personas utilizaron 95 segundos o menos y el 30% utilizó más de 140 segundos. Halle el intervalo centrado en la mediana que contenga el 50% de los datos.

A) [93; 140] B) [98; 151] C) [95; 152]
D) [93; 160] E) [95; 150]

46. La distribución de los obreros de una empresa según su salario en una tabla con cinco intervalos de ancho común se observó que el menor sueldo observado es 450, además:

$x_2 = 525$; $f_2 = 10$; $f_4 = 12$; $h_3 = 0,3$; $f_1 = 8$; $f_3 = 33$

Reconstruya la tabla de frecuencias y calcule la media de los sueldos:

A) 646, 2 B) 651,40 C) 641,02
D) 648,02 E) 642,05

47. El precio en soles, de un artículo ha sido registrado en varias tiendas, obteniéndose los siguientes valores:

30 25 19 21 18 20 ,33 44 8 9 22
21 32 29 36 41 33 31 31 25 30 23

Construya una tabla con 6 intervalos de igual longitud a partir de la tabla indicar verdadero o falso.

i) El precio tiende a distribuirse alrededor de un intervalo pero de manera asimétrica.
ii) La mediana es menor que la moda.
iii) El 12,5% de las tiendas ofrecen el artículo a un precio no menor de 38 soles.

A) VVV B) FFV C) VFF
D) FFF E) VVF

48. En una distribución simétrica de 7 intervalos de igual amplitud, se pide calcular la MA, según los siguientes datos:

$C = 10$; $F_1 = 8$
$x_3 + f_3 = 160$ $H_3 = 0,21$
$f_2 + f_5 = 62$ $H_6 = 0,96$

A) 120 B) 130 C) 131
D) 128 E) 136

49. En el siguiente cuadro con ancho de clase constante igual a 20.

I_i	x_i	f_i	F_i	X_if_i
[; 〉				880
				1990
			35	1800
		13		
[; 200〉				
		4	70	

Calcular la media de los datos

A) 152,5 B) 159, 3 C) 161,4
D) 158,3 E) 158,5

50. La tabla muestra la distribución del ingreso familiar de 80 familias.

Ingreso familiar	f_i	F_i	h_i
[160 – 170〉			
[170 – 180〉	48	60	
[180 – 190〉			0,125
[190 – 200〉			0,075
[200 – 210〉			

Calcular el número de familias que no ganan más de 200 nuevos soles.

A) 70 B) 84 C) 82
D) 76 e) 81

51. Completar la siguiente tabla de distribución de frecuencias.

I_i	f_i	F_i	h_i	H_i
[; 50〉		18		
				0,30
	27			
[90;]			0,40	

Calcular $f_2 + h_i$

A) 20,5 B) 21,4 C) 23,4
D) 20,8 E) 21,8

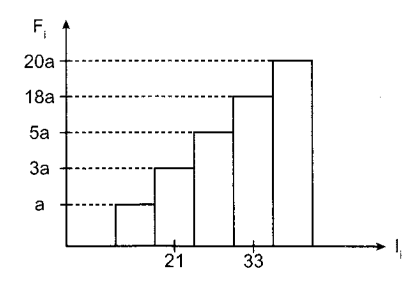
52. Dada la distribución de frecuencias de cierto número de niños:

Edades	3	5	7	9
f_i	4			15
F_i		13	26	

Calcular la diferencia entre la mediana y la moda.

A) 3 B) 1 C) 4 D) 5 E) 2

53. En el siguiente diagrama escalonado de igual ancho de clase, calcule $\overline{x}$ + Mo.



A) 63 B) 63,1 C) 63,2
D) 63,5 E) 63,9

54. En la siguiente tabla de distribución de frecuencias, determine el valor de la mediana.

I_i	x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
[; 〉					
[; 〉	10,5				
[; 〉			50		
[; 〉				0,05	
[; 〉	19,5				0,80
[; 〉			120		

A) 18 B) 18,1 C) 18,2
D) 18,3 E) 18,4

55. Se muestra una tabla de distribución de frecuencia simétrica, con igual ancho de clase.

I_i	x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
[; 〉					
[; 〉	8,5			0,4	
[; 〉			60		
[; 〉					0,55
[; 〉	20,5				
[; 〉					

Calcule la $\bar{x}$ + Me.

A) 28 B) 29 C) 26
D) 30 E) 31

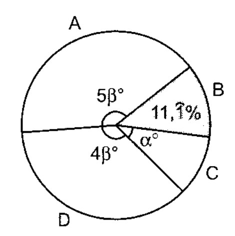
56. La familia Suma Paco está formada por 6 integrantes. Se sabe que la pareja tuvo mellizos y que la edad del padre es mayor en 5 años a la edad de la madre, siendo el mayor de los hermanos mayor en 12 años al menor de ellos. Sobre sus edades actuales se sabe $\bar{x} = 26{,}5$; Mo = 19; Me = 21,6, calcule la suma de las edades actuales de la madre y del menor de sus hijos.

A) 50 B) 51 C) 52
D) 53 E) 54

57. Florcita tiene 7 hermanos de los cuales tres son trillizos. Si de sus edades actuales se sabe que $\bar{x} = 17{,}\overset{\frown}{571428}$, Mo = 7 y Me = 20; además la edad del mayor de los hermanos excede a la edad del menor de ellos en 25 años. Calcule la suma del mínimo y máximo valor que puede tomar la edad del segundo de los hermanos, si se sabe que no tiene hermanos mellizos.

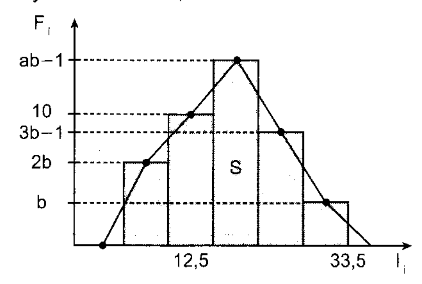
A) 55 B) 54 C) 56
D) 57 E) 54

58. En el siguiente gráfico de pastel, se muestran las preferencias de cierto número de personas por las revistas A, B, C y D. Si los que prefieren las revistas B y D son los 4/5 del número de personas que prefieren las revistas A y C. Calcule $\beta + \alpha$.



A) 70 B) 72 C) 74
D) 76 E) 80

59. Del siguiente histograma, se calculó la $\bar{x}$ de los datos y resulto ser 17,54

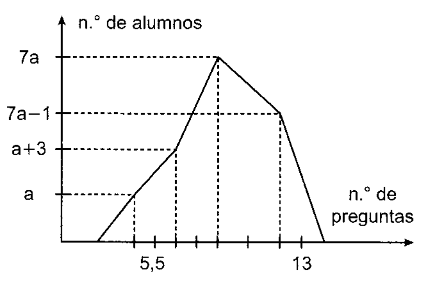


A) 280 u^2 B) 290 u^2 C) 298 u^2
D) 300 u^2 E) 302 u^2

60. El siguiente polígono de frecuencias muestra la distribución de alumnos, según el número de preguntas que contestan en una práctica calificada. Si además:

$$\frac{f_2 + f_4}{f_1 + f_3} = \frac{13}{12}$$

¿Cuántos alumnos contestaron entre 4 y 12 preguntan?



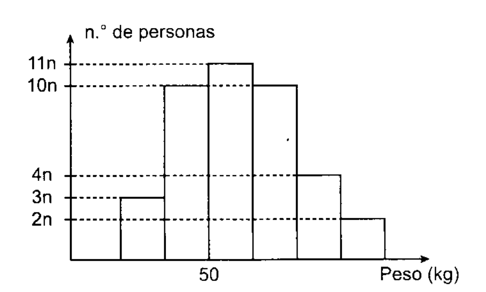
A) 30 B) 32 C) 33
D) 35 E) 37

61. En la siguiente tabla de distribución de frecuencias, calcule la Mo, sabiendo que el ancho es común.

I_i	x_i	f_i	F_i	h_i
[; 〉				0,20
[a ; 〉		a + 3	55	
[; 〉	$\frac{4a-3}{2}$	25		
[; 〉				
[33 ; 〉				0,25

A) 30,2 B) 30,4 C) 30,6
D) 30,8 E) 40

62. Dado el siguiente histograma. ¿Cuántas personas tiene un peso comprendido entre 48 y 93 kg? Siendo $F_4 + f_4 = 220$; $W = f_5$; y W_1 el ancho de clase común.



A) 116 B) 113 C) 136
D) 139 E) 135

63. En un aula del cielo anual C, V, se seleccionó una muestra de 50 estudiantes con el fin de pronosticar cuántos de ellos tendrían una posibilidad de ingresar a la UNI. Para ello se tomó como datos las notas que obtuvieron cada uno de ellos en el último concurso de becas.

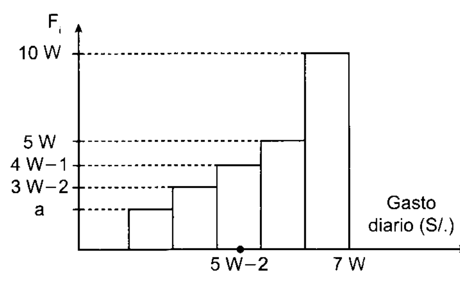
I_i	x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
[; 〉		a			
[; 〉	8,7			0,64	
[; 〉		a+2			0,76
[; 〉			41		
[; 19,2〉					

¿Qué tanto por ciento de alumnos tendrá la posibilidad de ingresar a la universidad?, si para que suceda ello, debe obtener una nota mayor o igual a 10,2.

A) 22% B) 32% C) 20%
D) 30% E) 34%

64. Del siguiente diagrama escalonado, calcule $\bar{x}$, sabiendo que:

W: Ancho de clase común; $\left(\frac{f_5 + f_1}{3}\right) = w + 5$



A) 20 B) 20,6 C) 20,8
D) 20,4 E) 20,5

65. Dado el siguiente cuadro estadístico, halle a + b + c, si los intervalos de clase tienen ancho común.

I_i	x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
			20		
[20; 〉		30			
	a		c	0,20	
		b			0,70
[32; 〉		60			

A) 150 B) 160 C) 166
D) 180 E) 156

66. A continuación se presenta datos recopilados sobre el número de tardanzas de cada uno de los 40 trabajadores que tiene una fábrica durante el mes de noviembre.

1	2	3	3	5	1	0	8	1	2
4	3	3	5	12	0	4	3	0	10
0	0	4	9	3	1	3	2	1	3
5	5	6	8	2	2	1	3	2	0

a. Según la regla de Sturges, calcule cuántos intervalos de clase se emplearon y qué ancho se escogerá.
b. Calcular cuántos trabajadores tienen menos de 10 tardanzas e indique qué tanto por ciento es.

A) 5 y 80% B) 8 y 90% C) 6 y 90%
D) 8 y 95% E) 6 y 95%

67. Sea la siguiente distribución:

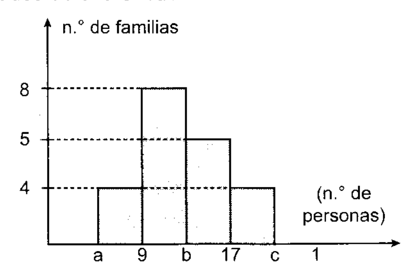
I_i	x_i	f_i	h_i	H_i
[13 ; 〉		39		
[; 〉			0,3	
[; 〉				0,9
[; 37]				

Si además: $h_3 - h_1 = 0,34$

Calcule $x_3 + f_4$

A) 40 B) 45 C) 48
D) 50 E) 58

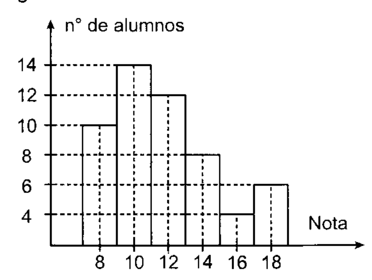
68. En el siguiente histograma, nos muestra los resultados de una encuesta.



Calcule $(a + b + c + \bar{x})$, si la distribución se realiza en intervalos de igual ancho de clase.

A) 55,6 B) 51,71 C) 41,17
D) 53,83 E) 54,72

69. En el curso de electromagnetismo, se tiene las notas de los alumnos, distribuidos según el siguiente histograma:



Entonces la nota promedio del curso es:

A) 10 B) 12 C) 11,8
D) 12,4 E) 13

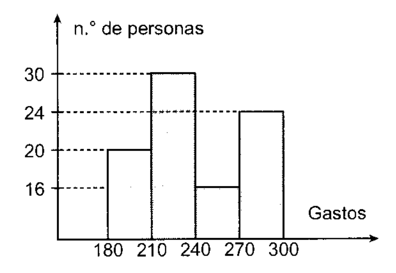
70. En una encuesta realizada a 109 familias, sobre el número de hijos; se obtuvo la siguiente información:

n.° de hijos	n.° de familias
[0 – 2⟩	40
[2 – 5⟩	33
[5 – 9⟩	24
[9 – 14]	12

Calcule el número de familias que poseen desde 3 a 11 hijos.

A) 52 B) 50 C) 54
D) 48 E) 56

71. En el siguiente diagrama de barras se muestra los gastos realizados por un grupo de personas.



¿Cuántas personas gastan desde 192 hasta 280?

A) 58 B) 60 C) 65
D) 66 E) 70

72. Si el siguiente cuadro de distribución es simétrico

I_i	f_i	F_i	h_i
[20 ; ⟩	12		
[; 36⟩			0,15
[; ⟩			
[; ⟩			
[;]		60	

Calcule la moda.

A) 39 B) 40 C) 40,5
D) 41 E) 41,5

73. En una fábrica de tornillos, todos los días se toma una muestra aleatoria de 60 tornillos y se anota la cantidad de defectuosos. La siguiente tabla muestra la distribución para 39 días.

Número de defectuosos	0 – 5	6 – 11	12 – 17	18 – 23
Número de días	a	b	c	3

En 9 días se encontraron menos de 3 defectuosos.
En 19 días se encontraron no menos de 8 defectuosos.
¿En cuántos días se observaron no más de 19 defectuosos, pero sí más de 12?

A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

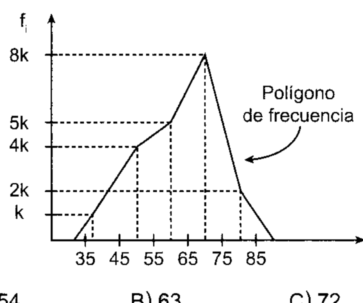
74. Complete el siguiente cuadro, si tiene ancho de clase común.

I_i	x_i	f_i	h_i	H_i
[30 ; 50 ⟩		a	0,20	
[; ⟩	b	20		
[c ; ⟩				0,90
[; ⟩			d	
Total		50		

Calcule la media de a, b, c y d.

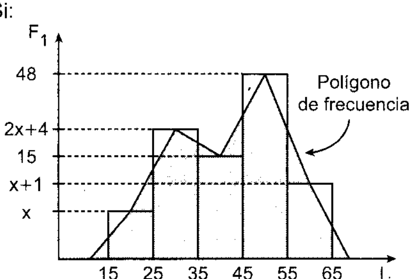
A) 35,255 B) 32,525 C) 37,5
D) 35,025 E) 37,25

75. Luego de clasificar los datos, se elaboró el polígono de frecuencias, determine la $\overline{X}$ de estos datos clasificados.



A) 54 B) 63 C) 72
D) 65 E) 52

76. Si:



Calcule la MA de los datos, si el área sombreada es 1000.

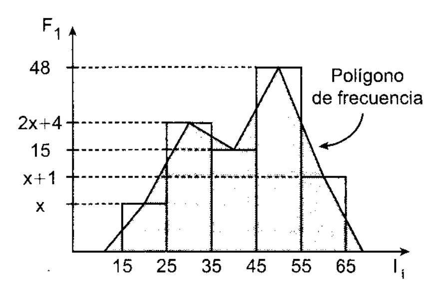
A) 43 B) 47 C) 51
D) 40 E) 45

77. En una comunidad se estudia la cantidad de aves que poseen 10 familias, siendo la mayor cantidad la del señor Lores con 80 aves y la menor de la señora Josefina con 10 aves.

Clasifique a las familias teniendo en cuenta la cantidad de aves. Dé como respuesta el ancho de cada clase si es entero.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

78. Si:



Calcule:

I. ¿Cuántos alumnos pesan menos de 58 kg?
II. ¿Cuántos alumnos pesan más de 61 kg y menos de 68 kg?

A) 96 y 112 B) 112 y 75 C) 112 y 195
D) 96 y 175 E) 96 y 125

79. De un grupo de personas se hace una distribución en 5 intervalos, según sus edades, resultando ésta simétrica y con ancho de clase común (ω). Además:

$x_2 = 23{,}5$; $x_4 = 37{,}5$; $h_5 = 0{,}14$; $\frac{F_2}{F_3} = \frac{2}{3}$

Determine qué tanto por ciento de dicho grupo son menores de 27 años o mayores de 40 años.

A) 54% B) 50% C) 52%
D) 55% E) 28%

CLAVES

1. D	12. D	23. E	34. E	45. E	56. C	67. E	78. D
2. D	13. A	24. C	35. E	46. E	57. C	68. B	79. A
3. A	14. B	25. E	36. A	47. C	58. E	69. B	
4. E	15. A	26. C	37. E	48. D	59. D	70. A	
5. A	16. C	27. A	38. A	49. E	60. D	71. D	
6. A	17. E	28. C	39. B	50. D	61. D	72. B	
7. A	18. D	29. D	40. E	51. A	62. B	73. A	
8. B	19. D	30. B	41. B	52.	63. B	74. D	
9. C	20. B	31. C	42. C	53. E	64. C	75. B	
10. D	21. B	32. E	43. B	54. D	65. C	76. A	
11. D	22. B	33. A	44. A	55. B	66. E	77. E	

Temas selectos | 20 capítulo

Carl Gustav Jacob Jacobi nació el 10 de diciembre de 1804 en Potsdam, Prusia (actual Alemania), y murió el 18 de febrero de 1851 en Berlín. Fue un matemático alemán, autor muy prolífico que contribuyó en varios campos de la matemática, principalmente en el área de las funciones elípticas, el álgebra, la teoría de números y las ecuaciones diferenciales. También destacó en su labor pedagógica, por la que se le ha considerado el profesor más estimulante de su tiempo.

Jacobi estableció con Niels Henrik Abel la teoría de las funciones elípticas. Demostró la solución de integrales elípticas mediante la aplicación de las funciones, series exponenciales introducidas por él mismo. Desarrolló los determinantes funcionales, llamados después jacobianos y las ecuaciones diferenciales.

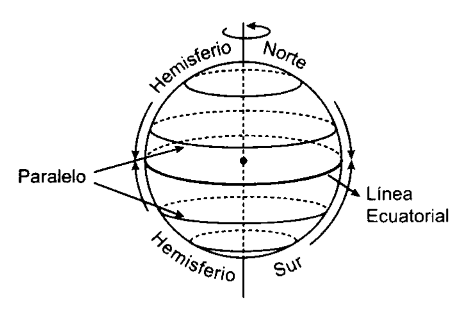
En 1825 presentó su tesis doctoral, una discusión analítica de la teoría de fracciones. En 1829 publicó *Fundamenta nova theoria functionum ellipticarum* trabajo en el que asentó nuevas bases para el análisis de funciones elípticas, fundamentado en el uso de la función theta de Jacobi. En 1831 contrajo matrimonio con Marie Schwinck. Durante esta época trabajó principalmente en ecuaciones diferenciales y determinantes. En 1851 contrajo una gripe que le debilitó gravemente. Poco tiempo más tarde contraería viruela, enfermedad que le mataría pocos días más tarde.

Fuente: Wikipedia

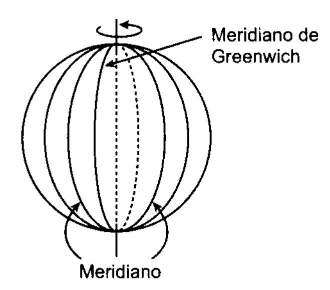
LONGITUD GEOGRÁFICA Y TIEMPO

Definiciones previas

Paralelo. Es una circunferencia imaginaria sobre la Tierra, horizontal y corta perpendicularmente al eje geográfico de la Tierra. El paralelo principal es la línea ecuatorial y divide a la Tierra en dos hemisferios: Norte y Sur.

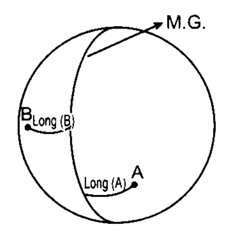


Meridiano. Es una circunferencia imaginaria sobre la Tierra, es vertical y pasa por los polos. El meridiano principal es el meridiano de Greenwich y divide a la Tierra en dos hemisferios: Oriente (Este) y Occidente (Oeste).

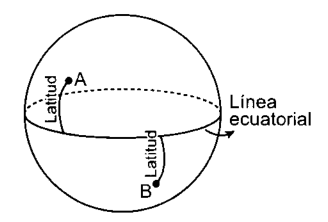


Longitud. La longitud geográfica de un punto sobre la Tierra, es la distancia en unidades de ángulo, que existe a través de un paralelo, entre el punto y el Meridiano de Greenwich, que se toma como referencia (0° de longitud) .

Ejemplo:

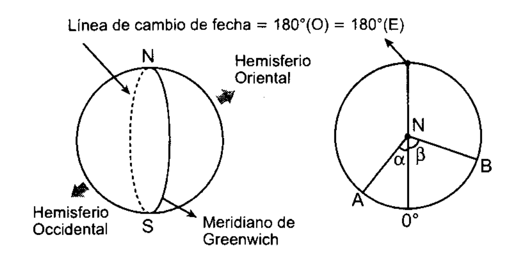


Latitud. Se denomina latitud geográfica de un punto sobre la Tierra, a la distancia angular que existe, a través de un meridiano, entre el punto y la línea ecuatorial.



La línea de cambio de fecha, es una línea imaginaria, a través de un meridiano ubicado a la longitud de 180° Oeste (O o W), 180° Este (E) del Meridiano de Greenwich.

El meridiano opuesto al de Greenwich es el meridiano de línea de cambio de fecha.



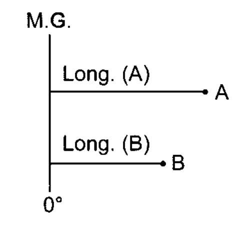
Clases de longitud

- **Longitud oeste u occidental**
  Si el lugar se encuentra ubicado al oeste del Meridiano de Greenwich.
  Por ejemplo: La longitud geográfica de Bogotá: 70°04'53" O.
- **Longitud este u oriental**
  Si el lugar se encuentra ubicado al este del meridiano de Greenwich.
  Por ejemplo: La longitud geográfica de Hong Kong: 114°10'19" E.

Diferencia de longitud entre dos puntos. La diferencia de longitud entre dos puntos sobre la Tierra es la distancia medida en unidades de ángulo, que existe entre los meridianos que pasan por los dos puntos.

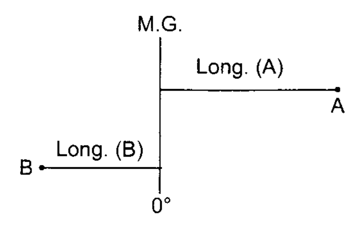
Se presentan dos casos:

- Los puntos A y B se encuentran en el mismo hemisferio.



Difer. Long. (A; B) = Long. (A) – Long. (B)

- Los puntos A y B se encuentran en distintos hemisferios.



Difer. Long. (A; B) = Long. (A) + Long. (B)

Relación entre la diferencia de longitud y la diferencia horaria. Cada punto sobre la Tierra tarda 24 horas en dar una vuelta completa o describe 360°.

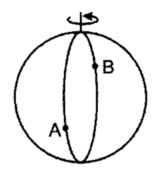
De donde, tenemos:

Unidades de tiempo	< >	Unidades de longitud
24 h	< >	360°
1 h	< >	15°
1 min	< >	15'
1 s	< >	15"

De donde, se deduce la relación:

$$\text{Difer. hora } (A; B) = \frac{\text{Difer. Long. } (A; B)}{15}$$

- Otras equivalencias, son:
  1° de longitud < > 4 min de tiempo.
  1' de longitud < > 4 s de tiempo.
  1° = 60' de longitud y 1' = 60" de longitud.
- Todo punto que se encuentra a la izquierda (Oeste) de otro, tiene horas más tempranas.



En A es más temprano que en B

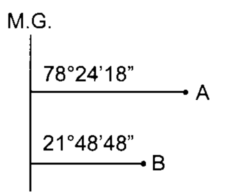
- Se llama Huso Horario a la superficie terrestre comprendida entre dos meridianos de longitudes múltiplos de 15° consecutivos, es decir, cuya diferencia de longitud es de 15° (1 hora).
  Todos los puntos sobre un mismo meridiano adoptan la misma hora solar.
  Todos los puntos sobre un mismo huso horario adoptan la misma hora oficial o civil.

Ejemplos:

1. Las longitudes geográficas de los puntos A y B son 78°24'18" E y 21°48'48" E, respectivamente. Hallar la diferencia de longitud y la diferencia horaria.

Resolución:

Tenemos:



Difer. Long. (A; B) = Long. (A) − Long. (B)

Hallamos la diferencia de longitud:

Long.(A):	78°24'18" −
Convenientemente:	77°83'78"
Long.(B):	21°48'48"
Difer. Long. (B):	56°35'30"

Hallamos la diferencia horaria:

$$\text{Difer. Hor. } (A; B) = \frac{56°35'30"}{15}$$

Luego:

```
56°    35'    30"  |15
45°                 3h 46 min 22 s
11° <> 660'
       695'
       690'
         5' <> 300"
               330"
```

∴ Dif. Hor. (A; B) = 3 h 46 min 22 s.

2. Si cuando en A son las 10 h 20 min 12 s, en B son las 5 h 28 min 42 s. Hallar la diferencia horaria y la diferencia de longitud.

Resolución:

Hallamos la diferencia horaria:

Hora (A):	10 h 20 min 12 s
Convenientemente:	9 h 79 min 72 s −
Hora (B):	5 h 28 min 42 s
Difer. Hor. (A; B):	4 h 51 min 30 s

Hallamos la diferencia de longitud:

Difer. Long. (A; B) = 15(4 h 51 min 30 s)

Efectuando: Difer. Long. (A; B) = 60°765'450"

Reduciendo = 72°52'30"

∴ Difer. Long. (A; B): 72°52'30"

3. La longitud geográfica de A es 48°12' O y cuando en A son las 11 h 24 min 18 s, en B son las 16 h 44 min 30 s. Hallar la longitud de B.

Resolución:

Hallamos la diferencia de horas:

Hora B:	16 h 44 min 30 s −
Hora A:	11 h 24 min 18 s
Difer. Hor. (A; B):	5 h 20 min 12 s

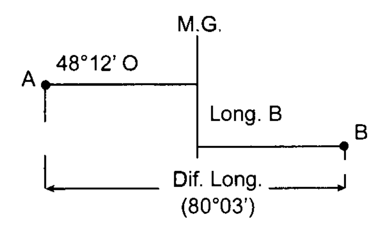
Hallamos la diferencia de longitudes:

Difer.Long. (A; B) = 15(5 h 20 min 12 s)

= 75°300'180"

Reduciendo: Difer. Long. (A; B) = 80°03'

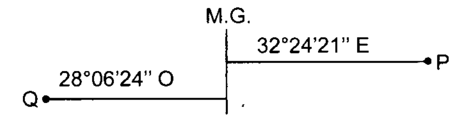
Haciendo un diagrama:



Luego:
Long. (B) = 80°03' – 48°12' = 31°51'
∴ Long. (B) = 31°51' E

3. Las longitudes de dos ciudades P y Q son: 32°24'21" E y 28°06'24" O respectivamente. ¿Qué hora será en Q, si en P son las 15 h 14 min 32 s?

Resolución:
Hallamos la diferencia de longitud.



Long. (P):	32°24'21"
Long. (Q):	28°06'24"
Difer. Long. (P; Q):	60°30'45"

Hallamos la diferencia horaria:

$$\text{Difer. Hor. (P; Q)} = \frac{60°30'45"}{15} = \underline{4 \text{ h } 02 \text{ min } 03 \text{ s}}$$

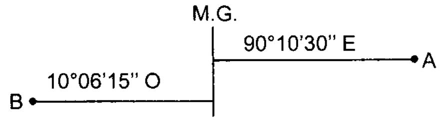
En Q, las horas son más tempranas que en P, luego:

Hora P:	15 h 14 min 32 s –
Difer. Hor. (P; Q):	4 h 02 min 03 s
Hora (Q):	11 h 12 min 29 s

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Se envía un telegrama de A a B a las 8 a. m., el despacho tarda 4 h 30 min para enviarlo. Sabiendo que la longitud de A es 90°10'30" E y de B es 10°06'15" O. ¿A qué hora es recibido el telegrama?

Resolución:
Tenemos:



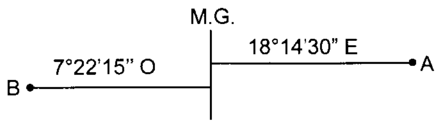
Hallamos la diferencia de longitud:
Difer. long.(A; B) = 90°10'30" + 10°06'15" = 100°16'45"

$$\text{Difer. Hora (A; B)} = \frac{100°16'45"}{15} = 6 \text{ h } 41 \text{ min } 07 \text{ s}$$

Hora de A, cuando es enviado el telegrama:
8 a.m. + 4 h 30 min = 12 h 30 min
Hora de B, cuando es recibido el telegrama:
Hora B = Hora A – Difer. Hora (A; B)
Hora B = 12 h 30 min – 6 h 41 min 07 s = 5 h 48 min 53 s
∴ En B serán: 5 h 48 min 53 s

2. Las longitudes de las ciudades A y B son 18°14'30" E y 17°22'15" O respectivamente. Un auto sale de A hacia B a las 15 h 20 min y llega a B después de 5 h 40 min 27 s. ¿Qué hora es en B cuando llega el auto?

Resolución:
Del enunciado



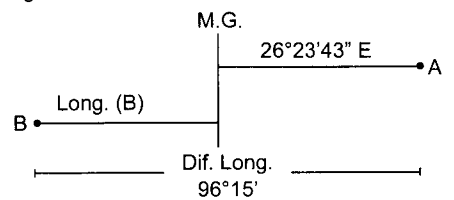
Difer. Long. (A; B) = 18°14'30" + 17°22'15" = 35°36'45"

$$\text{Difer. Hor. (A; B)} = \frac{36°36'45"}{15} = 2 \text{ h } 22 \text{ min } 27 \text{ s}$$

Hallamos la hora de B, cuando parte el auto de A:
Hora (B) = 15 h 20 min – 2 h 22 min 27 s = 12 h 57 min 33 s
Luego, la hora de B cuando llega el auto:
12 h 57 min 33 s + 5 h 40 min 27 s = 18 h 38 min
∴ Hora de B: 18 h 38 min

3. Un avión sale de A (Long. 26°23'43" E) hacia B; llegando a esta ciudad después de 6 h 25 min del mismo día y a la misma hora. ¿Cuál es la longitud de B?

Resolución:
Se deduce que B se encuentra a la izquierda de A y como el avión llega a la misma hora que partió de A, la diferencia horaria es 6 h 25 min.
Hallamos la diferencia de longitud:
Difer. Long. (A; B) = 15(6 h 25 min) = 96°15'
Luego:



Long. (B) = 96°15' – 26°23'43" = 69°51'17"
∴ Long. (B) = 69°51'17" O

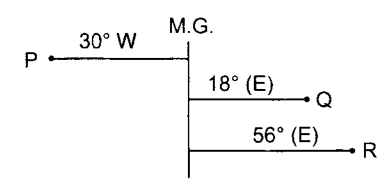
4. La ciudad P está a 48° al Oeste de Q, y R está a 38° al este de Q. Cuando en Greenwich es medio día, en P son las 10 h. ¿Qué hora es en R en ese momento?

Resolución:
Inicialmente:

P ←— 48° —→ Q ←— 68° —→ R

La diferencia horaria entre Greenwich y P:
12 h – 10 h = 2 h ⇒ Difer. Long. = 15(2 h) = 30°

Luego, tenemos:



La diferencia de longitud entre Greenwich y R: 56°

Difer. Hor. (G; R) = $\frac{56°}{15}$ = 3 h 44 min.

La ciudad R tiene más horas que Greenwich.

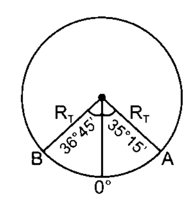
∴ Hora de R: 15 h 44 min.

5. Las longitudes de dos puntos ecuatoriales A y B son 35°15' E y 36°45' O respectivamente. Determinar la distancia (en km) que existe entre ambos puntos, suponiendo que la Tierra es totalmente esférica: (RT = 6378,38 km).

Resolución:

Los puntos A y B se encuentran en la máxima circunferencia de la Tierra por ser ecuatoriales.

Arco AB = 36°45' + 35°15' = 72°



Hallamos la distancia (en km) entre A y B:

360° ______ $2\pi R_T$

72° ______ $d(\overset{\frown}{AB})$

$d(\overset{\frown}{AB}) = \frac{72° \times 2\pi}{360°}(6378,38) = 8015,3$ km

∴ Aproximadamente: 8015,3 km

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Las longitudes geográficas de P y Q son 48°25'33" W y 12°05'12" E, respectivamente. ¿Qué hora es en P cuando en Q son las 5 p. m.?

A) 11 h 57 min 57 s B) 12 h 58 min 57 s
C) 12 h 57 min 58 s D) 12 h 57 min 57 s
E) 12 h 58 min 58 s

2. Un pasajero parte de A a las 5 h 20 min a. m. y llega a B después de 2 h 25 min de recorrido, ¿qué hora es en B en el momento de la llegada?
Long. A: 12°25'45" E; Long. B: 12°29' O

A) 7 h 28 min 40 s B) 7 h 16 min 40 s
C) 6 h 05 min 21 s D) 6 h 03 min 20 s
E) 6 h 26 min 40 s

3. La longitud de M es 82°38'14" E y la longitud de N es 58°19'44" E. ¿Qué hora es en N, si en M son las 9 h 23 min 34 s?

A) 6 h 46 min 20 s B) 7 h 36 min 25 s
C) 7 h 46 min 20 s D) 8 h 01 min 14 s
E) N. A.

4. Dos ciudades A y B están en hemisferios opuestos de tal manera que sus longitudes geográficas están en la relación de 4 a 7. Si cuando en A son las 5 h en B son las 10 h 30 min. ¿Cuál es la longitud de B?

A) 50°37' E B) 54°27' E C) 62°20' E
D) 52°30' E E) 49°52' E

5. Una ciudad A, que tiene menos horas que otra B cuya longitud es 800 W tiene una diferencia horaria de 3 h 20 min. Hallar la longitud de A.

A) 130° O B) 80° O C) 45° O
D) 30° O E) 50° O

6. Tres ciudades A (81°40'50" O); B y C (24°30'15" E) tienen la misma latitud. Hallar la longitud de B, sabiendo que B se encuentra en A y C, además:
Long. (A) + Long. (B) + Long. (C) = 138°51'25"

A) 28°40'30" E B) 28°40'30" O
C) 32°40'20" E D) 32°40'20" O
E) N. A.

7. Un vapor sale desde A (7°19'10" E) y se dirige hacia B (22°34'40"E). El viaje duró 34 h 20 min; si al momento de partir en A son las 7 h 58 min 58 s, ¿qué hora será en B cuando llegue el vapor?

A) 19 h 20 min del siguiente día
B) 19 h 21 min del siguiente día
C) 19 h 22 min del siguiente día
D) 19 h 23 min del siguiente día
E) 19 h 24 min del siguiente día

8. El reloj de un viajero en la hora Greenwich marca 7 h 20 min 30 s p. m. Cuando el Sol pasa por el meridiano del lugar, ¿cuál es la longitud del lugar, donde se halla el viajero?

A) 110°07'30" O B) 110°07'30" E
C) 69°52'30" E D) 69°52'30" O
E). N. A.

9. Dos ciudades ubicadas sobre la Tierra, se encuentran ubicadas en hemisferios distintos y siendo sus longitudes numéricamente iguales. Se sabe que cuando en una son 6 h 24 min en la otra son 14 h 38 min. Hallar la longitud de uno de los puntos.

A) 56°27' E B) 56°27' O
C) 43°36' E D) 61°45' O
E) 62°36' O

10. Un avión sale de una ciudad A (longitud 37°27'15" E) hacia otra ciudad B; si después de 2 h 30 min de viaje llega a B el mismo día y a la misma hora que partió de A. Determinar la longitud geográfica de B.

A) 2'25" B) 2'10" O C) 2'15" O
D) 2'45" O E) 2'30" O

11. Un viajero va de New York (74°25' O) hasta Lisboa (9°11'10" O). Al llegar a Lisboa, ¿estará su reloj adelantado o atrasado y cuánto?

A) 4 h 10 min; adelantado
B) 4 h 10 min; atrasado
C) 4 h 10 min 55 s; adelantado
D) 4 h 20 min 44 s; adelantado
E) 4 h 20 min 55 1/3; atrasado

12. El reloj de un barro puesto en la hora de Greenwich marca 5 h 40 min 20 s de la tarde cuando el Sol pasa por el meridiano del lugar. ¿Cuál es la longitud del lugar donde se halla el barco?

A) 80°20' O B) 81°21' O C) 80°5' E
D) 85°5' O E) 80°5' O

CLAVES

1. D	4. D	7. A	10. D
2. C	5. D	8. B	11. E
3. C	6. D	9. D	12. D

FRACCIONES CONTINUAS

Una fracción continua es una sucesión, finita o infinita, de fracciones en las que el numerador de todas ellas, es siempre la unidad.

Las fracciones continuas tratan de dar una expresión a los números reales, más conveniente para estudiar sus propiedades aritméticas mejor que en la expresión decimal.

Ejemplo:

Son fracciones continuas:

$$H = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5}}} \quad ; \quad N = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

Finita Infinita

La estructura de una fracción continua dependerá de la forma del número real.

Fracción continua originada por una fracción común propia

El desarrollo decimal de la fracción propia f: $\frac{a}{b}$ (a < b) es de la forma 0, pq...r; la cual origina una fracción continua que obedece a la expresión:

$$f: \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\vdots \atop a_3 + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

Esta fracción continua es denotada por:

$$f: [0; a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n]$$

Ejemplo:

Reducir a fracción continua: $\frac{20}{69}$

Resolución:

Debemos encontrar una sucesión de fracciones de modo que los numeradores sean todos iguales a la unidad.

Tenga presente que la fracción $\frac{a}{b}$ es equivalente a $\frac{1}{b/a}$; y si es impropia se transforma en una fracción mixta.

Luego, tenemos:

$$\frac{20}{69} = \cfrac{1}{\frac{69}{20}} = \cfrac{1}{3 + \frac{9}{20}} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\frac{20}{9}}}$$

$$\cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \frac{2}{9}}} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{9}{2}}}} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}}$$

De donde vemos que: $\frac{20}{69} = [0; 3; 2; 4; 2]$

Fracción continua originada por una fracción común impropia

El desarrollo decimal de la fracción impropia f: $\frac{a}{b}$ (a > b) origina a una fracción continua de la forma:

$$f = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{\ddots}{+ \cfrac{1}{a_n}}}}$$

Esta fracción continua es denotada por:

$$f: [a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n]$$

Ejemplo:

Reducir a fracción continua: $\frac{359}{81}$

Resolución:

Buscamos la sucesión de fracciones, en que todos los numeradores sean iguales a la unidad.

$$\frac{359}{81} = 4 + \frac{35}{81} = 4 + \cfrac{1}{\frac{81}{35}} = 4 + \cfrac{1}{2 + \frac{11}{35}} = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{35}{11}}}$$

$$= 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \frac{2}{11}}} = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\frac{11}{2}}}} = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2}}}}$$

De donde; vemos que:

$$\frac{359}{81} = [4; 2; 3; 5; 2]$$

Nota

Las fracciones integrantes de una fracción continua son todas las fracciones cuyo numerador es la unidad.

Del ejemplo anterior, sus fracciones integrantes son:

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{5} \text{ y } \frac{1}{2}$$

Reducidas de una fracción continua

La fracción k-ésima reducida, D_K, de una fracción continua es una fracción que se obtiene luego de suprimir todos sus términos, a partir de K.

Ejemplo:

Encontrar las fracciones reducidas de la fracción continua: f: [3; 1; 2; 2; 4]

Resolución:

De la fracción continua: $f = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}}}$

Calculamos todas las reducidas:

- 1.ª reducida: $D_1 = 3$
- 2.ª reducida: $D_2 = 3 + \frac{1}{1} = 4$
- 3.ª reducida: $D_3 = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}} = \frac{11}{3}$

Otra forma es:

El último cociente (2) se multiplica, a los dos términos de la reducida anterior $\left(\frac{4}{1}\right)$, así: $\frac{4 \times 2}{1 \times 2}$; al numerador de esta fracción se le suma el numerador (3) de la primera reducida y al denominador se suma el denominador (1) de la primera reducida, tendremos: $\frac{4 \times 2 + 3}{1 \times 2 + 1} = \frac{11}{3}$

- 4.ª reducida: $D_4 = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{26}{7}$

Otra forma es:

El último cociente (2) se multiplica a los dos términos de la reducida anterior $\left(\frac{11}{3}\right)$, así: $\frac{11 \times 2}{3 \times 2}$; al numerador de esta fracción se suma el numerador (4) de la segunda reducida y al denominador se suma el denominador (1) de la segunda reducida, tendremos: $\frac{11 \times 2 + 4}{3 \times 2 + 1} = \frac{26}{7}$

- 5.ª reducida: $D_5 = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}}} = \frac{115}{31}$

Otra forma es:

El último cociente (4) se multiplica a los dos términos de la reducida anterior $\left(D_4 = \frac{26}{7}\right)$, así: $\frac{26 \times 4}{7 \times 4}$; al numerador de este quebrado se le suma el numerador (11) de la tercera reducida y al denominador se le suma el denominador (3) de la tercera reducida, tendremos:

$$\frac{26 \times 4 + 11}{7 \times 4 + 3} = \frac{115}{31}$$

El algoritmo de Euclides en las fracciones continuas

Para estructurar la fracción continua del número racional: $f = \frac{a}{b} (a > b)$ es suficiente con considerar los cocientes sucesivos, al calcular el MCD de a y b por el algoritmo de Euclides.

Ejemplo:

Reducir a fracción continua: $\frac{359}{81}$

Resolución:

Sabemos que la fracción continua correspondiente es: [4; 2; 3; 5; 2]

Ahora, hallamos los cocientes sucesivos del algoritmo de Euclides, al calcular el MCD de 359 y 81.

Cocientes sucesivos:		④	②	③	⑤	②
Divisores:	359	81	35	11	2	1
Residuos:	35	11	2	1	–	

Vemos que los cocientes sucesivos coinciden con la fracción continua: [4; 2; 3; 5; 2].

– En adelante utilizamos el algoritmo de Euclides para reducir fracciones ordinarias a fracciones continuas.

Ejemplo:

Reducir a fracción continua: $\frac{22}{75}$

Resolución:

Sabemos que: $\frac{22}{75} = \cfrac{1}{\cfrac{75}{22}}$

Hallamos el algoritmo de Euclides para 75 y 22.

Cocientes:		3	2	2	4
Divisores:	75	22	9	4	1
Residuos:	9	4	1	–	

Como $\frac{22}{75}$ es propia, su fracción continua será:

[0; 3; 2; 2; 4].

– No olvide que la fracción propia es menor que 1, por eso la primera reducida es cero.

Fracción continua inversa

Dada la fracción continua: $f = [a_1; a_2; \ldots; a_n]$

La fracción continua inversa es:

$$[a_n; \ldots; a_2; a_1]$$

Ejemplo:

Hallar la fracción continua inversa de la equivalente a: $\frac{50}{23}$

Resolución:

Encontramos la fracción continua, por el algoritmo de Euclides:

Cocientes:		2	5	1	3
Divisores:	50	23	4	3	1
Residuos:	4	3	1	–	

La fracción continua es: $\frac{50}{23} = [2; 5; 1; 3]$

$\therefore$ La fracción continua inversa es: [3; 1; 5; 2].

Fracción continua originada por términos de la forma $\sqrt{N}$; $N \in \mathbb{Z}^+$

La fracción continua originada por $\sqrt{N}$, tiene la forma:

$$\sqrt{N} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

Ejemplo:

Encuentra la fracción continua originada por $\sqrt{3}$.

Resolución:

Sabemos que: $\sqrt{3} = 1{,}732050\ldots$

Es lo mismo que: $\sqrt{3} = 1 + 0{,}732050\ldots$

Pero: $0{,}732050 = \frac{1}{a}$; $a \in \mathbb{Z}^+$

Luego: $\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{a}$ ...(1)

De (1), despejamos "a": $a = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$

Racionalizamos: $a = \left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}\right)\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

Hacemos: $a = \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 1 + \frac{1}{b}$ ...(2)

De (2), despejamos "b": $b = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$

Racionalizamos: $b = \left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}\right)\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}\right) = \sqrt{3} + 1$

De: $\sqrt{3} + 1 = 1 + \frac{1}{a} + 1 = 2 + \frac{1}{a}$

Luego: $b = 2 + \frac{1}{a}$

Reemplazamos en (1):

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{\boxed{a}} = 1 + \cfrac{1}{\boxed{1 + \frac{1}{b}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{a}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{b}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}$$

Con lo cual tenemos: $\sqrt{3} = [1; 1; 2; 1; 2; \ldots]$

$\therefore$ Se trata de una fracción continua periódica.

Las fracciones continuas asociadas a r son periódicas si y solo si, r es solución de una ecuación de segundo grado.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Hallar la fracción continua equivalente a la suma de:

$$\cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2}}} + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{4}}}$$

Resolución:

Hallamos las fracciones ordinarias:

$$f_1: \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2}}} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{2}{11}} = \frac{11}{46}$$

$$f_2: \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{4}}} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{4}{21}} = \frac{21}{46}$$

La fracción equivalente: $\frac{11}{46} + \frac{21}{46} = \frac{32}{46} <> \frac{16}{23}$

Hallamos los cocientes sucesivos, por el algoritmo de Euclides:

Cocientes:		1	2	3	2
Divisores:	23	16	7	2	1
Residuos:	7	2	1	–	

$\therefore$ La fracción continua: $\frac{16}{23} = [0; 1; 2; 3; 2]$

2. Si: $\{a; b; c; d; e\} \subset \mathbb{Z}^+$ y se cumple:

$$\frac{459}{139} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e}}}}$$

Calcular: $(a + c + e)(b + d)$

Cocientes:		3	3	3	4	3
Divisores:	459	139	42	13	3	1
Residuos:	42	13	3	1		

Luego; la fracción continua es: [3; 3; 3; 4; 3]

De donde: $a = 3$; $b = 3$; $c = 3$; $d = 4$; $e = 3$.

Hallamos: $(a + c + e)(b + d)$: $(3 + 3 + 3)(3 + 4) = 63$

$\therefore (a + c + e)(b + d) = 63$

3. Hallar la quinta reducida de la siguiente fracción continua periódica:

$$N = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\vdots}}}}$$

Resolución:

Hallamos las reducidas:

1.ª reducida: $D_1 = 2$

2.ª reducida: $D_2 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$

3.ª reducida: $D_3 = \frac{5 \times 2 + 2}{2 \times 2 + 1} = \frac{12}{5}$

4.ª reducida: $D_4 = \frac{12 \times 2 + 5}{5 \times 2 + 2} = \frac{29}{12}$

5.ª reducida: $D_5 = \frac{29 \times 2 + 12}{12 \times 2 + 5} = \frac{70}{29}$

$\therefore$ Quinta reducida: $\frac{70}{29}$

4. Dados los cocientes incompletos: 2; 3; 1; 4; 5 y 3. Encontrar el sistema de numeración en que está escrita la última reducida, para que la diferencia de sus términos sea 388.

Resolución:

Hallamos las reducidas:

$D_1 = 2$; $D_2 = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$; $D_3 = \frac{7 \times 1 + 2}{3 \times 1 + 1} = \frac{9}{4}$;

$D_4 = \frac{9 \times 4 + 7}{4 \times 4 + 3} = \frac{43}{19}$; $D_5 = \frac{43 \times 5 + 9}{19 \times 5 + 4} = \frac{224}{99}$;

$D_6 = \frac{224 \times 3 + 43}{99 \times 3 + 19} = \frac{715}{316}$

Sea «n» la base en la que están escritos los términos de la última reducida, por dato:

$$715_n - 316_n = 388_n$$

Descomponiendo polinómicamente:

$7n^2 + n + 5 - 3n^2 - n - 6 = 3n^2 + 8n + 8$

Reduciendo: $n = 9$

$\therefore$ La base es 9.

5. Sabiendo que: $x = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\vdots}}}}$

es una de las raíces, determine la ecuación cuadrática:

Resolución:

Tenemos: $x - 2 = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \left[\cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\vdots}}}\right]}} \rightarrow (x - 2)$

Reemplazando: $x - 2 = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + x - 2}}$

Reduciendo: $x - 2 = \cfrac{1}{\cfrac{3x + 1}{1}} = \frac{x}{3x + 1}$

Ejecutando: $(x - 2)(3x + 1) = x$

Al reducir: $3x^2 - 6x - 2 = 0$

$\therefore$ La ecuación cuadrática es: $3x^2 - 6x - 2 = 0$

6. La fracción continua: [3; 2; 3; 2; 4] origina a la fracción irreductible $\frac{a}{b}$. Encuentra el menor número natural N, tal que: $(a + b)N$ resulte un cubo perfecto.

Resolución:

De la fracción continua: [3; 2; 3; 2; 4] resulta la fracción irreductible:

$$\frac{a}{b} = \frac{244}{71} \begin{cases} a = 244 \\ b = 71 \end{cases}$$

Luego: $(a + b)N = K^3 \Rightarrow 315N = K^3$

Descomponiendo: $5 \times 7 \times 32 \times N = K^3$

Factores de N: $5^2 \times 7^2 \times 3 = 3675$

$\therefore$ El menor valor de $N = 3675$

7. Calcular, con un error menor de $\frac{1}{400}$, la siguiente fracción continua:

$$f = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\vdots}}}}}$$

Resolución:

Hallamos las reducidas, de manera que el error sea menor de $\frac{1}{400}$.

$D_1 = 0$; $D_2 = \frac{1}{2}$; $D_3 = \frac{4}{9}$; $D_4 = \frac{9}{20}$

De: $D_4 = \frac{9}{20}$; como $20^2 = 400$; esta reducida será el valor de la fracción continua con un error por exceso menor de $\frac{1}{400}$.

$\therefore$ La fracción buscada es: $\frac{9}{20}$

8. Calcular con un error menor de 1/400, la siguiente fracción continua periódica.

$$f = 5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\vdots}}}}$$

Resolución:

Buscamos la reducida, de manera que el error sea menor de 1/400.

$D_1 = 5$; $D_2 = 5 + \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$; $D_3 = \frac{11 \times 2 + 5}{2 \times 2 + 1} = \frac{27}{5}$

$D_4 = \dfrac{27\times2+11}{5\times2+2} = \dfrac{65}{12}$; $D_5 = \dfrac{65\times2+27}{12\times2+5} = \dfrac{157}{29}$

De: $D_5 = \dfrac{157}{29}$, como $29^2 = 841 > 400$

Esta quinta reducida es el valor de la fracción continua con un error por defecto menor que 1/400.

$\therefore$ La fracción es: $\dfrac{157}{29}$

9. Hallar la fracción continua equivalente a $\sqrt{2}$.

Resolución:

Como: $\sqrt{2} = 1{,}414213... = 1 + 0{,}414213...$

Pero: $0{,}414213... = \dfrac{1}{a}$, $a \in \mathbb{Z}^+$

Luego: $\sqrt{2} = 1 + \dfrac{1}{a}$ ...(1)

De (1), hallamos "a": $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$

Racionalizamos:

$a = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}\right) = \sqrt{2}+1$ ...(2)

Pero: $\sqrt{2} = 1 + \dfrac{1}{a}$

En (2): $a = 1 + \dfrac{1}{a} + 1 = 2 + \dfrac{1}{a}$

Reemplazando en (1):

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\boxed{a}} = 1 + \frac{1}{\boxed{2+\frac{1}{a}}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{\boxed{2+\frac{1}{a}}}}$$

Finalmente, la fracción continua es:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\vdots}}}} \qquad \therefore\ f: [1; 2; 2; 2; ...]$$

10. Sabiendo que: $x = 3 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\vdots}}}}}$

El valor de "x − 3" es:

Resolución:

Tenemos: $x - 3 = \cfrac{1}{\boxed{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\vdots}}}}}} \to a$

Luego: $a = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\boxed{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\vdots}}}}} \to a$

Vemos que: $a = 1 + \dfrac{1}{2+\dfrac{1}{a}} = 1 + \dfrac{a}{2a+1}$

Enseguida: $a = \dfrac{2a+1+a}{2a+1} = \dfrac{3a+1}{2a+1}$

Efectuando: $a(2a+1) = 3a+1 \Rightarrow 2a^2 - 2a - 1 = 0$

$a = \dfrac{2\pm\sqrt{12}}{4}$; pero $a \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a = \dfrac{2+2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

Reemplazando: $x - 3 = \dfrac{1}{\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$

Racionalizando: $x - 3 = \dfrac{2}{\sqrt{3}+1}\times\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}-1$

$\therefore x - 3 = \sqrt{3} - 1$

RAÍZ CÚBICA

En principio veamos la formación del cubo de los números enteros, para deducir más adelante la regla de la extracción de la raíz cúbica de un número.

Analicemos los cubos de los diez primeros números:

Números:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cubos:	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Análogamente a la ley de los cuadrados, se desprende para formación de los cubos, lo siguiente:

1. Todo número que termina en 1; 4 ; 5 ; 6 ; 9 ; 0 tiene su cubo terminado en las mismas cifras respectivamente. Si el número termina en 2; 3; 7; 8; sus cubos terminan respectivamente en 8; 7; 3; 2.
2. Si el número es cubo perfecto y si es divisible por un factor primo: 2; 3; 5; 7; ...; p (p = número primo), entonces será divisible por los cubos: 2^3; 3^3; 5^3; 7^3; ...; p^3, respectivamente.
3. Si el número termina en cero, para que pueda ser cubo perfecto, debe terminar en una cantidad de ceros múltiplos de 3.

Corolario

El cubo de un número compuesto por decenas y unidades, es igual al cubo de las decenas multiplicado por 1000, más el triple del cuadrado de decenas por unidades multiplicado por 100, más el triple de decenas por el cuadrado de unidades y por 10, más el cubo de las unidades.

Si: $N = (d\times10 + u)$

$N^3 = (d\times10+u)^3 = d^3\times1000 + 3d^2u\times100 + 3du^2\times10 + u^3$

Teorema

La diferencia de los cubos de dos enteros consecutivos es igual al triple del cuadrado del número menor, más el triple de dicho número menor, más la unidad.

Evidentemente:

$(N+1)^3 - N^3 = N^3 + 3N^2 + 3N + 1 - N^3 = 3N^2 + 3N + 1$

Corolario

Los cubos de dos números consecutivos se van diferenciando cada vez más a medida que aumentan dichos números.

Raíz cúbica entera de un número entero

La raíz cúbica entera de un número que no es cubo perfecto, es el mayor número entero cuyo cubo está contenido en el número dado. En la extracción de la raíz cúbica distinguiremos dos casos:

1.° Que el número radicando no pase de 1000.
2.° Que sea mayor que 1000.

Para saber el primer caso basta saber de memoria los cubos de los nueve primeros números.

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{512} = 8;\ 6 < \sqrt[3]{318} < 7;\ 318 = 6^3 + 102$$

Regla de la raíz cúbica de un número

Para extraer la raíz cúbica entera de un número mayor que 1000, se descompone el número en secciones o períodos de tres cifras, empezando por la derecha, pudiendo tener el primero de la izquierda una o dos cifras. Se halla la raíz cúbica entera de dicho primer período de la izquierda, obteniéndose la primera cifra (a) de la raíz, la cual elevada al cubo se resta del primer período de la izquierda.

Al lado del resto obtenido se baja el siguiente período; las centenas del número así formado se dividen por el triple del cuadrado de la raíz hallada ($3a^2$) y el cociente entero que se obtenga será igual o mayor que la segunda cifra de la raíz.

Para comprobar esta cifra (b), cifra de prueba, se forma la siguiente expresión:

$$(3a^2 \times b \times 100 + 3 \times a \times b^2 \times 10 + b^3);$$

donde "a" es la primera cifra de la raíz y "b" es la cifra de prueba, y si el resultado puede restarse del primer residuo seguido del segundo período, la cifra es buena, en caso contrario se rebaja una unidad, sometiéndola al mismo ensayo.

Al lado del segundo residuo se baja el tercer período cuyas centenas se dividen por el triple del cuadrado de la raíz hallada, obteniéndose la tercera cifra y así sucesivamente hasta agotar todos los períodos, obteniéndose el último resto, que si es cero la raíz será exacta.

Observaciones

- El número de cifras de la raíz es igual al número del período de tres cifras.
- Si algún cociente entero de las divisiones auxiliares es cero, cero será la cifra correspondiente de la raíz y se bajará el período siguiente.
- Si alguno de los cocientes enteros fuese 10 o mayor que 10, los ensayos empezarán decididamente por el 9.

Ejemplos:

1. Extraer la raíz cúbica de 22 809 352.

Resolución:

Separando las cifras en períodos de tres, de derecha a izquierda y buscamos la primera cifra de la raíz.

	$\sqrt[3]{22\ (809)\ 352}$	2
23 →	8 ↓	
	14 809	

Buscamos la segunda cifra de la raíz:

División auxiliar: $\dfrac{148}{3(2)^2} = \dfrac{148}{12} = 12,\ldots$

Luego, la cifra de prueba es: $b = 9$

Verificamos si $b = 9$, cumple:

$3 \times 2^2 \times 9 \times 100 + 3 \times 2 \times 9^2 \times 10 + 9^3 = 16\ 389$

Este resultado no se puede restar de 14 809, entonces la siguiente cifra de prueba: $b = 8$.

Verificamos si $b = 8$, cumple:

$3 \times 2^2 \times 8 \times 100 + 3 \times 2 \times 8^2 \times 10 + 8^3 = 13\ 952$

Este resultado sí se puede restar de 14 809, entonces 8 es la cifra buscada.

Luego: $\sqrt[3]{22\ 809\ 352}$	28
8	
14 809	$3 \times 2^2 \times 8 \times 100\ +$
13 952	$3 \times 2 \times 8^2 \times 10$
857 352	8^3
	13 952

Buscamos la tercera cifra de la raíz:

División auxiliar: $\dfrac{857}{3 \times 8^2} = 4,\ldots$

Probamos, cuando $b = 4$

$3 \times 28^2 \times 4 \times 100 + 3 \times 28 \times 4^2 \times 10 + 4^3 = 1\ 075\ 264$

Como no se puede restar de 857 352, probamos con $b = 3$.

$3 \times 28^2 \times 3 \times 100 + 3 \times 28 \times 3^2 \times 10 + 3^3 = 713\ 187$

Este número si se puede restar de 857 352, luego la tercera cifra de la raíz es 3.

Luego: $\sqrt[3]{22\ 809\ 352}$	283
8	
14 809	$3 \times 28^2 \times 3 \times 100\ +$
13 952	$3 \times 28 \times 3^2 \times 10$
857 352	3^3
713 187	713 187
144 165	

El residuo debe verificar: $r < 3d^2 + 3d + 1$

Luego: $144\ 165 < 3 \times 283^2 + 3 \times 283 + 1$

$\Rightarrow 144\ 165 < 241\ 117$

Finalmente, la raíz entera es 283 y su residuo 144 165.

2. Demostrar que para $n > 4$, se verifica: $2^n > n^2$

Resolución:

I. Verificamos para $n = 5$

$2^5 > 5^2 \Rightarrow 32 > 25$; es verdadera.

II. Asumimos que n = h es verdadera, luego:
$2^h > h^2$

III. Verificamos, si cumple para n = h + 1.
Debo demostrar que: $2^{h+1} > (h+1)^2$

De: $2^h > h^2$

Multiplico por 2: $2^h \times 2 > 2h^2 \Rightarrow 2^{h+1} > 2h^2$ ...(1)

Pero: $h^2 > 2h + 1$

Sumamos h^2:

$h^2 + h^2 > h^2 + 2h + 1 \Rightarrow 2h^2 > (h+1)^2$ ...(2)

En (1): $2^{h+1} > 2h^2 > (h+1)^2$

Entonces: $2^{h+1} > (h+1)^2$

$\therefore$ Para n > 4, se verifica: $2^n > n^2$

3. Calcular: $A = \sqrt{\underbrace{44...4}_{\text{"n" cifras}}\ \underbrace{88...889}_{\text{"n+1" cifras}}}$

Dar como respuesta la suma de las cifras de A.

Resolución:

Descomponiendo en bloques:

$A = \sqrt{\underbrace{44...44}_{\text{"n" cifras}} \times 10^n + \underbrace{88...88}_{\text{"n+1" cifras}} + 1}$

Convenientemente:

$A = \sqrt{4(\underbrace{11...11}_{\text{"n" cifras}})10^n + 8(\underbrace{11...11}_{\text{"n" cifras}}) + 1}$

Pero: $\underbrace{11...11}_{\text{"n" cifras}} = 10^{n-1} + 10^{n-2} + ... + 10 + 1$

Reemplazando:

$A = \sqrt{4(10^{n-1}+10^{n-2}+...+1)10^n + 2\times 4(10^{n-1}+10^{n-2}+...+1) + 1}$

Pero: $10^{n-1} + 10^{n-2} + ... + 1 = \dfrac{10^n - 1}{10 - 1}$

Enseguida: $A = \sqrt{4\left(\dfrac{10^n-1}{10-1}\right)10^n + 2\times 4\dfrac{10^n-1}{10-1} + 1}$

$A = \sqrt{\dfrac{4\times 10^{2n} - 4\times 10^n + 2\times 4\times 10^n - 2\times 4 + 9}{9}}$

Reduciendo: $A = \sqrt{\dfrac{4\times 10^{2n} + 4\times 10^n + 1}{9}} = \dfrac{2\times 10^n + 1}{3}$

Equivalentemente: $A = \dfrac{2\overbrace{00...0}^{(n-1)\text{cifras}}1}{3} = \overbrace{66...6}^{(n-1)\text{cifras}}7$

Sumamos las cifras: 6(n − 1) + 7 = 6n + 1

$\therefore$ La suma de cifras: 6n + 1

4. Demostrar que todas las potencias del número 12 890 625 terminan en estas mismas cifras.

Resolución:

Debemos demostrar que:

$12\,890\,625^n = ...12\,890\,625$

I. Verificamos para n = 2:
$12\,890\,625^2 = 166\,168\,212\,890\,625$

II. Asumimos que para n = h es verdadero.
$12\,890\,625^h = ...12\,890\,625$
Es lo mismo que:
$12\,890\,625^h = N \times 10\,000\,000 + 12\,890\,625$

III. Verificamos para n = h + 1

De: $12\,890\,625^h = N \times 10^8 + 12\,890\,625$

Multiplicando por 12 890 625, tenemos:

$12\,890\,625^{h+1} = N \times 10^8 \times 21\,890\,625 + 12\,890\,625^2$

$12\,890\,625^{h+1} = ...00\,000\,000 + ...12\,890\,625$

Enseguida: $12\,890\,625^{h+1} = ...12\,890\,625$

Toda potencia de 12 890 625 termina en las mismas cifras.

5. Hallar dos números tales que la suma de sus cubos sea el número capicúa 19 691.

Resolución:

Sean los números a y b, tales que:

$a^3 + b^3 = 19\,691$

También: $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = 19\,691$ ...(1)

Luego, (a + b) debe ser uno de los divisores de 19 691

Es decir, (a + b) puede ser: 7; 29; 97; 203; 679 y 2813

Además: a + b > 7, pues:

$a^3 + b^3 < (a+b)^3 = 7^3 = 343 < 19\,691$

a + b < 97, pues: a o b serían > 48

$a^3 + b^3 > 48^3 > 19\,691$

Luego: a + b = 29 ...(2)

En (1): $a^2 - ab + b^2 = 679$ ...(3)

De (2) y (3): a = 27 ; b = 2

$\therefore$ Los números son 27 y 2.

RAÍCES CUADRADAS Y CÚBICAS DE NÚMEROS RACIONALES EN MENOS DE UNA UNIDAD O EN MENOS DE 1/N

Ocupémonos en particular de la raíz cuadrada de un número fraccionario en general.

1.° Para extraer la raíz cuadrada de una fracción cuyos términos son cuadrados perfectos, se extraen las raíces cuadradas de sus dos términos y la fracción resultante es la raíz cuadrada exacta del propuesto.

Es decir: $\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}} = \dfrac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \dfrac{a}{b}$

Ejemplo:

$$\sqrt{\frac{625}{169}} = \frac{\sqrt{625}}{\sqrt{169}} = \frac{25}{13}$$

2.° Cuando solamente el denominador es cuadrado perfecto, se extrae la raíz cuadrada del numerador y se parte por la raíz exacta del denominador.

Es decir: $\sqrt{\dfrac{a}{b^2}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b^2}} = \dfrac{\sqrt{a}}{b} > \dfrac{a'}{b}$

Si a' es la raíz cuadrada de "a" en menos de una unidad o raíz entera, la raíz $\dfrac{a'}{b}$ resulta aproximada en menos de $\dfrac{1}{b}$.

Ejemplo:

$$\sqrt{\frac{20}{81}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{81}} = \frac{\sqrt{20}}{9} > \frac{4}{9}$$

$\therefore$ 4/9 resulta aproximada en menos de 1/9.

3.° Cuando el denominador o ninguno de los términos de la fracción son cuadrados perfectos, se hace que en este caso lo sea el denominador, multiplicando ambos términos por el denominador o por factores convenientes, quedando reducido al caso anterior.

Es decir: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{a \times b}{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{b} > \frac{a'}{b}$

Ejemplo:

$$\sqrt{\frac{7}{8}} = \sqrt{\frac{7 \times 2}{8 \times 2}} = \sqrt{\frac{14}{16}} = \frac{\sqrt{14}}{4} > \frac{3}{4}$$

$\therefore$ Se obtiene $\frac{3}{4}$ aproximadamente en menos de $\frac{1}{4}$.

De lo anterior, se desprende un medio sencillo para hallar la raíz cuadrada de un número racional entero o fraccionario con error menor que una cierta unidad fraccionaria.

Si queremos aproximar la raíz del número racional N en menos de 1/n, tendremos:

$$\sqrt{N} = \sqrt{\frac{N \times n^2}{n^2}} = \frac{\sqrt{N \times n^2}}{n}$$

Si la raíz de Nn^2 la llamo m en menos de 1, la raíz cuadrada de N en menos de $\frac{1}{n}$ será $\frac{m}{n}$, ya que: $\frac{m}{n} < \sqrt{N} < \frac{m+1}{n}$

Para extraer la raíz cuadrada de un número entero o fraccionario con error menor que una unidad fraccionaria cualquiera, se multiplica el número dado por el cuadrado del denominador de esta, se extrae del producto la raíz aproximada en menos de la unidad y el resultado se divide por dicho denominador.

Ejemplo:

Calcular $\sqrt{\frac{4}{5}}$ en menos de $\frac{1}{8}$

Resolución:

Como el denominador es 8, tenemos:

$$\sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{\sqrt{\frac{4}{5} \times 8^2}}{8} = \frac{\sqrt{51\frac{1}{5}}}{8} > \frac{7}{8}$$

$\therefore$ La raíz aproximada en menos de $\frac{1}{8}$ es $\frac{7}{8}$.

Análogamente para la raíz cúbica, resulta

1.° Para extraer la raíz cúbica de una fracción, cuyos términos son cubos perfectos, se extraen las raíces cúbicas de los dos términos y el quebrado resultante es la raíz cúbica exacta.

Es decir: $\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{b^3}} = \frac{a}{b}$

Ejemplo:

Calcular: $\sqrt[3]{\frac{64}{729}}$

Resolución:

Se tiene: $\sqrt[3]{\frac{64}{729}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{729}} = \frac{4}{9}$

2.° Cuando el denominador es cubo perfecto, se extrae la raíz entera del numerador y esta se divide por la raíz exacta del denominador.

Es decir: $\sqrt[3]{\frac{a}{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{b} > \frac{a'}{b}$

Ejemplo:

Calcular aproximadamente: $\sqrt[3]{\frac{81}{512}}$

Resolución:

Se tiene: $\sqrt[3]{\frac{81}{512}} = \frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{512}} = \frac{\sqrt[3]{81}}{8} > \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ Se obtiene aproximadamente $\frac{1}{2}$ en menos de $\frac{1}{8}$.

3.° Cuando el denominador o ambos términos no son cubos perfectos, se hace que lo sea el denominador, para lo cual basta multiplicar los dos términos por el cuadrado de este último o por factores convenientes, quedando reducido al caso anterior.

Es decir: $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\frac{ab^2}{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b} > \frac{a'}{b}$

Ejemplo:

Calcular aproximadamente: $\sqrt[3]{\frac{5}{18}}$

Resolución:

Vemos que: $18 = 2 \times 3^2$

Los factores convenientes son: $2^2 \times 3 = 12$

Tenemos:

$$\sqrt[3]{\frac{5}{18}} = \sqrt[3]{\frac{5 \times 12}{18 \times 12}} = \frac{\sqrt[3]{60}}{\sqrt[3]{216}} = \frac{\sqrt[3]{60}}{6} > \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ Se obtiene aproximadamente $\frac{1}{2}$ en menos de $\frac{1}{6}$.

Si queremos aproximar la raíz cúbica del número racional N en menos de $\frac{1}{n}$ tendremos:

$$\sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{\frac{N \times n^3}{n^3}} = \frac{\sqrt[3]{N \times n^3}}{n} > \frac{m}{n}$$

Luego, se cumple: $\frac{m}{n} < \sqrt[3]{N} < \frac{m+1}{n}$

Para extraer la raíz cúbica de un numero entero o fraccionario con un error menor que una unidad fraccionaria cualquiera, se multiplica el número dado por el cubo del denominador de esta, se extrae del producto la raíz cúbica aproximada en menos de la unidad y el resultado se divide por dicho denominador.

Ejemplo:

Calcular $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ en menos de $\frac{1}{6}$

Resolución:

Como el denominador es 6, tenemos:

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt[3]{\frac{2}{3}\times 6^3}}{6}=\frac{\sqrt[3]{144}}{6}>\frac{5}{6}$$

$\therefore$ La raíz cúbica aproximada en menos de $\frac{1}{6}$ es $\frac{5}{6}$.

ARITMÉTICA MODULAR: CONGRUENCIAS

Se dice que dos números son congruentes respecto a un módulo "m", cuando al dividirlos por "m" dan igual resto, positivo o negativo. La relación que expresa esta particularidad, se llama congruencia.

Notación: $a \equiv b(\text{mod. } m) \vee a \equiv b(m)$

Se lee: "a congruente con b, módulo m".

Los números "a y b" se llaman miembros de la congruencia pudiendo ser positivos o negativos, pero el módulo se supone siempre positivo.

Ejemplo:

Los números 43 y 28 los expresamos respecto al módulo 5:

$$\left.\begin{array}{l} 43=\overset{\circ}{5}+3=\overset{\circ}{5}-2 \\ 28=\overset{\circ}{5}+3=\overset{\circ}{5}-2 \end{array}\right\}$$ Como los residuos, positivos (3) o negativos (2), son iguales, tenemos: $43 \equiv 28\ (5)$.

Por oposición, se llaman incongruentes respecto a "m" dos números que dan distinto resto, expresándose:

$$c \not\equiv d(m)$$

Ejemplo:

Expresamos los números 23 y 61 respecto al módulo 7, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} 23=\overset{\circ}{7}+2=\overset{\circ}{7}-5 \\ 61=\overset{\circ}{7}+3=\overset{\circ}{7}-2 \end{array}\right\}$$ Como los residuos, positivos o negativos, son diferentes, afirmamos que: $23 \not\equiv 61\ (7)$.

Principios fundamentales

De la definición de congruencia, resultan los siguientes principios:

I. Todo número es congruente consigo mismo respecto de cualquier módulo.

Ejemplo:

Expresamos al 28 respecto al módulo 6.

$28=\overset{\circ}{6}+4$, luego se tiene: $28 \equiv 28\ (6)$.

II. Todo número "a" es congruente con el resto de la división por "d" (módulo d).

Es decir: $a \equiv r\ (d);\ r < d$.

Ejemplo:

Al dividir 73 por 5, se obtiene residuo 3; y, si ahora los expresamos respecto al módulo 5, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} 73=\overset{\circ}{5}+3=\overset{\circ}{5}-2 \\ 3=\overset{\circ}{5}+3=\overset{\circ}{5}-2 \end{array}\right\}\text{Luego: } 73=3\ (5)$$

III. Todo múltiplo de un número "a" es congruente con cero, módulo "a": $\overset{\circ}{a}=0\ (a)$

Ejemplo:

Sabemos que 24 es múltiplo de 8 y si lo expresamos juntamente con el cero, respecto al módulo 8, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} 24=\overset{\circ}{8} \\ 0=\overset{\circ}{8} \end{array}\right\}\text{Luego: } 24=0\ (8)$$

Propiedades de las congruencias

I. Dos números congruentes con un tercero respecto del mismo módulo son congruentes entre sí.

Si: $a \equiv b(m);\ b \equiv c(m)$, entonces: $a \equiv c(m)$

II. La condición necesaria y suficiente para que dos números sean congruentes con respecto a un módulo es que su diferencia sea múltiplo del módulo.

Si: $a \equiv b(m)$, entonces: $a - b = mk$.

Ejemplo:

Expresamos al 66 y 38 respecto al módulo 7:

Restando:
$$\begin{array}{l} 66=\overset{\circ}{7}+3 \\ \underline{38=\overset{\circ}{7}+3} \\ 28=(\overset{\circ}{7}+3)-(\overset{\circ}{7}+3) \\ 28=\overset{\circ}{7} \end{array}$$

Restando:
$$\begin{array}{l} 66=\overset{\circ}{7}-4 \\ \underline{38=\overset{\circ}{7}-4} \\ 28=(\overset{\circ}{7}-4)-(\overset{\circ}{7}-4) \\ 28=\overset{\circ}{7} \end{array}$$

III. Si dos números son congruentes también lo serán respecto de cualquier divisor del módulo.

Ejemplo:

Sabemos que: $75 \equiv 27\ (12)$

Luego: $75 \equiv 27(6) \vee 75 \equiv 27(4)$
$\vee\ 75 \equiv 27(3) \vee 75 \equiv 27(2)$

IV. Se pueden multiplicar los dos miembros y el módulo por h.

Si a y b son congruentes respecto al módulo m:
$a \equiv b(m)$

Luego, su diferencia es múltiplo de m: $a - b = mk$

Multiplicamos a ambos miembros por h:
$ah - bh = (mh)k$

Luego, la congruencia será: $ah = bh(mh)$

V. Si dos números son congruentes respecto de varios módulos, son congruentes del MCM de éstos.

Si: $a \equiv b(m);\ a \equiv b(m');\ a \equiv b(m'');\ \ldots$
$a > b;\ a - b \equiv \overset{\circ}{m};\ a - b \equiv \overset{\circ}{m'};\ a - b \equiv \overset{\circ}{m''}$

Luego: $a - b = MK;\ a \equiv b(M)$,
donde: $M \equiv MCM\ (m;\ m';\ m'';\ \ldots)$

Ejemplo:

Si los números 107 y 212 los expresamos respecto a los módulos 7;5 y 3, resultan:

$$\left.\begin{array}{l} 107=\overset{\circ}{7}+2=\overset{\circ}{7}-5 \\ 212=\overset{\circ}{7}+2=\overset{\circ}{7}-5 \end{array}\right\}\text{Luego: } 212 \equiv 107(7)$$

$$\left.\begin{array}{l}107 = \overset{\circ}{5} + 2 = \overset{\circ}{5} - 3 \\ 212 = \overset{\circ}{5} + 2 = \overset{\circ}{5} - 3\end{array}\right\} \text{Luego: } 212 \equiv 107(5)$$

$$\left.\begin{array}{l}107 = \overset{\circ}{3} + 2 = \overset{\circ}{3} - 1 \\ 212 = \overset{\circ}{3} + 2 = \overset{\circ}{3} - 1\end{array}\right\} \text{Luego: } 212 \equiv 107(3)$$

Pero: M = MCM (7; 5; 3) = 105

Luego, con respecto al módulo 105:

$$\left.\begin{array}{l}107 = \overset{\circ}{105} + 2 \\ 212 = \overset{\circ}{105} + 2\end{array}\right\} \text{Luego: } 212 \equiv 107(105)$$

VI. En toda congruencia el MCD de un miembro y el módulo es el mismo que el del otro miembro y el módulo.

Si: $a \equiv b$ (m), entonces: MCD(a; m) = MCD(b; m)

Corolario: Si el módulo de una congruencia es primo con un miembro también lo será con el otro.

Operaciones con las congruencias

I. Las congruencias de igual módulo se pueden sumar, restar y multiplicar ordenadamente.

Si: $a \equiv a'(m)$; $b \equiv b'(m)$; $c = c'(m)$

Luego:

La suma: $a + b + c \equiv (a' + b' + c')$ (m)

La diferencia: $a - b \equiv (a' - b')$ (m)

El producto: $abc \equiv a'b'c'$ (m)

Como consecuencia, tenemos:

- A los dos miembros de una congruencia se les puede sumar o restar un mismo número.
- Se pueden multiplicar los dos miembros de una congruencia por un mismo número.
- Se pueden potenciar por un mismo número "n" los dos miembros de una congruencia.
  Si: $a \equiv b$ (m)
  Elevando ambos miembros a la "n": $a^n = b^n(m)$
- En toda congruencia se puede trasponer uno de sus términos:
  Si: $a = (b + c)(m)$
  Trasponiendo b al primer miembro:
  $a - b = c$ (m)
  Trasponiendo c al primer miembro:
  $a - b - c = 0$ (m)

II. Se pueden dividir los dos miembros de una congruencia por un factor común primo con el módulo.

Si: a n = b n (m); si n es primo con m.

Sabemos que: $an - bn = (a - b)n = \overset{\circ}{m}$

Luego: $a - b = \overset{\circ}{m}$

Enseguida: $a = b\ (\overset{\circ}{m})$

Ejemplo:

Sabemos que 40 y 68 son congruentes con respecto al módulo 7.

$$\left.\begin{array}{l}40 = \overset{\circ}{7} + 5 = \overset{\circ}{7} - 2 \\ 68 = \overset{\circ}{7} + 5 = \overset{\circ}{7} - 2\end{array}\right\} \text{Luego: } 68 = 40(7)$$

Ahora, si dividimos 40 y 68 entre 4, resulta con respecto al módulo 7, (4 y 7 son primos entre sí)

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{40}{4} = 10 = \overset{\circ}{7} + 3 = \overset{\circ}{7} - 4 \\ \dfrac{68}{4} = 17 = \overset{\circ}{7} + 3 = \overset{\circ}{7} - 4\end{array}\right\} 17 = 10(7)$$

III. En toda congruencia se puede sustituir un término cualquiera por otro congruente con él.

Si: $a + b + c = d$ (m)

y: $b = h$ (m)

Restando las dos congruencias: $a + c = (d - h)(m)$

Luego: $a + h + c = d(m)$

Donde el término b se ha sustituido por h.

TEORÍA DE LOS NÚMEROS

Números amigos

Se dice que dos números son amigos si la suma de los divisores de cada uno de ellos es igual al otro número. Los números 220 y 284 son amigos. Los divisores de 220 son: 1; 2; 4; 5; 10; 11; 20; 22; 44; 55; 110 y 220, si los sumamos (excluyendo 220) da 284. Los divisores de 284 son: 1; 2; 4; 7; 142 y 284, si los sumamos (excluyendo 284) da 220.

Este par de números amigos era conocido por los griegos. El siguiente par de números amigos fue descubierto en el siglo XIII y redescubierto por Fermat en 1636 (los números 17 296 y 18 416). Descartes descubrió el siguiente par: 9 363 584 y 9 437 056.

Fermat estableció que para cualquier $n > 1$ si p; q y r (definidos por las fórmulas indicadas debajo) son primos, los números 2^n pq y 2^nr son amigos.

$$p = 3 \times 2^{n-1} - 1;\quad q = 3 \,.\, 2^{n-1};\quad r = 9^{2n+1} - 1$$

No todos los números amigos se obtienen con esta fórmula, pero sí son amigos todos los números que se obtienen con la fórmula.

Para n = 2, se obtienen los números 220 y 284.

El tema no avanzó más hasta que Euler descubrió la norma que cumplen estos números.

Los números perfectos cumplen la condición $2^{n-1}(2^n - 1)$ siendo $2^n - 1$ un número primo de Mersenne.

Todos estos grandes matemáticos se saltaron el par 1184 – 1210 que fue descubierto por un niño italiano de 16 años Niccolo Paganini.

Los números sociables son una generalización de los números amigos. Tres o más números se dice que son sociables si la suma de los divisores del primero con el segundo, los del segundo con el tercero, y los del último con el primero son iguales.

Números perfectos

Un número se dice que es perfecto cuando la suma de sus divisores propios es igual al número.

Los primeros números perfectos son: 6; 28; 496; 8128; 33 550 336; 8 589 869 056. Observa que todos los nú-

meros perfectos terminan en 6 u 8, pero ¡ojo! no se van alternando indefinidamente.

Los números perfectos tienen una bonita propiedad, descubierta por **Pitágoras**:

$6 = 1 + 2 + 3$
$28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$
$496 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \ldots + 30 + 31$
$8128 = 1 + 2 + 3 + \ldots + 126 + 127$

Euclides descubrió que los números perfectos tienen esta forma:

$$6 = 2^1(2^2 - 1);\; 28 = 2^2(2^3 - 1)$$
$$496 = 2^4(2^5 - 1);\; 8128 = 2^6(2^7 - 1)$$

Este número, $2^{216\,090}$ o $(2^{216\,091} - 1)$, que tiene más de cien mil dígitos, es perfecto.

Los números perfectos cumplen la condición $2^{n-1}(2^n - 1)$ siendo $2^n - 1$ un **número primo de Mersenne**. Por lo tanto, los números perfectos y los números primos de Mersenne están relacionados.

Un número se dice ligeramente deficiente si la suma de sus divisores es igual al número menos uno. Hay bastantes números que cumplen esta condición, en cambio no se ha encontrado ningún número ligeramente abundante (cuando sus divisores suman el número mas uno). Nadie ha conseguido demostrar que no existen números ligeramente abundantes.

Un número es abundante cuando la suma de sus divisores propios es mayor que el número.

Un número es deficitario cuando la suma de sus divisores propios es menor que el número.

Problemas no resueltos

¿Hay algún número perfecto impar?
¿Hay infinitos números perfectos?

Números poligonales

Los números poligonales se remontan al comienzo mismo de la matemática. Fueron los pitagóricos los que los descubrieron.

Tal vez, la mejor forma de comprender los números poligonales es percatarse que en aquella época los números se representaban mediante guijarros (calculi) que se disponían en una superficie.

Algunos números pueden disponerse formando figuras geométricas, por ejemplo 3 guijarros se pueden disponer formando un triángulo, 4 forman un cuadrado, etc.

Los números triangulares (1; 3; 6; 10; 15; ...) son enteros del tipo $N = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

Los números cuadrados (1; 4; 9; 16; 25; ...) son enteros del tipo $N = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1)$

Los números pentagonales (1; 5; 12; 22; ...) son enteros del tipo $N = 1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2)$

Los números hexagonales (1; 6; 15; 28; ...) son del tipo $N = 1 + 5 + 9 + \ldots + (4n - 3)$

En general, los poligonales son enteros del tipo:

$$n + \frac{n(n-1)b}{2}$$

Cuando b = 1 se dice que es un número triangular; para b = 2 cuadrados; para b = 3 pentagonales.

Los números poligonales se pueden obtener mediante recurrencia (sea n el número de orden del número poligonal):

$$T(n) = T(n-1) + n$$
$$C(n) = C(n-1) + (2n-1)$$
$$P(n) = P(n-1) + (3n-2)$$
$$M(n) = M(n-1) + (m-2)(n-1) + 1$$

Observemos que si tomamos el primer número de cada serie de números poligonales (3; 4; 5; 6; ...) obtenemos una progresión aritmética de diferencia 1. Si tomamos el segundo número de cada serie (6; 9; 12; 15; ...) obtenemos una progresión aritmética de diferencia 3, y así sucesivamente.

Según Fermat todo número entero puede expresarse mediante la suma de n números n-gonales como máximo. Gauss demostró esta conjetura para los números triangulares y cuadrados. Cauchy consiguió dar una demostración general.

NÚMEROS		ORDEN			
	1	2	3	4	5
TRIANGULARES					
CUADRADOS					
PENTAGONALES					
HEXAGONALES					
HEPTAGONALES					

Los números poligonales se pueden obtener del triángulo de Pascal.

De la observación de la figura se deduce que todo número cuadrado (de cualquier orden) es la suma de un número triangular del mismo orden y otro de orden inmediatamente anterior.

Por ejemplo: $9 = 6 + 3$; $25 = 15 + 10$.

Esto se puede representar de esta forma:

$$C(n) = T(n) + T(n - 1).$$

Un número pentagonal se puede obtener como la suma de uno triangular del mismo orden más dos veces otro de orden inmediatamente anterior.

Por ejemplo: $22 = 10 + 2 \times 6$.

Eso se puede representar de esta forma:

$$P(n) = T(n) + 2T(n - 1).$$

Un número hexagonal se puede obtener como la suma de uno triangular del mismo orden más tres veces otro de orden inmediata anterior.

Por ejemplo: $28 = 10 + 3 \times 6$.

Eso se puede representar de esta forma:

$$H(n) = T(n) + 3T(n - 1).$$

La fórmula general para un número poligonal de m lados sería: $M(n) = T(n) + (m - 3)T(n - 1)$.

Otra propiedad curiosa de los números poligonales es esta:

$C(n) = T(n) + T(n - 1)$
$P(n) = C(n) + T(n - 1)$.
$H(n) = P(n) + T(n - 1)$.

Algunos números pertenecen a dos familias diferentes. Por ejemplo: 36 es un número triangular de orden 8 y cuadrangular de orden 6.

Números pseudoprimos

Se llaman números pseudoprimos a los números que parecen primos pero no lo son.

La única forma certera de determinar si un número es primo es dividir por todos los anteriores (bueno, podríamos apañarnos para quitar algunos números que sabemos no son primos, los pares, los terminados en 5, etc.) y comprobar que el resto no es cero en ninguno de ellos. Cuando el número es muy grande, este proceso es inviable, incluso con potentes ordenadores, por eso se utilizan métodos probabilísticos. Si el número cumple la prueba y no es primo, se dice que ese número es pseudoprimo.

Por ejemplo, si decimos que todos los primos son de la forma $6n + 5$, y el número elegido es el 35, diremos que 35 es un pseudoprimo porque cumple la condición $6n + 5$ y no es primo.

Una de las pruebas más aplicadas es el del pequeño teorema de Fermat, que dice que si p es primo, entonces para cualquier b se verifica que $b^{p-1} = 1$ modo p. La manera de comprobar esto es cogiendo un b cualquiera y comprobar si se verifica el teorema.

Sin embargo, no supone ninguna garantía, desde luego si no lo verifica, podemos afirmar que el número es compuesto, pero si lo verifica, no podemos afirmar con seguridad que sea primo. Si nos dan el número 91 y elegimos b (que llamamos base) igual a 3 se verifica, se cumple la prueba, sin embargo, 91 no es primo.

Por el contrario, si elegimos como base 2, no lo verifica, por lo tanto no es primo por eso decimos que es pseudoprimo de base 3.

Si elegimos un número b, entre 1 y p, tenemos una probabilidad de 1/2 de que sea primo; si elegimos dos números la probabilidad es de 1/4 y así sucesivamente. Por lo tanto, tenemos un método probabilístico, que lo único que nos dice con seguridad es si el número es compuesto.

Hay unos números que sin ser primos, pasan el test para todas las bases entre 1 y p, son los números de Carmichael (el más pequeño es el 561). También existen los pseudoprimos de Euler y los pseudoprimos fuertes.

Polinomios generadores de números primos

Sería magnífico encontrar un método rápido para saber si un número es primo o una fórmula que generase números primos. Ninguna de las dos cosas existe. Lo más parecido a lo segundo son unos polinomios que generan números primos. El más famoso es el de Euler: $x^2 + x + 41$.

Este sencillo polinomio genera números primos para todos los valores de x entre 0 y 39. El polinomio $x^2 - x + 41$ también genera números primos para todos los valores de x entre 1 y 40.

Legendre encontró dos polinomios que generan números primos: $2x^2 + 29$, genera números primos para valores de x entre 0 y $28 \times x^2 + x + 17$ genera números primos para valores de x entre 0 y 15.

El polinomio de Euler puede transformarse, haciendo $x = y - 40$ en este otro polinomio: $y^2 + 79y + 1601$ que genera números primos para 80 números consecutivos.

Los polinomios de Euler y Legendre son muy parecidos, ambos tienen la forma: $x^2 + x + a$.

Cuando a = 2; 3; 5; 11; 17 y 41, el polinomio genera números primos.

Goldbach demostró que ningún polinomio puede generar números primos para todos los valores y Legendre demostró que ninguna función algebraica racional genera siempre números primos.

ALGUNAS CONJETURAS PARA NÚMEROS PRIMOS

I. La conjetura de los primos gemelos: Diremos que dos números p y q son gemelos si $q = p + 2$. Por ejemplo 3 y 5; 5 y 7; 11 y 13; 29 y 31; etc. la conjetura dice que **existen infinitos primos gemelos**.

II. La conjetura de Goldbach (mencionada por primera vez en una carta de C. Goldbach a Euler en 1742): **cualquier número par más grande que 2 es suma de dos números primos**. Algunos ejemplos:

4 = 2 + 2	6 = 3 +3	8 = 5 + 3
10 = 7 + 3	12 = 7 + 5	14 = 11 + 3
16 = 13 + 3	18 = 13 + 5	20 = 17 + 3

Esta conjetura ha sido verificada hasta 10^{14}, pero aún no se ha encontrado un argumento matemático que demuestre que es cierta para todo número par. De hecho existen resultados ya muy "cercanos" a la conjetura:

- Se sabe que cualquier número par es suma de 6 o menos números primos (Ramaré, 1995).
- Se sabe también, demostrado por Chen en 1966, que cualquier número par "suficientemente grande" es suma de un número primo más el producto de dos números primos. El problema es que no está claro qué es lo que se quiere decir con "suficientemente grande".
- Obsérvese que si la conjetura de Goldbach es cierta, entonces cualquier número impar mayor que 5 ha de ser suma de 3 o menos números primos, llamada la conjetura de Goldbach impar. Vinogradov probó en 1937 que si n es un número impar suficientemente grande, entonces n es suma de tres números primos. Se deduce de esto que cualquier número par suficientemente grande es suma de 4 números primos o menos. Se ha visto que este "suficientemente grande" puede tomarse $10^{43\,000}$ (aún demasiado grande para poder comprobarlo por ordenador).
- También se sabe que si la hipótesis de Riemann es cierta, entonces la conjetura de Goldbach impar implica la conjetura de Goldbach (par). De hecho, también se ha visto (Deshouillers, Effinger, Te Riele y Zinoviev en 1997) que si la hipótesis de Riemann generalizada es cierta, entonces la conjetura de Goldbach también es cierta. Así que ¡Ánimo y a probar la hipótesis de Riemann!

III. ¿Existen infinitos primos de la forma $n^2 + 1$? Dirichlet probó que en cualquier progresión aritmética, o sea de la forma $\{a + bn / n \in \mathbb{N}\}$, con a, b coprimos entre sí, existen infinitos números primos. Posteriormente Chevotarev demostró que, fijado b y si denominamos fi(b): = n.º {a / 0 < a < b y a primo con b} tenemos que para cada a, el número de primos de la forma a + bn es 1/fi(b) el número de primos totales. Por ejemplo, el número de primos que en forma decimal acaban en 1 (o en 3, o en 7, o en 9) es un 25 % de los totales.

IV. ¿Existe siempre un número primo entre n^2 y $(n + 1)^2$? Se sabe que siempre hay un primo entre n y 2n, la llamada conjetura de Bertrand, que fue probada por Chebichev.

V. ¿Hay infinitos primos de Fermat? Aún más, ¿hay algún primo de Fermat además de los cuatro primeros?
Un primo de Fermat es un número primo de la forma $2^n + 1$. Es posible ver de forma relativamente fácil que si $2^n + 1$ es primo, entonces n es también una potencia de 2. Tenemos que:

n = 1	n = 2	n = 4	n = 8	n = 16	n = 32
3	5	17	257	65 537	641(6 700 417)

(Para n = 32 es producto de dos primos). La pregunta es si encontraremos algún otro primo según vayamos tomando potencias de 2.

VI. ¿Hay infinitos primos de Mersenne?
Un primo de Mersenne es un primo de la forma $2^n - 1$. Es posible ver fácilmente que si $2^n - 1$ es primo, entonces n también tiene que ser un número primo. Denotaremos por M (i) el i-esimo número de Mersenne. Los primeros números de Mersenne son:

n = 2	n = 3	n = 5	n = 7	n = 13	n = 17
M(1) = 3	7	31	127	8191	M(6)=131 071

El número de Mersenne más grande que se conoce es $M(38) = 2^{6972593} - 1$ (1 de Julio de 1949).

DEFINICIÓN DE PARADOJA

El concepto de paradoja puede entenderse como uno de los siguientes:

- Una declaración contradictoria que parece ser cierta.
- Aquello que exhibe aspectos o cualidades contradictorias o inexplicables.
- Una declaración esencialmente contradictoria basada en un razonamiento válido de suposiciones lógicas.

Las paradojas han existido en las matemáticas desde sus comienzos y han sido fundamentales para una for-

malización más cuidadosa de sus teoremas y leyes. Un ejemplo muy antiguo es la paradoja de Zeno, la cual cobró importancia en el desarrollo del cálculo; como veremos más adelante, las paradojas de la teoría de conjuntos han hecho que los matemáticos cuestionen la consistencia de las matemáticas y vean más allá de lo que hasta ahora se ha formulado.

Paradoja de Burali-Forti: conjunto de todos los números ordinales

Sea D el conjunto de todos los números ordinales. Por un teorema anterior, D es un conjunto bien ordenado; sea A = ord (D). Considérese ahora S(A) el conjunto de todos los números ordinales menores que A. Obsérvese que:

- Puesto que S(A) consiste en todos los elementos de D que son anteriores a A, S(A) es una sección inicial de D.
- Por un teorema previo, A = ord (S(A)); por tanto, ord (S(A)) = A ord D

Por consiguiente D es isomorfo a una de sus secciones iniciales. Así pues el concepto de conjunto de todos los números ordinales lleva a una contradicción.

Paradoja de Cantor: el conjunto de todos los conjuntos

Sea C el conjunto de todos los conjuntos. Entonces todo subconjunto de C es así mismo un elemento de C; luego, el conjunto potencia de C es un subconjunto de C; pero esto implica que la cardinalidad del conjunto potencia es menor o igual a la cardinalidad de C. Pero entonces, según el teorema de Cantor, la cardinalidad de C debe ser menor a la cardinalidad del conjunto potencia. Así pues, el concepto de conjunto de todos los conjuntos lleva a una contradicción.

Paradoja de Russell

Sea Z el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos. Se pregunta ¿Z es o no elemento de sí mismo? Si Z no pertenece a Z, entonces por la definición de Z, Z no pertenece a sí mismo. En cualquiera de los dos casos hay contradicción.

Esta paradoja es análoga a la paradoja del barbero: En una aldea hay un barbero que afeita solamente a los hombres que no se afeitan ellos mismos. Se pregunta: ¿Al barbe ro quién lo afeita?

SUCESIÓN DE FIBONACCI

Está sucesión la descubrió Fibonacci, donde cada término es igual a la suma de los dos anteriores.

Es decir: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$; $n > 2$; $a_1 = 0$; $a_2 = 1$

De donde, la sucesión de Fibonacci es:

0; 1; 1; 2; 3; 5; 8; ...

Propiedades

La sucesión de Fibonacci tiene muchas propiedades curiosas:

I. La suma de los n primeros términos es: $a_{n+2} - 1$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = a_{n+2} - 1$$

II. La suma de los términos impares es: $a_{2n} - 1$

$$a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2n-1} = a_{2n} - 1$$

III. La suma de los términos pares es: a_{2n-1}

$$a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{2n} = a_{2n-1}$$

IV. La suma de los cuadrados de los n primeros términos es: $a_n \times a_{n+1}$

$$a_1^2 = a_2^2 + a_3^3 + \ldots + a_n^2 = a_n \times a_{n+1}$$

V. Si n es divisible por m, entonces a_n es divisible por a_m.

VI. Los números consecutivos de Fibonacci son primos entre sí.

La sucesión de Fibonacci tiene características aritméticas muy interesantes y, sin haberse pretendido, tiene aplicaciones importantes, como veremos:

1.ª secuencia:

Sucesión de Fibonacci: 0; 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; ...

Multiplicamos a cada término de la sucesión por 1,6: 0; 1,6; 1,6; 3,2; 4,8; 8; 12,8; 20,8; ...

Redondeamos cada número al entero más próximo, tenemos: 0; 2; 2; 3; 5; 8; 13; 21; ...

Vemos que a partir del tercer término (2) es precisamente la sucesión de Fibonacci, a excepción de algunos términos iniciales y posiblemente algunos posteriores, resulta que esta serie es autosimilar.

2.ª secuencia:

Sucesión de Fibonacci: 0; 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; ...

Tomamos un número de la sucesión y lo dividimos por el siguiente; si empezamos con el segundo término, resulta:

$\frac{1}{1} = 1$; $\frac{1}{2} = 0{,}5$; $\frac{2}{3} = 0{,}666$; $\frac{3}{5} = 0{,}6$; $\frac{5}{8} = 0{,}625$;

$\frac{8}{13} = 0{,}615$; $\frac{13}{21} = 0{,}619$; ...; etc

Si seguimos así, nos daremos cuenta de que todos los demás cocientes se van acercando al número 0,618. Este último recibe el nombre de Media Dorada.

Otra manera de obtenerlo, es como sigue:

- $1 + 1 = 2$, su inverso: $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$.
- Sumemos 1 a este número: $1 + 0{,}5 = 1{,}5$ su inverso: $\frac{1}{1{,}5} = 0{,}666$.

En verdad, la operación que se ha hecho es:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{1,5}$$

- Repetimos el procedimiento con 0,666.
  Le sumamos 1:
  $1 + 0,666 = 1,666$; su inverso: $\frac{1}{1,666} = 0,6$
  Vemos que la operación realizada es:
  $$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1,5}}=\frac{1}{1+0,666}=\frac{1}{1,666}=0,6$$
- Continuamos de esta manera con 0,6.
  Le sumamos 1: $1 + 0,6 = 1,6$; su inverso:
  $\frac{1}{1,6} = 0,625$
  Es lo mismo que:
  $$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1,5}}},$$
  $$=\frac{1}{1+\frac{1}{1+0,666}}=\frac{1}{1+0,6}=\frac{1}{1,6}=0,625$$
- Si se continúa con este procedimiento llega un momento en que se obtiene el número 0,618. Le sumamos 1: $1 + 0,618 = 1,618$; su inverso:
  $\frac{1}{1,618} = 0,618.$
  ¡Otra vez 0,618!, por tanto, al continuar con el procedimiento obtendremos todo el tiempo 0,618, que recibe el nombre de la Media Dorada.

Vemos que la Media Dorada se obtiene también como una fracción continua:

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ddots}}}}}$$

La sucesión de Fibonacci fue obtenida por primera vez en 1202 por el matemático italiano Leonardo de Pisa, hijo de Bonacci (en italiano, Figlio de Bonacci, o Fibonacci, nombre que se le quedó). Al tratar la cuestión del crecimiento de una población de conejos, se hizo la pregunta de cuántas parejas de conejos habrá después de cierto número de temporadas de crianza, esto es, cómo se multiplican los conejos. Para simplificar, supuso lo siguiente:

1. Se empieza con una pareja inmadura.
2. Los conejos maduran una temporada después de haber nacido.
3. Las parejas de conejos maduros producen una nueva pareja cada temporada de crianza.
4. Los conejos nunca mueren.

De acuerdo con estas reglas, el número de conejos en una generación es igual a la suma de las parejas de conejos que hay en las dos generaciones anteriores. Si se empieza con una pareja, después de una temporada se produce una nueva pareja. Por tanto, al final de la temporada hay $1 + 1 = 2$ parejas de conejos. Si se sigue de esta manera se encuentran los siguientes números de parejas en las sucesivas temporadas:

1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; ...

que es precisamente la secuencia de Fibonacci.

Otra manera de ver lo anterior es como sigue: vamos a llamar con el número 0 a una pareja inmadura y con el 1 a una pareja madura. Por tanto, después de una temporada una pareja inmadura (0) producirá una pareja madura (1), o sea, donde hay, un 0 → 1. Además, una pareja madura (1) produce una pareja inmadura (0) y, por lo tanto, después de esta temporada existirá la pareja madura (1) y la inmadura (0). En consecuencia, después de una temporada donde hay un 1 → 10. Con esta regla de transformar unos y ceros, veamos qué se obtiene al transcurrir las temporadas.

Si empezamos con 0 → 1; este 1 → 10; el último 1 → 10; y el 0 se transforma en 1, por lo que el 10 → 101. Transformando cada uno de estos números de acuerdo con la regla que dimos: 101 → 10 110

Este último número se transforma, a su vez, en:

10 110 → 10 110 101

y éste a su vez en: 10 110 101 → 1 011 010 110 110

y así seguimos indefinidamente. De esta forma se obtiene la secuencia siguiente:

0; 1; 10; 101; 10 110; 10 110 101; 1011010110110; ...

llegando después de muchas temporadas, al número:

1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 ...

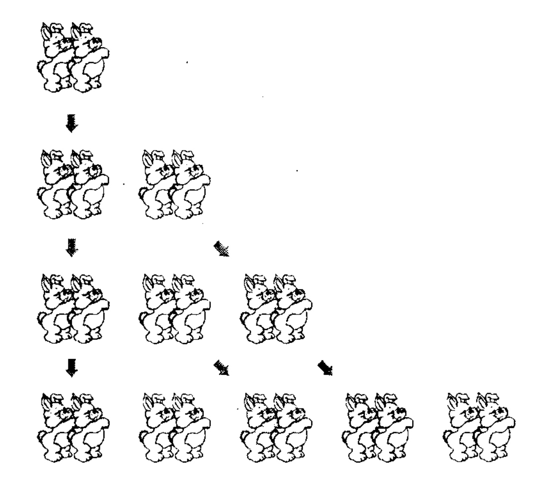
¿Es esta secuencia autosimilar? En este número vamos a subrayar las parejas "10":

<u>1 0</u> 1 <u>1 0</u> <u>1 0</u> 1 <u>1 0</u> 1 <u>1 0</u> 1 <u>1 0</u> ...

Si en lugar de cada pareja "10" subrayada sustituimos ahora un "1", y en lugar de cada "1" no subrayado sustituimos un "0", encontramos lo siguiente:

1 0 1 1 1 0 1 0 1 ... que es la secuencia (A).

Esta secuencia la podemos ver gráficamente como sigue:



Una pareja inmadura se muestra en blanco y otra, madura, en negro. Son los resultados que se obtienen en cada temporada.

Dibujemos una pareja inmadura en blanco, y una pareja madura en negro. Al principio hay sólo una pareja inmadura (renglón 1). Después de una temporada, esta pareja llega a la madurez (renglón 2) y, además de seguir viviendo, produce una pareja inmadura después de una temporada. Por tanto, en la tercera temporada (renglón 3) hay una pareja madura y una inmadura. Siguiendo con este razonamiento, se muestra en la figura anterior las poblaciones en varias temporadas posteriores. Si ahora representamos una pareja inmadura (en blanco) con el "0" y a una madura (en negro) con el "1", se van obteniendo las siguientes secuencias:

0
1
10
101
10110
10 110 101

que son precisamente las secuencias que vimos arriba. El lector se dará cuenta de que una pareja inmadura (0) produce una pareja madura (1), o sea, 0 $\rightarrow$ 1. Además, después de una temporada, una pareja madura (1) produce una inmadura (0), por lo que al final de la temporada quedan la madura (1) y la inmadura (0), o sea 1 $\rightarrow$ 10. Estas transformaciones son precisamente las que se usaron arriba.

ARITMÉTICA RECREATIVA

Museo de curiosidades aritméticas

En el mundo de los números, como también en el mundo de los seres vivos, se encuentran maravillas auténticas, ejemplares únicos, que poseen propiedades singulares. A partir de tales números no ordinarios de dicha especie, pudo ser constituido un museo de rarezas numéricas: el presente «museo de curiosidades aritméticas». En sus vitrinas hallaremos el lugar, no solamente de los gigantes numéricos sino también de los números de dimensiones discretas que, en compensación, se distinguen de la serie de los otros por ciertas propiedades no habituales. Algunos de ellos atraen la atención ya, por fácil apariencia; otros descubren sus particularidades singulares solamente con un conocimiento más profundo. Las particularidades interesantes de ciertos números representados en nuestra "galería", no tienen nada en común con algunas singularidades imaginarias que, los aficionados a lo misterioso, perciben en otros números. Como ejemplo de semejantes supersticiones numéricas, puede servir la siguiente reflexión aritmética, expresada sin cautela por el conocido escritor francés Víctor Hugo:

"El tres es un número perfecto. La unidad es al número 3, lo mismo que el diámetro al círculo. El número 3 es el único que posee centro. Los demás números, son elipses que tienen dos focos. De aquí, se sigue una particularidad propia, exclusiva del número 3. Al sumar las cifras de cualquier número múltiplo de 3, la suma es divisible exactamente por 3".

En esta vaga y aparentemente profunda revelación, todo es inexacto; lo que no es frase, carece de sentido o es un absurdo. Solamente es justa la observación sobre la propiedad de la suma de las cifras, pero dicha propiedad no surge de lo señalado, y por lo mismo no representa una particularidad exclusiva del número 3: por ella se distingue en el sistema decimal, también el número 9; y en otros sistemas, los números menores, en una unidad, que la base.

Invito al lector a realizar una excursión por la galería de tales maravillas numéricas y a entablar conocimiento con algunas de ellas. Pasemos, sin detenernos, delante de las primeras vitrinas que encierran números cuyas propiedades son bien conocidas por nosotros. Sabemos ya por qué se hallaba el número 2 en la galería de maravillas: no porque sea el primer número par sino porque es la base de un interesante sistema de numeración. No será inesperado para nosotros encontrar aquí el número 9, también naturalmente, no como un "símbolo de constancia", sino como el número que nos asegura la comprobación de todas las operaciones aritméticas. Pero aquí está la vitrina; veamos a través de su cristal.

El número 12

¿Qué tan admirable es? Es el número de meses en el año y el número de unidades en la docena. Pero, en esencia, ¿qué hay de particular en la docena? Por po-

cos es conocido que el 12 es el antiguo y derrotado rival del número 10 en la lucha por el puesto honorífico de base del sistema de numeración. Un pueblo de gran cultura del Antiguo Oriente, los babilonios, y sus predecesores sumerios, realizaban los cálculos en el sistema duodecimal de numeración. Hasta ahora, hemos pagado algo de tributo a este sistema, no obstante la victoria del decimal. Nuestra afición a las docenas y las gruesas, nuestra división del día en dos docenas de horas, la división de la hora en 5 docenas de minutos, la división del minuto en otros tantos segundos, la división del círculo en 30 docenas de grados, y finalmente, la división del pie en 12 pulgadas, ¿no atestigua todo esto (y muchas otras cosas) sobre la gran influencia, en nuestros días, del antiguo sistema?

¿Es conveniente que en la lucha entre la docena y la decena haya triunfado esta última?

Naturalmente, por las intensas ligas de la decena con los diez dedos, nuestras propias manos han sido y continúan siendo máquinas calculadoras naturales. Pero si no fuera por esto, entonces convendría, incondicionalmente, dar la preferencia al 12 antes que al 10. Es mucho más conveniente realizar los cálculos en el sistema duodecimal que en el decimal. Esto se debe a que el número 10 es divisible por 2 y 5, mientras que el 12 es divisible por 2; 3; 4 y 6. En 10 hay, en total, dos divisores; en 12, cuatro. Las ventajas del sistema duodecimal se tornan claras si se considera que en este sistema un número que termina con cero, es múltiplo de 2; 3; 9 y 6: reflexiónese: ¡Qué tan cómodo es dividir un número cuando precisamente 1/2; 1/3; 1/4 y 1/6 deben ser números enteros!

Si el número expresado en el sistema duodecimal termina con dos ceros, deberá ser divisible por 144, y por consiguiente, también entre todos los multiplicadores de 144, es decir, entre la siguiente serie de números:

2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 16; 18; 24; 36; 48; 72; 144

Catorce divisores, en lugar de los ocho que tienen los números escritos en el sistema decimal, si terminan con dos ceros (2; 4; 5; 10; 20; 25; 50 y 100). En nuestro sistema solamente fracciones de la forma $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{20}$; etc., se convierten en decimales finitos; en el sistema duodecimal se pueden escribir sin denominador diversas fracciones y ante todo: 1/2; 1/3; 1/4; 1/6; 1/8; 1/9; 1/12; 1/16; 1/18; 1/24; 1/36; 1/48; 1/72; 1/144, las que respectivamente se representan así:

0,6; 0,4; 0,3; 0,2; 0,16; 0,14; 0,1; 0,09; 0,08; 0,06; 0,04; 0,03; 0,02; 0,01.

Por otra parte, sería un gran error pensar que la divisibilidad de un número puede depender del sistema de numeración en que esté representado. Si unas nueces contenidas en un saco, pueden ser separadas en 5 montones idénticos, entonces esta propiedad de ellas, naturalmente, no se modifica a causa de que nuestro número de nueces esté expresado en uno u otro sistema de numeración o dispuesto en un ábaco, o escrito con letras, o representado por cualquier otro método. Si el número escrito en el sistema duodecimal es divisible por 6 o por 72, entonces, al ser expresado en otro sistema de numeración, por ejemplo en el decimal, deberá tener los mismos divisores. La diferencia consiste únicamente en que, en el sistema duodecimal la divisibilidad por 6 o por 72 es fácil de descubrir (el número termina en uno o en dos ceros).

Ante tales ventajas del sistema duodecimal, no es extraño que entre los matemáticos se corriera la voz en favor de un traslado total a este sistema. Sin embargo, estamos ya demasiado acostumbrados al sistema decimal como para resolverse por tal sistema. El gran matemático francés Laplace emitió la siguiente opinión respecto a dicho problema: "La base de nuestro sistema de numeración no es divisible por 3 ni por 4, es decir, entre dos divisores muy empleados por su sencillez. La incorporación de dos nuevos símbolos (cifras) daría al sistema de numeración esta ventaja; pero tal innovación sería, sin duda, contraproducente. Perderíamos la utilidad que dio origen a nuestra aritmética que es la posibilidad de calcular con los dedos de las manos".

Por el contrario, procedía por uniformidad pasar también a los decimales en la medición de los arcos, de los minutos y de los grados.

Dicha reforma se intentó realizar en Francia, pero no llegó a implantarse. No había otro, aparte de Laplace que fuera un ardiente partidario de esta reforma. Su célebre libro "Exposición de un sistema del mundo" sucesivamente realiza la subdivisión decimal de los ángulos; llama grado, no a la noventava, sino a la centésima parte de un ángulo recto; minuto a la centésima parte de un grado, etc. Inclusive, Laplace emitió su opinión sobre la subdivisión decimal de las horas y de los minutos. "La uniformidad del sistema de medidas, requiere que el día esté dividido en 100 horas, la hora en 100 minutos, el minuto en 100 segundos" escribió el eminente geómetra francés.

Se ve, por consiguiente, que la docena tiene por sí misma, una larga historia, y que el número 12 no sin fundamento se encuentra en la galería de las maravillas numéricas.

Por el contrario su contiguo, el número 13, figura aquí no porque sea notable, sino más bien por no serlo, aunque precisamente se emplea por una gloria sombría: ¿no es extraordinario que no habiendo nada que distin-

ga al número, pudiera éste llegar a ser "peligroso" para la gente "supersticiosa"?.

La forma en que fue propagada esta superstición (que se originó en la antigua Babilonia) es evidente por el hecho de que en la época del régimen zarista, en el dispositivo del tranvía eléctrico en Petersburgo no se decidieron a introducir la ruta número 13, omitiéndola y pasando a la número 14. Las autoridades pensaban que el público no quería viajar en vagones con tal «siniestro» número. Es curioso que en Petersburgo los alojamientos que atendían 13 cuartos, estuvieran solitarios... en los hoteles, generalmente no existía la habitación número 13. Para la lucha contra esta superstición numérica, sin fundamento, en algunas partes de Occidente (por ejemplo, en Inglaterra) se han constituido inclusive "clubes del número 13" especiales.

En la siguiente vitrina del museo de maravillas aritméticas vemos ante nosotros al número 365.

Número 365

Es notable, ante todo porque denomina el número de días en el año. Además, en la división por 7 da como residuo 1. Por ser un residuo tan insignificante, esta propiedad del número 365 adquiere un gran significado para nuestro calendario de siete días. Otra propiedad del número 365 no relacionada con el calendario es:

$$365 = 10 \times 10 + 11 \times 11 + 12 \times 12,$$

es decir, que el número 365 es igual a la suma de los cuadrados de tres números consecutivos, empezando por el 10: $10^2 + 11^2 + 12^2 = 100 + 121 + 144 = 365$

Pero además, es igual a la suma de los cuadrados de los dos siguientes números, 13 y 14:

$$13^2 + 14^2 = 169 + 196 = 365$$

En esta propiedad del número 365 se basa el conocido problema de S.A. Rachinsky que inspiró el famoso cuadro de Bogdánov-Belsky

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365} = 2$$

Pocos números de esta índole se reúnen en nuestra galerías de maravillas aritméticas.

Tres nueves

En la siguiente vitrina está expuesto el mayor de todos los números de tres cifras, el 999. Dicho numero, sin duda es mucho mas extraordinario que su imagen volcada 666, el famoso "número bestial" del Apocalipsis que ha inspirado un temor absurdo entre algunas gentes supersticiosas que, conforme a las propiedades aritméticas nada hay que lo distinga de los demás números.

999

Fig. 1. Un número por el cual es fácil multiplicar

Una propiedad interesante del número 999 se manifiesta en su multiplicación con cualquier otro número de tres cifras. Entonces se obtiene un producto de seis cifras; sus tres primeras cifras constituyen el número multiplicado disminuido en la unidad y las tres cifras restantes (inclusive la última) son el «complemento» al 9 de las primeras.

Por ejemplo: 573

$$573 \times 999 = 572\,427$$

Basta, solamente, echar una ojeada al siguiente renglón para entender el origen de esta particularidad:

$$573 \times 999 = 573(1000 - 1) = 573\,000 - 573 = 572\,427$$

Conociendo esta particularidad, podemos multiplicar «instantáneamente», cualquier número de tres cifras por 999:

$$917 \times 999 = 916\,083; \quad 509 \times 999 = 508\,491;$$
$$981 \times 999 = 980\,019.$$

Y puesto que $999 = 9 \times 111 = 3 \times 3 \times 3 \times 37$, se pueden, otra vez con la rapidez de un rayo, escribir colonias enteras de números de seis cifras, múltiplos de 37. No conocidas las propiedades del número 999, naturalmente no se está en situación de hacer esto. Hablando brevemente, se pueden organizar ante profanos, pequeñas funciones de "multiplicación y división instantáneas".

El número de Scheherezade

El que sigue en turno es el número 1001 , el célebre número de Scheherezade. Pocos sospechan, probablemente, que en la denominación misma de una colección de cuentos encantados árabes se encuentra una especie de maravilla, que podría exaltar la imaginación del sultán del cuento, no en menor grado que algunas otras maravillas de oriente, si él hubiera sido capaz de interesarse por las maravillas aritméticas.

1001

Fig. 2. El número de Scheherezade

¿Qué tan notable es el número 1001? En aspecto, al parecer es muy ordinario. Inclusive, no pertenece al escogido orden de lo llamados números "primos". Dicho número es divisible por 7; 11 y 13, es decir, por tres números primos consecutivos, el producto de los cuales resulta ser el mencionado número. Pero la maravilla no consiste en que el número $1001 = 7 \times 11 \times 13$, ya

que aquí no hay nada de mágico. Lo más notable es que al multiplicar un número de tres cifras por dicho número, se obtiene un resultado que consiste del mismo número multiplicado, sólo que escrito dos veces, por ejemplo:

$$873 \times 1001 = 873\,873; \quad 207 \times 1001 = 207\,207$$

Y aunque esto era de esperarse, puesto que:

$$873 \times 1001 = 873(1000 + 1) = 873\,000 + 873,$$

aprovechando la señalada propiedad "del número de Scheherezade" se pueden lograr resultados completamente inesperados, por lo menos para el hombre no preparado. Ahora, aclaremos en qué forma se puede sorprender a un grupo de camaradas no iniciados en los misterios aritméticos, con el siguiente truco: supóngase que alguno escribe en un pedazo de papel, en secreto, el número de tres cifras que desee, y que enseguida le agrega el mismo número, se obtiene un número de seis cifras que se compone de tres cifras repetidas. Se le propone al mismo camarada o a su vecino dividir este número, en secreto, por 7; además, con anticipación se predice que en la división no se obtendrá residuo. El resultado se transmite al nuevo vecino, quien de acuerdo con la proposición, lo divide por 11, y aunque no se conoce el dividendo, uno puede afirmar que también ese número se divide sin residuo. El resultado obtenido se proporciona al siguiente vecino, al cual se le solicita que divida este número por 13, y conforme a lo predicho de antemano, la división no dará ningún residuo. El resultado de la tercera división, sin ver el número obtenido, se traslada al primer camarada con las palabras:

- ¿Este es el número que Ud. pensó?
- Así es, Ud. acertó, le contestarán sin duda alguna.

¿Cuál es la clave del truco?

Este bonito truco aritmético, que produce en los no iniciados un efecto de magia, se explica en una forma muy sencilla; recuérdese que al agregar a un número de tres cifras el propio número, significa multiplicarlo por 1001, es decir, por el producto $7 \times 11 \times 13$. El número de seis cifras que obtiene nuestro camarada después de agregar al número dado el propio número deberá por esta razón dividirse exactamente por 7, por 11 y por 13; y como consecuencia de la división consecutiva entre estos tres números (es decir, entre su producto 1001) se deberá, naturalmente, obtener otra vez el número pensado.

La realización del truco se puede variar conforme los deseos, en tal forma que se tenga la posibilidad de encontrar el número enigmático que se obtiene en el total de los cálculos. Es sabido que el número de seis cifras sobre el cual se comienzan a hacer los cálculos, es igual al producto:

$$(\text{número pensado}) \times 7 \times 11 \times 13.$$

Por tal razón, si se pide dividir el número de seis cifras, primero por siete, después por 11, luego por el número pensado entonces, con seguridad se puede encontrar como total final de todas las divisiones al 13. Repitiendo el truco, se pide realizar las divisiones en otro orden: al principio por 11, después por el número pensado y por 13. La última división deberá dar 7 como cociente. O al principio por 13, después por el número pensado, y luego por 7; el total final es 11.

El número 10 101

Despues de lo indicado sobre el número 1001, ya no será una sorpresa ver al número 10 101 en las vitrinas de nuestra galería. Se adivina a qué propiedad, precisamente, está obligado este número por tal honor. Él como el número 1001, da un resultado sorprendente en la multiplicación, pero no de números de tres cifras, sino de dos cifras; todo número de dos cifras, multiplicado por 10 101, da como resultado el propio número, escrito tres veces.

10 101

Fig. 3. Un número que se presta para trucos

Por ejemplo: $73 \times 10\,101 = 737\,373$
$21 \times 10\,101 = 212\,121$

La causa se aclara por el siguiente renglón:

$$73 \times 10\,101 = 73\,(10\,000 + 100 + 1) = 730\,000 + 7300 + 73$$

¿Con ayuda de este número se pueden hacer trucos de adivinación no habitual, como con el número 1001?

Sí se puede: Aquí es posible inclusive, disponer de un truco más variado, si se tiene en cuenta que 10 101 es producto de cuatro números primos:

$$10\,101 = 3 \times 7 \times 13 \times 37.$$

Proponiendo a un camarada pensar un número de dos cifras; a un segundo se le pide agregarle el propio número; a un tercero agregar el propio número una vez más. A un cuarto se le pide dividir el número de seis cifras obtenido, por 7 por ejemplo; un quinto camarada deberá dividir el cociente obtenido por 3; un sexto divide lo que se obtuvo por 37 y finalmente, un séptimo divide este resultado por 13; las cuatro divisiones se realizan sin residuo. El resultado de la última división se transmite al primer camarada; éste es, precisamente, el número pensado por él.

En la repetición del truco se puede introducir cierta variedad, empleando cada vez nuevos divisores. A saber,

en lugar de los cuatro multiplicadores $3 \times 7 \times 13 \times 37$, se pueden tomar los siguientes grupos de tres multiplicadores:

$21 \times 13 \times 37$; $7 \times 39 \times 37$; $3 \times 91 \times 37$; $7 \times 13 \times 111$

Este truco es fácil de modificar en forma semejante a como fue explicado en el caso anterior (en el truco con el número 1001).

El número 10 001 es quizás aún más sorprendente que el número encantado de Scheherezade aunque también sea menos conocido en cuanto a sus propiedades singulares. Sobre él se escribió además, ya doscientos años antes, en la "Aritmética" de Magnitski, en el capítulo donde se proporcionan ejemplos de multiplicación "con una cierta sorpresa". Dicho número, con mayor razón, debe incluirse en nuestra colección de maravillas aritméticas.

El número 10 001

Con este número se pueden también hacer trucos a la manera de los anteriores, aunque quizás no tan variados.

10 001

Fig.4. Otro número que se presta para trucos

Es que dicho número representa en sí, el producto de dos números primos solamente: $10\,001 = 73 \times 137$.

Tengo confianza de que el lector, después de todo lo indicado anteriormente, se dará cuenta cómo se aprovecha eso para la realización de las operaciones aritméticas "con sorpresa".

Seis unidades

En la siguiente vitrina vemos una maravilla del museo de curiosidades aritméticas, el número que consiste de seis unidades. En virtud del conocimiento de las propiedades mágicas del número 1001, simultáneamente nos damos cuenta que: $111\,111 = 111 \times 1001$

111 111

Fig. 5. Número útil para la adivinación

Pero $111 = 3 \times 37$, y $1001 = 7 \times 11 \times 13$. De aquí se sigue que nuestro nuevo fenómeno numérico, que se compone solamente de unidades representa en sí el producto de cinco multiplicadores primos. Combinando estos cinco multiplicadores en todas las formas posibles, en dos grupos, obtenemos 15 pares de multiplicadores que dan como producto uno y el mismo número 111 111:

$3 \times (7 \times 11 \times 13 \times 37) = 3 \times 37\,037 = 111\,111$

$7 \times (3 \times 11 \times 13 \times 37) = 7 \times 15\,873 = 111\,111$

$11 \times (3 \times 7 \times 13 \times 37 = 11 \times 10\,101 = 111\,111$

$13 \times (3 \times 7 \times 11 \times 37) = 13 \times 8547 = 111\,111$

$37 \times (3 \times 7 \times 11 \times 13) = 37 \times 3003 = 111\,111$

$(3 \times 7) \times (11 \times 13 \times 37) = 21 \times 5291 = 111\,111$

$(3 \times 11) \times (7 \times 13 \times 37) = 33 \times 3367 = 111\,111$

Se puede, en ese caso, poner a un grupo de 15 camaradas el trabajo de multiplicación y aunque cada uno multiplicara un distinto par de números, todos obtendrían uno y el mismo resultado original: 111 111.

El mismo número 111 111 es útil también para la adivinación de números pensados, a semejanza de los medios; usados con los números 1001 y 10 101. En el caso dado se propone pensar un número de una cifra, y repetirlo 6 veces. Como divisores pueden servir aquí, cinco números primos: 3; 7; 11; 13; 37 y las combinaciones obtenidas de ellos: 21; 33; 39; etc. Esto proporciona la posibilidad de variar en extremo la realización del truco.

Por ejemplo, del número 111 111 el lector ve cómo se puede emplear, para los trucos aritméticos, un número que se componga de puras unidades, si se descompone en factores. Para fortuna de los aficionados a semejantes trucos, algunos números de tal sistema no son primos, sino compuestos.

De los primeros 17 números de esta especie solamente los dos menores, 1 y 11, son primos, los restantes son compuestos. He aquí cómo se descomponen en factores primos, los primeros diez de los números compuestos de este sistema.

$111 = 3 \times 37$

$1111 = 11 \times 101$

$11\,111 = 41 \times 271$

$111\,111 = 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$

$1\,111\,111 = 239 \times 4649$

$11\,111\,111 = 11 \times 73 \times 101 \times 137$

$111\,111\,111 = 9 \times 37 \times 333\,667$

$1\,111\,111\,111 = 11 \times 41 \times 271 \times 9091$

$11\,111\,111\,111 = 21\,649 \times 513\,239$

$111\,111\,111\,111 = 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37 \times 101 \times 9901$

No todos los números aquí dados son convenientes para la adivinación. Pero números de 3; 4; 5; 6; 8; 9 y 12 unidades son más o menos útiles para este objeto. Ejemplos de su uso para adivinación, se darán al final del siguiente capítulo.

Pirámides numéricas

En las siguientes vitrinas de la galería admiramos notabilidades numéricas de una especie muy particular: con semejanza a pirámides compuestas de números. Consideremos más de cerca a la primera de ellas (Fig. 6).

$$1 \times 9 + 2 = 11$$
$$12 \times 9 + 3 = 111$$
$$123 \times 9 + 4 = 1111$$
$$1234 \times 9 + 5 = 11\,111$$
$$12\,345 \times 9 + 6 = 111\,111$$
$$123\,456 \times 9 + 7 = 1\,111\,111$$
$$1\,234\,567 \times 9 + 8 = 11\,111\,111$$
$$12\,345\,678 \times 9 + 9 = 111\,111\,111$$

Fig. 6. Primera pirámide numérica

¿Cómo explicar estos resultados singulares de la multiplicación?

Para comprender esta rara singularidad, tomemos como ejemplo cualquiera de las filas intermedias de nuestra pirámide numérica: $123\,456 \times 9 + 7$. En lugar de la multiplicación por 9, se puede multiplicar por (10 − 1), es decir, agregar el 0 a la derecha y restar el multiplicando:

$$123\,456 \times 9 + 7 = 1\,234\,560 + 7 - 123\,456 = 1\,111\,111$$

Basta echar una ojeada sobre la última substracción para comprender por qué se obtiene un resultado que consiste solamente de unidades. Podemos también explicar esto, partiendo de otros razonamientos. Para que un número de la forma 12345... se convierta en un número de la forma 11111..., es necesario restar 1 a la segunda de sus cifras, 2 a la tercera, 3 a la cuarta, 4 a la quinta y así sucesivamente; en otras palabras, restar de él el mismo número de la forma 12345... privado de su última cifra, es decir disminuido 10 veces y carente previamente de su última cifra. Ahora, es comprensible que para la obtención del resultado buscado es necesario multiplicar por 10 nuestro número y agregarle la cifra que sigue, en calidad de última cifra, y restar al resultado el número original (y multiplicar por 10 y restar el multiplicando quiere decir, multiplicar por 9).

En forma análoga se explica la formación de la siguiente pirámide numérica (Fig. 7), que se obtiene en la multiplicación de una determinada serie de cifras por 8 y la adición de cifras que consecutivamente aumentan.

$$1 \times 8 + 1 = 9$$
$$12 \times 8 + 2 = 98$$
$$123 \times 8 + 3 = 987$$
$$1234 \times 8 + 4 = 9876$$
$$12\,345 \times 8 + 5 = 98\,765$$
$$123\,456 \times 8 + 6 = 987\,654$$
$$1\,234\,567 \times 8 + 7 = 9\,876\,543$$
$$12\,345\,678 \times 8 + 8 = 98\,765\,432$$
$$123\,456\,789 \times 8 + 9 = 987\,654\,321$$

Fig. 7. Segunda pirámide numérica

Particularmente interesante en la pirámide es la última fila, donde como resultado de la multiplicación por 8 y la adición del 9 tiene lugar la transformación de la serie natural total de cifras en dicha serie; pero con una disposición inversa.

Intentemos explicar esta particularidad. La obtención de los extraños resultados se aclara por el siguiente renglón:

$$12\,345 \times 9 + 6 = 111\,111$$
$$12\,345 \times 8 + 5 = 98\,765$$

Es decir:

$$12\,345 \times (9 - 1) + 5 + 1 - 1 = 12\,345 \times 9 - 12\,345 + 6 - 1$$
$$= 111\,111 - 12\,346$$

Pero restando del número 111 111 el número 12 346 compuesto de una serie de cifras crecientes obtendremos como es fácil de comprender, una serie de cifras decrecientes: 98 765. He aquí, finalmente, la tercera pirámide numérica que también requiere explicación (Fig. 8).

$$9 \times 9 + 7 = 88$$
$$98 \times 9 + 6 = 888$$
$$987 \times 9 + 5 = 8888$$
$$9876 \times 9 + 4 = 88\,888$$
$$98\,765 \times 9 + 3 = 888\,888$$
$$987\,654 \times 9 + 2 = 8\,888\,888$$
$$9\,876\,543 \times 9 + 1 = 88\,888\,888$$
$$98\,765\,432 \times 9 + 0 = 888\,888\,888$$

Fig. 8. Tercera pirámide numérica

Esta pirámide es una consecuencia directa de las dos primeras. La relación se establece muy fácilmente. De la primera pirámide sabemos por ejemplo:

$$12\,345 \times 9 + 6 = 111\,111$$

Multiplicando ambos miembros por 8, tenemos:

$$(12\,345 \times 8 \times 9) + (6 \times 8) = 888\,888$$

Pero de la segunda pirámide se sabe que:

$$12\,345 \times 8 + 5 = 98\,765 \text{ o } 12\,345 \times 8 = 98\,760$$

Vale decir: $888\,888 = (12\,345 \times 8 \times 9) + (6 \times 8)$

$888\,888 = (98\,760 \times 9) + (5 \times 9) + 3$

$888\,888 = (98\,760 + 5) \times 9 + 3$

$888\,888 = 98\,765 \times 9 + 3$

Se convence uno de que todas estas pirámides numéricas no son tan misteriosas como parecen a primera vista. Pero algunos lo consideran, sin embargo no descifradas. Me tocó una vez verlas impresas en un periódico alemán con una nota: "La causa de tan sorprendente singularidad, hasta el presente todavía nadie la ha explicado..."

Nueve cifras iguales

El último renglón de la primera "pirámide" (Fig. 6)

$12\,345\,678 \times 9 + 9 = 111\,111\,111$

```
                111111111
              × 111111111
                ---------
                111111111
               111111111
              111111111
             111111111
            111111111
           111111111
          111111111
         111111111
        111111111
        -----------------
        12345678987654321
```

Las cifras de este resultado disminuyen simétricamente, a partir del centro, en ambas direcciones.

Aquellos lectores que se hayan cansado de la revista de las maravillas numéricas, pueden abandonar aquí la "galería" y pasar a las siguientes secciones en donde se muestran trucos y están presentados los gigantes y enanos numéricos: deseo señalar que ellos pueden suspender la lectura de este capítulo y pasar al siguiente. Pero quien todavía desee ponerse al corriente de algunas notabilidades del mundo de los números, lo invito a visitar conmigo una pequeña serie de vitrinas cercanas.

Las maravillas numéricas sobre las cuales se hablará ahora reclaman del lector, el conocimiento de las llamadas fracciones periódicas infinitas. Aquellos lectores que no estén al corriente de ellas, les propongo transformar las siguientes fracciones ordinarias, en decimales, conforme al método bien conocido:

1/4; 1/8; 1/3; 1/11

Es fácil persuadirse de que las dos primeras fracciones, al convertirse en decimales, dan un número finito de dos y tres cifras respectivamente.

Al convertir en decimales las fracciones restantes, se obtienen series infinitas de cifras que se repiten en un orden determinado:

1/3 = 0,333333=...

1/11 = 0,090909090909...

Tales fracciones se denominan periódicas, y el grupo de cifras que se repite en ellas se llama período.

Representa un ejemplo de un grupo completo de interesantes curiosidades aritméticas en nuestro museo, reunidas en una tabla (ver Fig. 9).

$12\,345\,679 \times 9 = 111\,111\,111$

$12\,345\,679 \times 18 = 222\,222\,222$

$12\,345\,679 \times 27 = 333\,333\,333$

$12\,345\,679 \times 36 = 444\,444\,444$

$12\,345\,679 \times 45 = 555\,555\,555$

$12\,345\,679 \times 54 = 666\,666\,666$

$12\,345\,679 \times 63 = 777\,777\,777$

$12\,345\,679 \times 72 = 888\,888\,888$

$12\,345\,679 \times 81 = 999\,999\,999$

Figura 9.

¿Dónde está la tal singularidad en los resultados? Tomemos en cuenta que:

$12\,345\,678 \times 9 + 9 = (12\,345\,678 + 1) \times 9$

$= 12\,345\,679 \times 9$

Por esta razón: $12\,345\,679 \times 9 = 111\,111\,111$

Y de aquí se sigue directamente que:

$12\,345\,679 \times 9 \times 2 = 222\,222\,222$

$12\,345\,679 \times 9 \times 3 = 333\,333\,333$

$12\,345\,679 \times 9 \times 4 = 444\,444\,444$

Escala numérica

Es interesante determinar qué se obtiene si el número 111 111 111, con el cual ahora tenemos que ver, se multiplica por sí mismo. De antemano se puede sospechar que el resultado deberá ser singular, pero, ¿cuál es precisamente?

Si se posee capacidad para dibujar con claridad en la imaginación una serie de cifras, se llegará a encontrar el resultado que nos interesa, aun sin recurrir a los cálculos sobre el papel. En esencia, aquí la cuestión conduce solamente a una disposición adecuada de los productos parciales, porque al multiplicar se hace solamente de unidad por unidad. La adición de los productos parciales lleva a un sencillo cálculo de unidades. He aquí el resultado de esta multiplicación, singular en su especie (en la realización de la cual no se llega a recurrir a la operación de multiplicación).

Anillos mágicos

¡Qué extraños anillos están expuestos en la siguiente vitrina de nuestra galería! Ante nosotros (Fig. 10) hay tres anillos planos que giran uno con el otro.

En cada anillo están escritas seis cifras, en uno y el mismo orden, que forman el número: 142 857. Los anillos poseen la propiedad admirable siguiente: en

cualquier forma en que sean girados, en la adición de dos números escritos sobre ellos (contando a partir de cualquier cifra en la dirección de giro de las manecillas del reloj), obtenemos en todos los casos el mismo número de seis cifras (en general el resultado será de seis cifras). ¡Solamente que algo adelantado! En la posición que se representa en la fig. 10, obtenemos en la adición de los dos anillos exteriores.

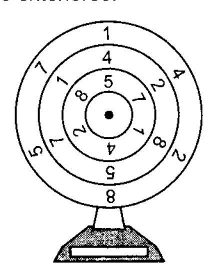


Figura 10. Anillos numéricos giratorios

142 857	+
428 571	
571 428	

Es decir, otra vez la misma serie de cifras: 142 857 solamente las cifras 5 y 7 se han transferido del final al principio.

En otras disposiciones de los anillos, relativas de uno con respecto a otro, tenemos los casos:

285 714 +	714 285 +
571 428	142 857
857 142	857 142

y así sucesivamente.

La excepción lo constituye el caso en que en el resultado se obtiene 999 999:

714 285	+
285 714	
999 999	

(La causa de otras desviaciones respecto de la regla indicada, el lector la podrá captar cuando termine de leer este apartado).

Además, esa misma serie de cifras en idéntica secuencia, la obtenemos también en la substracción de los números escritos en los anillos.

Por ejemplo:

428 571 –	571 428 –	714 285 –
142 857	285 714	142 857
285 714	285 714	571 428

La excepción la constituye el caso en que son puestas en coincidencia cifras idénticas; por supuesto, la diferencia es igual a cero.

Pero esto no es todo. Al multiplicar el número 142 857 por 2; 3; 4; 5 o por 6, se obtiene otra vez la misma serie de cifras, pero desplazada en una disposición circular, en una o en varias cifras:

$$142\,857 \times 2 = 285\,714$$
$$142\,857 \times 3 = 428\,571$$
$$142\,857 \times 4 = 571\,428$$
$$142\,857 \times 5 = 714\,285$$
$$142\,857 \times 6 = 857\,142$$

¿Qué tanto están condicionadas estas enigmáticas particularidades de nuestro número?

Damos con el camino de la clave, si prolongamos un poco la última tabla y probamos multiplicar nuestro número por 7: como resultado se obtiene 999 999. Vale decir, el número 142 857 no es otra cosa que la séptima parte de 999 999 y, por consiguiente, la fracción 142 857/999 999 = 1/7.

En efecto, si se transforma 1/7 en fracción decimal se obtiene: 1/7 = 0,142 857...; es decir: 1/7 = (0,142 857)

Nuestro enigmático número es el período de una fracción periódica infinita que se obtiene en la transformación de 1/7 en decimal. Es comprensible ahora, por qué en la duplicación, triplicación, etc. de este número se produce solamente una nueva colocación de un grupo de cifras en otro lugar. En efecto, la multiplicación de este número por 2 lo hace igual a 2/7 y por lo tanto, equivalente a la transformación en fracción decimal, ya no de 1/7, sino de 2/7. Empezando a transformar la acción 2/7 a decimal, se observa que la cifra 2 es uno de aquellos restos que ya obtuvimos en la transformación de 1/7: es evidente que deberá repetirse la precedente serie de cifras del cociente pero empezando ésta con otra cifra; en otras palabras deberá obtenerse el mismo período, pero sólo que algunas de sus cifras iniciales se encuentran al final. Lo mismo se produce también en la multiplicación por 3; por 4; 5 y 6; es decir, por todos los números que se obtienen en los restos. En la multiplicación por 7 debemos obtener la unidad, o lo que es lo mismo 0,9999...

Los interesantes resultados de la adición y la sustracción de los números, en los anillos hallan explicación en el hecho de que 14 857 es el período de la fracción igual a 1/7. En efecto, ¿qué hacemos, propiamente, girando el anillo en unas cuantas cifras? Pasemos el grupo de cifras del principio al final, es decir, de conformidad con lo indicado multipliquemos el número 142 857 por 2; 3; 4, etc. Por lo tanto, todas las operaciones de adición y substracción de los números escritos en los anillos, llevan a la adición y substracción de las fracciones 1/7; 2/7; 3/7 y así sucesivamente. Como resultado debemos obtener naturalmente fracciones de un séptimo, es decir, de nuevo nuestra serie de cifras 142 857 en una u otra disposición circular. De aquí es necesario excluir solamente el caso en que se sumen tales números de las fracciones de un séptimo, que en total den la unidad o más que 1.

Precisamente los últimos casos no se excluyen totalmente: ellos dan un resultado en verdad, no idéntico a los considerados, pero fundamentalmente de acuer-

do con ellos. Consideremos atentamente qué deberá obtenerse de la multiplicación de nuestro enigmático número con multiplicaciones mayores que 7, es decir, por 8; 9; etc.

El multiplicar 142 857 por 8, por ejemplo, lo podemos hacer así: multiplicar inicialmente por 7, y al producto (es decir, a 999 999) agregar nuestro número:

$142\,857 \times 8 = 142\,857 \times 7 + 142\,857$
$= 999\,999 + 142\,857 = 1\,000\,000 - 1 + 142\,857$
$= 1\,000\,000 + (142\,857 - 1)$

El resultado final 1 142 856 se distingue del multiplicando 142 857, únicamente en que hay antepuesta una unidad, y la ultima cifra está disminuida por una unidad. De acuerdo a una regla similar se compone el producto de 142 857 por todo número mayor que 7, como es fácil ver en los siguientes renglones:

$142\,857 \times 8 = (142\,857 \times 7) + 142\,857 = 1\,142\,856$
$142\,857 \times 9 = (142\,857 \times 7) + (142\,857 \times 2) = 1\,285\,713$
$142\,857 \times 10 = (142\,857 \times 7) + (142\,857 \times 3) = 1\,428\,570$
$142\,857 \times 16 = (142\,857 \times 2) + (142\,857 \times 2) = 2\,285\,712$
$142\,857 \times 39 = (142\,857 \times 5) + (142\,857 \times 4) = 5\,571\,423$

La regla más general es la siguiente: en la multiplicación de 142 257 por cualquier multiplicador, es necesario multiplicar solamente por el residuo de la división del multiplicador por 7; se antepone a este producto el número que indica la cantidad de sietes que existen en el multiplicador ese mismo número se substrae al resultado.

Supóngase que deseamos multiplicar 142 857 por 88. El multiplicador 88 en la división por 7 da 12 en el cociente, el resultado de las operaciones indicadas es:

$$12\,571\,428 - 12 = 12\,571\,416$$

De la multiplicación 142 857 × 365 obtenemos (puesto que 365 en la división por 7 da en el cociente 52 y como resto 1).

$$52\,142\,857 - 52 = 52\,142\,805$$

Aprendiendo esta sencilla regla y recordando los resultados de la multiplicación de nuestro singular número por los multiplicadores del 2 al 6 (que es muy difícil, siendo necesario tan sólo recordar con qué cifras comienzan), se puede sorprender a los no iniciados con la rapidez de la multiplicación de un número de seis cifras; y para no olvidar este número sorprendente, observemos que él procede de 1/7, o lo que es lo mismo de 2/14: tenemos las tres primeras cifras, de nuestro número 142. Las tres restantes se obtienen por substracción de las tres primeras de 999:

$$\begin{array}{r} 999 - \\ \underline{142} \\ 857 \end{array}$$

Ya hemos tenido que ver con tales números precisamente cuando nos pusimos al corriente de las propiedades del número 999. Recordando lo indicado allí, nos damos cuenta de que el número 142 857 es, evidentemente, el resultado de la multiplicación de 143 por 999:

$142\,857 = 143 \times 999$

Pero $143 = 13 \times 11$. Recordando lo observado anteriormente sobre el número 1001, igual a $7 \times 11 \times 13$, estamos en condiciones sin efectuar operaciones, de predecir qué deberá obtenerse de la multiplicación $142\,857 \times 7$:

$142\,857 \times 7 = 143 \times 999 \times 7 = 999 \times 11 \times 13 \times 7$
$= 999 \times 1001 = 999\,999$

(todas estas transformaciones, claro está, se pueden efectuar mentalmente).

Una familia fenomenal

El número 142 857 que acabamos de tratar es uno de los miembros de una familia completa de números que poseen las mismas propiedades. He aquí uno de tales números: 0 588 235 294 117 647 (el 0 antepuesto es necesario). Si se multiplica este número por 4, por ejemplo, obtenemos aquella misma serie de cifras, sólo que las cuatro primeras cifras estarán colocadas al final:

$0\,588\,235\,294\,117\,647 \times 4 = 2\,352\,941\,176\,470\,588.$

Disponiendo las cifras de este número sobre varios anillos móviles (Fig. 11) como en el caso anterior, en la adición de los números de dos anillos obtendremos el mismo número, sólo que desplazado en el orden circular:

$$\begin{array}{r} 0\,588\,235\,294\,117\,647\ + \\ \underline{2\,352\,941\,176\,470\,588} \\ 2\,941\,176\,470\,588\,235 \end{array}$$

Naturalmente, las tres series que se disponen en los anillos, son idénticas:

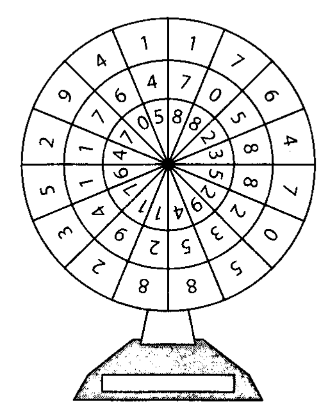


Figura 11.

De la substracción de los números de dos anillos, se obtiene otra vez el mismo círculo de cifras:

2 352 941 176 470 588 –
0 588 235 294 117 647
1 764 705 882 352 941

Finalmente, este número, como también el considerado antes, consiste de dos mitades: las cifras de la segunda mitad son el complemento a 9 de las cifras de la primera mitad. Tratemos de encontrar la clave de todas estas particularidades. No es difícil darse cuenta en qué forma la serie numérica dada ha resultado ser un pariente cercano del número 142 857; el número del anillo anterior representa en sí, el período de una fracción infinita igual a 1/7; el nuevo número es, probablemente, el período de cualquier otra fracción: y en efecto, nuestra larga serie de cifras no es otra cosa, que el período de la fracción infinita que se obtiene de la transformación de la fracción simple 1/17 a fracción decimal:

1/17 = 0 (0 588 235 294 117 647)

He aquí por qué, en la multiplicación de este número por sus multiplicadores del 1 al 16 se obtiene aquella misma serie de cifras en la cual, solamente una o varias cifras iniciales están transferidas al final del número. Y por el contrario, al transferir una o varias cifras de la serie del comienzo al final, aumentamos el número en varias veces (del 1 al 16 inclusive). Sumando dos anillos girados, uno con relación al otro, producimos la adición de dos números multiplicados por ejemplo, por tres y por diez, y naturalmente, se obtiene el mismo anillo de cifras; debido a que la multiplicación por 3 + 10, es decir por 13, motiva solamente una transferencia insignificante del grupo de cifras en la disposición circular. Con una cierta posición de los anillos se obtienen, sin embargo, sumas que difieren un poco de la serie inicial. Si, por ejemplo giramos un anillo en tal forma que se sume un número multiplicado por seis con uno multiplicado por 15, en la suma se deberá obtener un número multiplicado por 6 + 15 = 21. Y tal producto, como es fácil darse cuenta, es algo distinto del producto por un multiplicador menor que 17.

En efecto, nuestro número período de una fracción igual a 1/17, al multiplicarse por 17 deberá dar 16 veces (es decir, tantos como cifras existan en el período de nuestra fracción periódica), o el 1 con 17 ceros menos 1. Por esta razón, en la multiplicación por 21, es decir por 4 + 17, deberemos obtener nuestro número cuadruplicado antepuesto al cual se halla el 1, y del orden de las unidades se resta 1. El número cuadruplicado empieza con las cifras que se obtienen en la transformación de la fracción 4/17 en fracción decimal: 4: 17 = 0,23

El orden de las cifras restantes es conocido: 5291... vale decir, nuestro número multiplicado por 21 será: 2 352 941 176 470 587.

Lo mismo se obtiene de la adición de los círculos de cifras con una disposición correspondiente. En la substracción de los anillos numéricos de tal caso, no se puede. De números semejantes a los dos con que hemos entablado conocimiento, existe una infinidad. Ellos constituyen una familia completa, puesto que están ligados por un origen común a partir de la transformación de las fracciones simples en fracciones decimales infinitas. Pero no todo período de una fracción decimal tiene la interesante propiedad, anteriormente considerada, de dar en la multiplicación una transferencia circular de cifras. Sin entrar en sutilezas de la teoría observamos que esto tiene lugar solamente para aquellas fracciones en que el número de cifras de su período es menor en una unidad, al denominador de la fracción simple correspondiente. Así, por ejemplo:

1/7 da en el período 6 cifras,
1/17 da en el período 16 cifras ,
1/19 da en el período 13 cifras ,
1/23 da en el período 22 cifras ,
1/29 da en el período 28 cifras .

Si la condición indicada ahora (relativa al número de cifras del período) no se satisface, entonces el correspondiente período da un número que no pertenece a la interesante familia numérica que nos ocupa. Por ejemplo, 1/13 da una fracción decimal con seis (y no con 12) cifras en el período: 1/13 = 0,076923

Multiplicando por 2, obtenemos un número completamente distinto: 2/13 = 0,153846

¿Por qué? Porque entre los restos de la división 1/13 no estaba el número 2. De los diferentes restos existen tantos como cifras hay en el período es decir: 6; de los diversos multiplicadores para la fracción 1/13 tenemos 12, por consiguiente, no todos los multiplicadores estarán entre los restos, sino únicamente 6. Es fácil darse cuenta de que estos multiplicadores son los siguientes: 1; 3; 4; 9; 10; 12. La multiplicación por estos 6 números da una nueva colocación circular (076 923 × 3 = 230 769), no siendo así en la multiplicación por los números restantes. Esta es la razón por la cual de 1/13 se obtiene un número útil sólo en parte para el "anillo mágico".

Este libro se terminó de imprimir
en los talleres gráficos de Editorial San Marcos, situados en
av. Las Lomas 1600 Urb. Mangomarca, San Juan de Lurigancho, Lima, Lima
RUC: 10090984344

La Colección Uniciencia Sapiens es una obra colectiva que se creó con la finalidad de ser un pilar dentro del proceso de preparación para los estudiantes preuniversitarios. Por ello, proponemos una metodología y didáctica modernas, con una organización de contenidos acorde con los requirimientos actuales de las principales universidades de nuestro país.

Asimismo, se presenta una interesante cantidad de ejercicios resueltos y propuestos que permitirán al lector desarrollar las destrezas necesarias y suficientes para un buen desempeño en las áreas de matemáticas y ciencias. La colección consta de los siguientes libros:

- Aritmética
- Álgebra
- Geometría
- Trigonometría
- Física
- Química

ISBN: 978-612-315-275-8

EDITORIAL SAN MARCOS
Oficina principal: Jr. Dávalos Lissón 135, Lima
Telfs.: 331-1522 / 332-3664
Oficina de ventas: Telf.: 433-7611 RPC: 989361413
E-mail: ventas@editorialsanmarcos.com
Librería: Av. Garcilaso de la Vega 978, Lima. Telf.: 424-6563
E-mail: libreria@editorialsanmarcos.com
www.editorialsanmarcos.com

La Colección Uniciencia Sapiens es una obra colectiva que se creó con la finalidad de ser un pilar dentro del proceso de preparación para los estudiantes preuniversitarios. Por ello, proponemos una metodología y didáctica modernas, con una organización de contenidos acorde con los requirimientos actuales de las principales universidades de nuestro país.

Asimismo, se presenta una interesante cantidad de ejercicios resueltos y propuestos que permitirán al lector desarrollar las destrezas necesarias y suficientes para un buen desempeño en las áreas de matemáticas y ciencias. La colección consta de los siguientes libros:

- Aritmética
- Álgebra
- Geometría
- Trigonometría
- Física
- Química

EDITORIAL SAN MARCOS
Oficina principal: Jr. Dávalos Lissón 135, Lima
Telfs.: 331-1522 / 332-3664
Oficina de ventas: Telf.: 433-7611 RPC: 989361413
E-mail: ventas@editorialsanmarcos.com
Librería: Av. Garcilaso de la Vega 978, Lima. Telf.: 424-6563
E-mail: libreria@editorialsanmarcos.com
www.editorialsanmarcos.com